数理解析研究所講究録
第 558 巻 1985 年 141-149



# 赤外発散に関連した一，二の幾何学的問題

京大・数理研　河合隆裕

関係する粒子の質量が零である場合のファインマン(型)積分の解析性を論じる際に遭遇する問題の幾何学的側面に就いて報告する。現在目標としていることは，massless particlesを考慮に入れた時，massive particlesによって定められるランダウ・特異多様体の近傍でのS-行列の特異性が（少くとも摂動論的には）massless particlesを考慮に入れない場合と本質的には差が無い，とういう当然期待されるべき，併し寧ろ逆の方向の結果が（かなり speculative な方法で）多く報告されている，結果を示すことである。（[1]）

最終的には，（柏原-河合の意味での）漸近展開が適用されるべきであろう，と思うけれど，[1]ではより à la main な approach を用いている。何れにしても，解析的に見て $1/(k^2-m^2+i0)$ $(m\neq 0)$ と $1/(k^2+i0)$ とは著しく異った性質を示すことにはいくら注意してもし過ぎることはあるまい。例えば，多少揚足取り気味ではあるが，microlocal な観点からは $\delta^+(k^2)=\delta(k^2)Y(k_0)$ とういう定義は余り好ましし

くは無い。やはり、

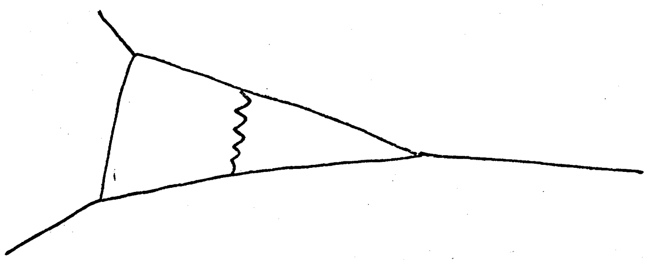
$$\delta^+(k^2) = -\frac{1}{2\pi i}\,\Delta(k)\,Y(k_0),$$

但し

$$\Delta(k) = ((k_0+i0)^2-\vec{k}^2)^{-1} - ((k_0-i0)^2-\vec{k}^2)^{-1}$$

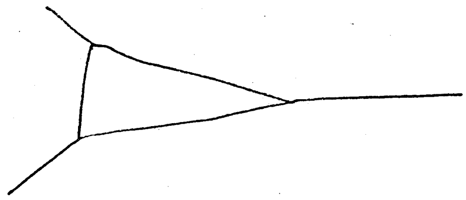
とすることが望ましい。（ $SS(\Delta(k))$ は $SS(\delta(k^2))$ よりはるかに小さいことに注意。）尚，$SS(\delta(k^2))$ が，或いは $SS(1/(k^2+i0))$ ですら，$k=0$ で任意の（実）covector を含むという事実は，massless particles の関与する process に於ける Coleman-Norton 描像と良く一致し興味深い。（この事実は，私の知る限りでは，きっちりと言明した文献は無いように思うので，些か横道に逸れるが，簡単に触れておく：

例えば次の graph G に於いて，波線のみが massless particle に対応しているとし，これの space-time diagram としての実現の可能性を考えてみることとする。

G：


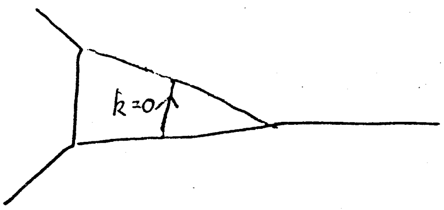
今 $G_0$ を 次のような graph とし

$G_0$:



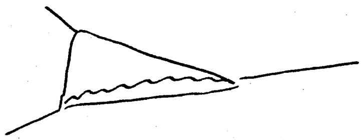
$D_0$ を、Landau－中西 rule による space－time diagram としての その実現とする。この時、次のような diagram D が実現される、というのが、波線が massless particle に対応する、という事実をも考慮に入れての Coleman－Norton 描像である。勿論、$k \neq 0$ ならば 内線のいくつかが contract された（例えば D′ のような）diagram しか実現され得ない。

D:




但し ↑ は 全く任意の定ベクトルである。

D′:



etc.

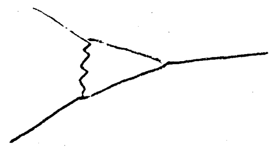
尚，［1］に於いては，Gの波線に対し，$1/(k^2+i0)$ 型の propagator でなく retarded propagator を対応させることによって得られる函数も重要な役割を果しているが，この場合には D に於ける $\not{k}$ は light cone vector となる。これは SS $\left(1/((k_0 \pm i0)^2 - \vec{k}^2)\right)$ の $k=0$ での余接成分が $\pm w$（但し $w^2=0$，複号同順）となることに対応している。）

さて，［1］に於いて次の形の函数の解析性を調べることが重要になる：

(1) $I(p, q)$

$$= \int \frac{N(p, q, k)\, d^4k}{(pk+i0)(2pk+k^2+i0)(k^2+i0)(2qk+k^2+i0)(qk+i0)}$$

（ここで N はある多項式；以下の議論ではその形は余り重要でない。）
これは，形式的には次の函数 $F(p, q)$ に於いて $p^2 = m^2$，$q^2 = m^2$ と置いた物である。尚 $F(p, q)$ は［2］で導入されたファインマン型の函数の内，先程

のグラフ $G$ に於いて  という部分

に対応する特異性の内の leading な部分である。([1])

$$F(p, q) = \int \Phi(p, q, k)\, d^4k, \quad \text{但し}$$

(2) $\Phi(p, q, k)$

$$= \frac{N(p, q, k)}{(pk+i0)((p+k)^2-m^2+i0)(k^2+i0)((q+k)^2-m^2+i0)(qk+i0)}.$$

[尚, $N(p, q, k)$ を具体的に記すと, その次数は, 上の函数を(紫外発散は別として)収束させるに十分なだけある事は容易に示し得るが, 以下ではこの点に就いては立ち入らない。]

以下, 本稿では紫外発散はすべて無視することとする。さて, この時 $I(p, q)$ に通常の microfunction に対する積, 積分の理論を適用することを考えてみると, 被積分函数の積の well-definedness は一般論では保証され得ないことが判る。ではどうしたら良いか? ここで柏原-河合による "$W_0$ 型の結果" を使ってみる。([3]; 尚, Adv. Math. 34 (1979), 163-184 も参照。)

例5　次のような関係式を満たす実ベクトル $(P, Q, K, u, v)$ が存在するか否かを調べてみる。( $p(n)$, $q(n)$, $k(n)$, $\alpha_j(n)$ $(j=1, \cdots, 5)$ は実とは限らない。)　$SS(I)$ が (3) を満たす $(P, Q; u, v)$ なる点で尽くされる、というのが "$W_0$型の結果" の一つの帰結である。

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
& p(n) \longrightarrow P \\
& q(n) \longrightarrow Q \\
& k(n) \longrightarrow K \\
& \alpha_1(n)\, p(n)\, k(n) \longrightarrow 0 \\
& \alpha_2(n)\,(2p(n)k(n) + k(n)^2) \longrightarrow 0 \\
& \alpha_3(n)\, k(n)^2 \longrightarrow 0 \\
& \alpha_4(n)\,(2q(n)k(n) + k(n)^2) \longrightarrow 0 \\
& \alpha_5(n)\, q(n)\, k(n) \longrightarrow 0 \\
& \alpha_1(n)\, k(n) + 2\alpha_2(n)\, k(n) \longrightarrow u \\
& 2\alpha_4(n)\, k(n) + \alpha_5(n)\, k(n) \longrightarrow v \\
& \alpha_1(n)\, p(n) + 2\alpha_2(n)\,(p(n) + k(n)) \\
& \quad + 2\alpha_3(n)\, k(n) + 2\alpha_4(n)\,(q(n) + k(n)) \\
& \quad + \alpha_5(n)\, q(n) \longrightarrow 0
\end{aligned}
\right.
$$

勿論，今 (1) の右辺の被積分函数の分母は $+i0$ 型故，(3) に於ける $\alpha_j(n)$ に何らかの条件が更に課せられることを期待することは自然である．そのような付帯条件を課した陳述を通常 "$W_0(+)$ 型の結果" と呼んでいる。([3]) ただ不幸にして，[3] に於いて述べられた予想は未だに証明されていない。

ただ幸い，(1) に就いては，$W_0(+)$ を持ち出すこともなく，(3) の関係式のみから，もし $P \not\parallel Q$ ($P^2 \sim m^2$, $Q^2 \sim m^2$) ならば，$u=v=0$，即ち $I(p, q)$ は $p \not\parallel q$ ならば mass-shell の近傍で解析的，を示し得る。(計算の詳細は略する。(3)の各式を種々組合せるだけの初等的なものである。)

同様にして $F(p, q)$ を調べようとすると，今度は $F(p, q)$ は ($p \not\parallel q$ でも) 解析的でなく，$W_0$ 型の結果ではなく，$W_0(+)$ 型の予想を使わないと望む結果が出てこない。併し，このような基本的な所に数学的な "予想" を持ち込んで物理学者に満足して頂けるとは思い難い。勿論，$W_0(+)$ 型の予想を用いて望ましい結果が得られる，と云うこと

は数学屋にとっては甚だ encouraging である；少くとも我々は余り見当外れのことを予想している訳ではあるまい ——

結局 [1] では、多少 tricky な，但し $W_0$ 型の議論のやり方から見て自然な，又，絶対に物理学者から tricky と言われる心配は無い，方法でこの所は切り抜けることとした：$k = r\Omega$ $(|\Omega| = 1)$ と極座標に移って $(r, \Omega)$-空間での積分と見做して議論を進めている。この積分に就いては，$W_0(+)$，或いは $W_0$，を持ち出さずに一般論が適用できるからである。[何故これが tricky かと言えば

$$\frac{1}{k^2 + i0} = \frac{1}{r^2(\Omega^2 + i0)}$$

という書き換えに於いて，右辺の $i0$ と左辺の $i0$ とは意味が違う，或いはより基本的には $k$-space と $(r, \Omega)$-space は同相でないから 2つの函数が等しい，ということの意味が明確でないからである。]

何れにしても，再びこのような形で $W_0$，或いは $W_0(+)$ 型の幾何学が，今迄とはかなり

違った文脈で現われてきたことは、$W_0$型の議論の自然さを反映しているように思われて私にとっては嬉しいことである。

## 文献

[1] Kawai, T. and H. P. Stapp, Infrared finiteness and analytic structure, in preparation.

[2] Stapp, H. P., Exact solutions of the infrared problem, Phys. Rev., D, 28 (1983), 1386-1418.

[3] Kashiwara, M. and T. Kawai, On holonomic systems for $\prod_{l=1}^{N}(f_l+\sqrt{-1}0)^{\lambda_l}$, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 15 (1979), 551-575.