数理解析研究所講究録
第558巻 1985年 150-169

すべての形式解が収束するための必要十分条件について

都立大理学部　吉野正史　(Masafumi YOSHINO)

§1. *Introduction.*　解析的な係数を持つあるクラスの微分方程式に対し、そのすべての形式解が収束する為の必要十分条件について報告します。ここで考える方程式の型と当面する1つの大きな障害を明らかにするためまず次のような例を考える。 Lを $L=\sum_{j=0}^{m} a_j (x_1\frac{\partial}{\partial x_1})^j (x_2\frac{\partial}{\partial x_2})^{m-j}$ $a_j\in\mathbb{C}$ $(0\le j\le m)$, $a_0 a_m \neq 0$, $m\ge 1$ 整数 に対し $Lu=f$ の形式解を求めてみる. 未定係数法によるとし $u=\sum u_{\nu\mu} x_1^{\nu} x_2^{\mu}$, $f=\sum f_{\nu\mu} x_1^{\nu} x_2^{\mu}$ を代入すると次の漸化式を得る。 $(\sum_{j=0}^{m} a_j \nu^j \mu^{m-j}) u_{\nu\mu} = f_{\nu\mu}$　$\nu,\mu\ge 1$. 従って もし $(\sum_{j=0}^{m} a_j \nu^j \mu^{m-j}) \neq 0$ であってしかも $(\sum_{j=0}^{m} a_j \nu^j \mu^{m-j})$ が $\nu,\mu\in\mathbb{N}$ で $\nu,\mu\to\infty$ のときあまり小さくならなければ すべての形式解は収束する。 残念ながらこれは実際には満たされるとは限らない。 a_jの値によってはこれは小さくなります。それではこれを記述するにはどうすればよいのでしょうか。この型の問題はいわゆる *small* denominator の問題の最も特別で簡単な例のうちの1つです。

ここで報告することは，この困難に対する1つの新しい challenge の方法についてです。すなわち方程式の係数からきまるいくつかの数論的関数の解析を通して形式解が収束する為の必要十分条件を与えようというものです。この方法は同時に形式解が収束する時にその収束半径の評価も可能にします。これによって私たちはこれを characteristic points を通っての解析接続の問題に　　　応用することができます。私たちはこれが可能になるため必要十分条件をあるクラスの作用素に対して与えます。

§2. 記号と結果　$d \geq 2$ 整数，$x=(x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{C}^d$，$\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$，$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{N}^d$
$\partial=(\partial_1,\dots,\partial_d)$，$\partial_j=\partial/\partial x_j$ $(1\leq j\leq d)$　$(x\partial)^\alpha = (x_1\partial_1)^{\alpha_1}\cdots(x_d\partial_d)^{\alpha_d}$，　$m, N \in \mathbb{N}$，$N \geq 1$ とし $s_1,\dots,s_N \in \mathbb{N}$ を $1=s_1\leq s_2\leq\cdots\leq s_N$ となる整数とし，このとき $N\times N$ Leray-Volevich 系の多項式 $P(\eta)$ を次によって定義します。

$$(2.1)\qquad P(\eta)=\Big(\sum_{|\alpha|\leq m+s_j-s_k} a_\alpha^{jk}\eta^\alpha\Big)_{\substack{j\downarrow 1,\dots,N\\ k\to 1,\dots,N}}$$

ここで a_α^{jk} $(1\leq j,k\leq N,\ |\alpha|\leq m+s_j-s_k)$ は複素定数。$0\leq s\leq m$

に対して同様にして $q_s(x;\eta)$ を

$$(2.2)\qquad q_s(x;\eta)=\Big(\sum_{|\beta|\le m-s+s_j-s_k} b_\beta^{jk}(x)\eta^\beta\Big)_{\substack{j\downarrow 1,\dots,N\\ k\to 1,\dots,N}}$$

によって定義する。ここで $b_\beta^{jk}(x)$ ($1\le j,k\le N$, $|\beta|\le m-s+s_j-s_k$) は $x=0$ の近傍で正則とする。

$P(x\partial)$ と $Q_s(x;x\partial)$ を (2.1) (2.2) でそれぞれ η を $x\partial$ でおきかえて得られる作用素とし $f(x)$ を $x=0$ の近傍で正則なベクトル値関数とする。このとき次の方程式のすべての形式解の収束が考える問題である。

$$(2.3)\qquad (P(x\partial)+Q_s(x;x\partial))u=f$$

ここで $u={}^t(u_1,\dots,u_N)$ は未知ベクトル値関数.

<u>注意 2.1.</u> 必要ならば $P(x\partial)$ を $P(x\partial)+Q_s(0;x\partial)$ でおきかえることにより私たちは (2.3) において $b_\beta^{jk}(0)=0$ と仮定することができる. 以後では常にこの条件を仮定する。

結果を述べるためにいくつかの定義をする。$\xi\in\mathbb{R}^d$, $|\xi|=1$, $\varepsilon>0$ に対し $\Gamma(\xi;\varepsilon)$ を ξ の ε 錐近傍とする。すなわち $\Gamma(\xi;\varepsilon)=\{\eta\in\mathbb{R}^d;\ |\eta/|\eta|-\xi|<\varepsilon\}$. そのとき degree of ellipticity $\sigma_\xi(P)$ of P with respect to ξ を次で定義する.

(2.4) $$\sigma_\xi(P) = \sup_{\varepsilon>0} \sigma_{\xi,\varepsilon}(P).$$

ここで

(2.5) $$\sigma_{\xi,\varepsilon}(P) = \sup\left\{c \in \mathbb{R};\ \liminf_{|\eta|\to\infty,\ \eta\in\Gamma(\xi;\varepsilon)\cap\mathbb{N}^d} |\eta|^{m-mN-c}\,|\det P(\eta)| > 0\right\}$$

但し もし $\liminf |\eta|^{-s}|\det P(\eta)| = 0$ for $\forall s \in \mathbb{R}$ のときは $\sigma_{\xi,\varepsilon}(P) = -\infty$ とする。特に P を指定する必要の ないときは $\sigma_\xi(P)$ のかわりに σ_ξ とかく。

$q_s(x;\eta)$ を x について Taylor 級数に展開する。$q_s(x;\eta) = \sum_\gamma q_{s,\gamma}(\eta)x^\gamma$ ここで $q_{s,\gamma}(\eta)$ は $P(\eta)$ と同様の形をしている。そのとき $MS(Q_s)$ を次によって定義する。

(2.6) $$MS(Q_s) = \left\{\begin{array}{l} q_{s,\gamma}(\eta) \neq 0 \text{ なるすべての } \gamma \text{ を含むような原点} \\ \text{を頂点とする最小の closed convex cone} \end{array}\right\}.$$

ここでもし $q_s(x;\eta) \equiv 0$ のとき $MS(Q_s) = \{0\}$ とする。

次に $\det P(\eta) = \sum_{j=0}^{mN-\hat{s}} a_j(\eta)$ とかく。ここで $a_j(\eta)$ は j 次斉次多項式, $\hat{s}$ は 整数 又は $\hat{s} = +\infty$ であり $a_{mN-\hat{s}}(\eta) \neq 0$ とする。もし $\det P(\eta) \equiv 0$ のときは $\hat{s} = +\infty$

$a_{mN-\hat{\delta}}(\eta)\equiv 0$ とする。このとき次を仮定する.

(A.1) もし $Q_\delta\neq 0$ ならば $\hat{\delta}\le\delta$.

$\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R};\ x\ge 0\}$, $-\infty\le d_0\le m$ とする。このとき

(2.7) $\Sigma_0=\Sigma_0(P,d_0)=\{\xi\in\mathbb{R}^d_+\ ;\ |\xi|=1,\ a_{mN-\hat{\delta}}(\xi)=0$ かつ $\sigma_\xi(P)\le d_0\}$.

このとき $d_0\le d_1$ ならば $\Sigma_0(P,d_0)\subset\Sigma_0(P,d_1)$ に注意する。もし $Q_\delta\neq 0$ であれば (A.1) より $a_{mN-\hat{\delta}}(\theta)\neq 0$ なる θ が存在する、$S(\eta,\rho)=\sum_{j=0}^{mN-\hat{\delta}}\rho^{mN-\hat{\delta}-j}a_j(\eta)$ とおき $\eta=\zeta_1\theta+\zeta'$ $\zeta'=(\zeta_2,\dots,\zeta_d)$ とする。そのとき $S(\zeta_1\theta+\zeta',\rho)$ を ζ_1 の多項式として分解し ζ を η で表現して次の表現をえる.

(2.8) $$S(\eta,\rho)=\prod_{j=1}^{j_0}g_j(\eta,\rho)^{m_j}$$

ここで $m_j\in\mathbb{N}$, $m_j\ge 1$. さて $\Sigma_0\neq\phi$ と仮定し $\xi_0\in\Sigma_0$ $U(\xi_0)$ を ξ_0 の近傍とする。各 $\xi\in U(\xi_0)$, $\pm\theta\in MS(Q_\delta)\cap\{\theta\in\mathbb{R}^d;\ |\theta|=1\}$ と $\rho\ge 0$ に対し関数 $t\longmapsto g_j(\xi+t\theta,\rho)$ は $t=0$ で Hölder 連続であることが Puiseux 展開の理論より従う。さらに ξ, θ, ρ に依存しない $\tau_j>0$, $\omega_j>0$ と $c_j(\xi,\theta,\rho)\neq 0$, $R_j(\xi,\theta,\rho,t)$ が存在して次が成立する.

$$(2.9)\quad g_j(\xi+t\theta,\rho)-g_j(\xi,\rho)=c_j(\xi,\theta,\rho)t^{\tau_j}+t^{\tau_j+\omega_j}R_j(\xi,\theta,\rho,t)\quad t\to 0.$$

このとき次を仮定する。

(A.2)（$g_j(\xi+t\theta,\rho)$ の $t=0$ における一様 Hölder 連続性）. もし $Q_\Delta\neq 0$ かつ $\Sigma_0(P,m-\Delta)\neq\phi$ ならば 各 $\xi_0\in\Sigma_0(P,m-\Delta)$ と $g_j(\xi_0,0)=0$ なる各 g_j に対して ξ_0 の近傍 $V(\xi_0)$, $\rho_0>0$, $t_0>0$ そして $R_0>0$ が存在して $\forall\xi\in V(\xi_0)$, $0\le\forall\rho<\rho_0$, $0\le\forall t<t_0$, $\forall\pm\theta\in MS(Q_\Delta)$ に対して (2.9) が成立ししかも評価 $|R_j(\xi,\theta,\rho,t)|\le R_0$ が成立する。

各 $\xi,\theta\in\mathbb{R}^d$ に対し $a_{mN-\tilde{\Delta}}(\eta)$ の $\eta=\xi$ における localization $L_\xi(\theta)$ を次で定義する。

$$(2.10)\qquad a_{mN-\tilde{\Delta}}(\xi+t\theta)=L_\xi(\theta)t^\delta+O(t^{\delta+1})$$

ここで δ は整数 ≥ 1 であって $L_\xi(\theta)\neq 0$. このとき次を仮定する。

(A.3)（$L_\xi(\theta)$ の ellipticity）. $Q_\Delta\neq 0$ かつ $\Sigma_0(P,m-\Delta)\neq\phi$ ならば $\forall\xi\in\Sigma_0(P,m-\Delta)$, $\forall\pm\theta\in MS(Q_\Delta)$ に

対して $\mathcal{L}_\xi(\theta) \neq 0$ である。

$e_j(\eta)$ $(1 \le j \le N)$ を $p(\eta)$ の固有値とし $r(\eta) = \min_{1 \le j \le N} |e_j(\eta)|$ とおく。 $A \subset \mathbb{R}^d$ とし このとき (一般化された) Leray の補助関数 $\rho(A,P)$ を次によって定義する.

$$\rho(A,P) = \liminf_{|\eta| \to \infty,\ \eta \in A \cap \mathbb{N}^d} r(\eta)^{1/|\eta|}. \tag{2.11}$$

ここでもし $A \cap \mathbb{N}^d$ が有限集合であれば $\rho(A,P)=1$ とおく。 $r(\eta)$ は $|\eta| \to \infty$ のとき高々多項式の増大度しかもたないことに注意すると $0 \le \rho(A,P) \le 1$ である。$\rho(A,P)$ の基本的な性質はあとで述べる。 $f(x) = \sum f_\eta x^\eta / \eta!$ を原点での解析関数とするとき $MS(f) = \{\eta \in \mathbb{N}^d ; f_\eta \neq 0\}$. とおく。 $C \subset \mathbb{N}^d$ を任意に与える。このとき

<u>定理 2.1</u>. 条件 (A.1) ~ (A.3) を仮定する。このとき原点の近傍で正則であって $MS(f) \subset C + MS(Q_s)$ をみたす任意の f に対して 方程式 (2.3) のすべての形式解が収束するための必要かつ十分条件は $\rho(C + MS(Q_s) ; P) > 0$

かつ $\det P(\eta) \neq 0$ が有限ケの η を除いてすべての $\eta \in \mathbb{N}^d$ に対して成立することである。

<u>注意 2.2.</u> 定理2.1において一般には条件(A.1)(A.3)をおとすことはできない。 又(A.2)を満たすような場合は $d=2$ あるいは $g_j(\eta, p)$ がなめらかな場合であることも示すことができる。

<u>注意 2.3.</u> 応用では次の修正も有用である。$\Sigma_0' = \Sigma_0'(P, d_0)$ を $\Sigma_0'(P, d_0) = \Sigma_0(P, d_0) \setminus \{\xi \in \mathbb{R}_+^d ; |\xi| = 1,\ a_{mN-\hat{s}}(\xi) = 0$ かつ $\sigma_\xi(P) = d_0\}$ によって定義し $\overline{\Sigma_0'(P, d_0)}$ を $\Sigma_0'(P, d_0)$ の閉包とする。このとき次を仮定する。

(2.12) $\sigma_\xi = m - \Delta$ をみたす $\forall \xi$ に対して (2.4) および (2.5) における sup. は ある $\varepsilon > 0$ と $c = m - \Delta$ によって達成される。

このとき $\Sigma_0(P, m-\Delta)$ を $\overline{\Sigma_0'(P, m-\Delta)}$ でおきかえても定理2.1は正しい。

以下で 定理2.1からのいくつかの帰結について述べる。

系 2.2.　条件 (A.1) と $\Sigma_0(P, d_0)=\phi$ (or (2.12) と $\Sigma_0'(P, d_0)=\phi$) を ある d_0 に対して仮定する。このとき原点の近傍で正則な任意の f と (2.3) で与えられる $\forall Q_s(x; x\partial)$ で $m-s \le d_0$ をみたすものに対し 方程式 (2.3) のすべての形式解は収束する。

証明：　$C = MS(Q_s) = \mathbb{R}^d_+$ の場合に定理を適用する。(A.2) (A.3) は 明らか

他方 $\Sigma_0=\phi$ より $\sigma_\xi > -\infty$ $\forall \xi$ が 成立するが これより $\rho(\mathbb{R}^d; P) > 0$ が成立し これより $\det P(\eta)$ は 高々有限ケの $\eta \in \mathbb{N}^d$ 以外では 0 にならないことがわかる。条件 (2.12) と $\Sigma_0'=\phi$ を 仮定したときには Remark 2.3 より 求めることが従う。

注意 2.4.　条件 $\Sigma_0=\phi$ は次のような意味をもつ。もし $\Sigma_0=\phi$ であれば small denominator は $\mathrm{ord}\, Q_s \le d_0$ i.e. $m-s \le d_0$ をみたす Q_s に対しては 本質的にはあらわれない。もしそうでなければ 一般にあらわれる。

例 2.5.　$P(\eta)$ は elliptic すなわち $a_{mN}(\eta) \neq 0$ $\forall \eta \in \mathbb{R}_+^d$ とする。このとき $\Sigma_0(P, m)=\phi$ である。従って (2.3) の すべての形式解は収束する。

例 2.6.　$P(\eta)$ が hypoelliptic 多項式，simple chara-

-cteristic の場合にあとで述べる σ_ξ の解析より $\Sigma_0=\phi$ となる必要十分条件，十分条件を与えることができる。

例. 2.7. 次の問題を考える. (2.2)で与えられる symbol をもつかってな perturbation $Q_s(x;x\partial)$ と任意の f に対してすべての形式解が収束するような P のクラスを求めよ。系 2.2 はこれに対する1つの解答を与えている。すなわち $\Sigma_0(P,m-s)=\phi$ かつ (A.1) をみたすような P が求める1つのクラスを与える。

系 2.3. (A.1) かつ $d=2$ とし $\Sigma_0(P,m-s)\cap MS(Q_s)=\phi$ (or (2.12) と $\Sigma_0'(P,m-s)\cap MS(Q_s)=\phi$) を仮定する。このとき原点の近傍で正則な任意の f に対し方程式 (2.3) のすべての形式解が収束するための必要かつ十分条件は $\rho(\mathbb{R};P)>0$ となることである。

定理 2.4. $C\subset\mathbb{N}^d$ を有限集合とする。さらに条件 (A.1) と $\Sigma_0(P,m-s)\cap MS(Q_s)=\phi$ を仮定する。このとき原点の近傍で正則であって $MS(f)\subset C+MS(Q_s)$ をみたす任意の f に対して Eq. (2.3) のすべての形式解が収束するための必要かつ十分条件は高々有限ケのをのぞいてすべての $\eta\in\mathbb{N}^d$ に対し $\det p(\eta)\neq 0$ であることである。

例2.9. もし f が多項式を成分とするベクトルであれば定理の条件を満足する。

注意2.10. a) (2.12) を仮定すれば定理2.4において Σ_0 を $\overline{\Sigma_0'}$ でおきかえることができる。

b) 定理2.4において条件(A.1)および $\Sigma_0(P, m-s) \cap MS(Q_s) = \phi$ は一般におとすことはできない。

c) ただちにわかるように (A.1) (A.3) より (A.1) および $\Sigma_0 \cap MS(Q_s) = \phi$ が従い C が有限集合であることより $\rho(C + MS(Q_s); P) = 1$ が従う。従って特に f が多項式型のときは定理2.1は定理2.4より従う。よってこの場合には定理2.4は2.1の改良になっている。

定理2.4に関連して $(P+Q_s)$ の kernel について述べておく。原点の近傍で正則な u が $\ker(P+Q_s)$ にはいるとは $(P+Q_s)u = 0$ が成立することである。このとき次が成立する。

命題2.5. 条件(A.1)と $\Sigma_0(P, m-s) \cap MS(Q_s) = \phi$ (あるいは (2.12) と $\overline{\Sigma_0'}(P, m-s) \cap MS(Q_s) = \phi$)を仮定する。このとき $\ker(P+Q_s) \neq 0$ なるための必要かつ十分条件は $\det p(\eta) = 0 \ {}^{\exists}\eta \in \mathbb{N}^d$. さらに $\ker(P+Q_s)$ が無限次限になるための必要かつ十分条件は無限

に多くの $\eta\in\mathbb{N}^d$ に対して $\det p(\eta)=0$ となることである。

これの応用を述べるために $\lambda\in\mathbb{C}$ が $P+Q_s$ の固有値であるとは $\ker(\lambda-P-Q_s)\neq 0$ なることとする。このとき次が成立する。

系 2.6. 条件 $\Sigma_0(P, m-s)\cap MS(Q_s)=\phi$ および (A.1) を ∀ m に対して仮定する。このとき $\lambda\in\mathbb{C}$ が $P+Q_s$ の固有値であるための必要かつ十分条件は $\exists\eta\in\mathbb{N}^d$ に対し $\det(p(\eta)-\lambda)=0$. λ が $P+Q_s$ の無限多重度の固有値であるための必要かつ十分条件は無限に多くの $\eta\in\mathbb{N}^d$ に対して $\det(p(\eta)-\lambda)=0$ となることである。

注意 2.11. $R=P$ or $P+Q_s$ とする。$E(R)$ を $\lambda\in\mathbb{C}$ であって λ は R の無限多重度の固有値であるか あるいは R の固有値の集積点とする。明らかに $E(R)$ は R の Fredholm 性と関連している。もし P と Q_s が系 2.6 の条件をみたせば $E(P+Q_s)=E(P)$ であることがわかる。$E(P)$ は代数方程式の根の集積点であり知ることができる。

今までのところ私たちは形式解の収束と small denominator について述べてきた。以下では収束半径に関連した結果をのべる。このために次の仮定をする。

(A.4) もし $Q_s \neq 0$ かつ $\Sigma_0(P, m-s) \neq \phi$ であれば $\gamma(\xi, \theta) \leq s - \hat{s}$ for all $\xi \in \Sigma_0(P, m-s)$, $\pm\theta \in MS(Q_s)$; ここで $\gamma = \gamma(\xi, \theta)$ は (2.10) で与えられる整数である。

$R>0$ に対して $D_R = \{x \in \mathbb{C}^d;\ |x_1| + \cdots + |x_d| < R\}$, $C \subset \mathbb{N}^d$ とする。このとき

定理 2.7. 条件 (A.1)~(A.4) を仮定する。このとき $R_0>0$ が存在して、任意の R, $0<R<R_0$ と任意の f: holomorphic in D_R で $MS(f) \subset C + MS(Q_s)$ に対し方程式 (2.3) のすべての形式解が D_R で正則であるための必要十分条件は $\rho(C + MS(Q_s); P) = 1$ かつ $\det p(\eta) \neq 0$ $\forall \eta \in \mathbb{N}^d$ except for finite number of η's が成立することである。

注意 2.12. a) (2.12) を仮定すれば Σ_0 を $\overline{\Sigma_0'}$ でおきかえてもよい。

b) (A.1) および $\hat{s} < s$ を仮定し $a_{mN-\hat{s}}(\xi) = 0$

がある $\xi \in R_+{}^d$, $\xi > 0$ に対して成立しているとする。このとき 曲面 $\phi(x) \equiv |x_1| + \cdots + |x_d| = R$ $(R > 0)$ は $|x_j| = \xi_j$ $(1 \leq j \leq d)$ をみたす点 x で $P + Q_\Delta$ に対して特性的である。すなわち $\det P((x(\partial\phi/\partial x))\Big|_{|x_j|=\xi_j} = 0$. 従って 定理 2.7 で考えている問題の中には 特性面を通しての解析接続の問題も含まれる。上述の定理はこれができるための1つの diophantus 的な必要十分条件を与えている。

<u>系 2.8.</u> (A.1) と $\Sigma_0(P, m-\Delta) = \phi$ (or (2.12) と $\Sigma_0'(P, m-\Delta) = \phi$) を仮定する。このとき $R_0 > 0$ が存在して $0 < {}^\forall R < R_0$ と $(P+Q_S)u$ が D_R で正則となるような任意の形式的巾級数 u に対し u は収束して D_R で正則となる。

§3. σ_ξ と $\rho(A;P)$ の基本的性質

$a_{mN}(\eta)$ を $\det P(\eta)$ の mN 次斉次部分とするとき $P(\eta)$ が $\eta = \xi$ で elliptic であるとは $a_{mN}(\xi) \neq 0$ である。

<u>Lemma 3.1.</u> $\sigma_\xi = m \Leftrightarrow P$ が ξ で elliptic

さらに P が ξ で elliptic でなければ $\sigma_\xi \leq m-1$.

<u>注意 3.1.</u> この lemma により $\Sigma_0(P, m)$ は 特性集合と一致することがわかる。

$\xi \in \mathbb{R}_+^d$, $|\xi|=1$ $g_j(\eta,\rho)$ を(2.7)で与えられるとする。このとき次の条件を考える。

(C.1) $g_j(\xi,0)=0$ をみたす g_j に対し $\exists \Gamma(\xi)$; ξ の conical nbd. と $C>0$, ρ_j, $-\infty<\rho_j\le 1$ が存在して $|g_j(\eta,1)|\ge C(1+|\eta|)^{\rho_j}$ $\forall \eta\in\Gamma(\xi)\cap\mathbb{N}^d$ が成立する。

(C.2) $g_j(\xi,0)=0$ をみたす g_j に対し 関数 $g_j(\eta,\rho)$ は $\rho=0$, $\eta=\xi$ の近傍でなめらかである.

このとき次の命題が成立する.

命題3.2 a) (C.1)を仮定する. このとき

$$\sigma_\xi \ge m-\tilde{\delta}-\sum{}^*(1-\rho_j)m_j$$

ここで $\sum^*$ は $g_j(\xi,0)=0$ なる j についての和である。

b) (C.1)と(C.2)を仮定する。このとき

$$\sigma_\xi = m-\tilde{\delta}-\sum{}^* m_j.$$

例3.2. Hypoelliptic の場合. この場合 $\exists \rho>0$ が存在して $\rho_j\ge\rho$ が成立している. (Taylor の本参照). 従って $\sigma_\xi\ge m-\tilde{\delta}-(1-\rho)\sum^* m_j$

例3.3. simple characteristic の場合も (C.1)をみたすような適当な条件下で $\sigma_\xi=m-1$ となる。

次に $d=2$ であって m,n, $n<m$ に対して $P(\eta)$ が次の形をしているとき σ_ξ をきめる.

(3.1) $$P(\eta)=p_m(\eta)+p_n(\eta)$$

ここで $P_m(\eta)$ と $P_n(\eta)$ は (2.1) でそれぞれ $|\alpha| = m + s_j - s_k$
$|\alpha| \le n + s_j - s_k$ としたもので与えられ $\det P_m(\eta) \ne 0$ とする。
$\omega > 0$, $t \in \mathbb{C}$ に対して集合 $F_\omega(t)$ を次で定義する。

(3.2) $F_\omega(t) = \left\{ \begin{array}{l} \{\mu^\omega(\nu/\mu - t)\}_{\nu,\mu \in \mathbb{N}} \text{ の } \nu, \mu \to \infty \text{ のときの} \\ \text{すべての集積値} \end{array} \right\}$

このとき次が成立する。

<u>命題 3.3.</u> $d = 2$ であって (3.1) を仮定する。このとき

a) $\xi = (1, 0)$ あるいは $(0, 1)$ のとき、$\sigma_\xi = m$ あるいは $\sigma_\xi \le n$ が成立する。

b) $\xi \ne (1,0), (0,1)$ のとき。$n < \sigma < m$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ とする。このとき $\sigma_\xi = \sigma \Leftrightarrow \det P_m((\xi_1/\xi_2, 1)) = 0$ かつ集合 $F_{(m-\tau)/m_0}(\xi_1/\xi_2) \ni 0$ ($\forall \tau > \sigma$); $\not\ni 0$ ($n < \forall \tau < \sigma$)。ここで m_0 は $t = \xi_1/\xi_2$ の方程式 $\det P_m(t, 1) = 0$ の多重度である。

<u>注意 3.4.</u> $F_\omega(t)$ は連分数を用いて解析することができる。ここではこれが 0 を含むか否かということについての結果をまとめておこう。$t > 0$ で有理数あるいは $t > 0$ で $0 < \omega < 2$ の場合は $F_\omega(t) \ni 0$。他方 $\omega \ge 2$ で t が irrational のときは t を連分数に展開する。$t = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. ここで

(3.3) $a_0=[t], \alpha_0=t-a_0, \alpha_1=1/\alpha_0, a_1=[\alpha_1], 1/\alpha_2=\alpha_1-a_1, a_2=[\alpha_2], \ldots, a_n=[\alpha_n], 1/\alpha_{n+1}=\alpha_n-a_n; \cdots;$ ここで $[s]$ は s をこえない最大の整数. 次に ν_n, μ_n $(n=1, 2,\ldots)$ を次によって定義する.

(3.4) $\nu_{n+2}=a_n\nu_{n+1}+\nu_n; \quad \mu_{n+2}=a_n\mu_{n+1}+\mu_n$

ここで $\nu_1=0, \nu_2=1; \mu_1=1, \mu_2=0$. このとき次が成立する $F_\omega(t)$ $(\omega>2)$ が 0を含むための必要かつ十分条件は $\liminf_{n\to\infty} \mu_n^{\omega-2}/a_{n-1}=0$. さらに $\exists E\subset[0,\infty)$ でルベク測度0なるものが存在して $F_\omega(t)\not\ni 0$ for all $t\notin E$ かつ $\omega>2$. が成立する.

<u>Lemma 3.4.</u> σ_ξ は $\xi\in\mathbb{R}_+^d$ の関数として下半連続である。

<u>Lemma 3.5.</u> $\rho(A;P)$は次の性質をもつ.

a). $0\le \rho(A;P)\le 1$ for any $A\subset\mathbb{R}_+{}^d$.

b). もし $\rho(A,P-\lambda)=0$ for some $\lambda\in\mathbb{C}$ ならば $P(\eta)$ の固有値は $|\eta|\to\infty, \eta\in A\cap\mathbb{N}^d$ のとき λ に集積する。もしそうでなければ $\rho(A;P-\lambda)=1$.

c) $A=\bigcup_{k=1}^{k_0} A_k$ のとき $\rho(A;P)=\min_{1\le k\le k_0}\rho(A_k;P)$.

次に $P(\eta)$ が invertible のとき次のようにおく。

(3.5) $\quad P(\eta)^{-1} = \left(p^{ij}(\eta)\right)_{\substack{i\downarrow 1,\dots,N \\ j\to 1,\dots,N}} \; ; \; \|P(\eta)^{-1}\| = \max_{1\le i,j\le N} \|p^{ij}(\eta)\|.$

<u>Lemma 3.6.</u> 任意の $A \subset \mathbb{R}^d$ に対し もし $\det P(\eta)$ が高々有限ケの $\eta \in A \cap \mathbb{N}^d$ をのぞいて 0 にならないならば

(3.6) $\quad \rho(A;P) = \left(\limsup_{|\eta|\to\infty,\ \eta\in A\cap\mathbb{N}^d} \|P(\eta)^{-1}\|^{1/|\eta|} \right)^{-1}$

その他の場合は $\rho(A;P) = 0$.

<u>Remark 3.5.</u> $P(\eta)^{-1} = \mathrm{co}\,P(\eta)/\det P(\eta)$ を (3.6) に代入し $\mathrm{co}\,P(\eta)$ は高々多項式の増大度であることに注意すれば $\quad \rho(A;P) \ge \liminf_{|\eta|\to\infty,\ \eta\in A\cap\mathbb{N}^d} |\det P(\eta)|^{1/|\eta|}$.

この不等式は A が cone $\Gamma = \{r\xi \,;\, r>0,\ \sigma_\xi > -\infty\}$ の中に含まれているときには有効である。

<u>例 3.6.</u> $\sigma_\xi > -\infty$ であれば ξ の十分小さな conical nbd. Γ_ξ が存在して $\rho(\Gamma_\xi;P) = 1$. 特に $\Sigma_0 = \phi$ であれば $\rho(\mathbb{N}^d;P) = 1$ である。又 $P = \partial_1 - \tau\partial_2$ とすれば $\xi = (\tau, 1)$ $\sigma_\xi > -\infty \Leftrightarrow \tau$ が Liouville number でない.

<u>例 3.7.</u> $\Sigma_0 \cap MS(Q_s) = \phi$ とする. このとき任意の有限集合 $C \subset \mathbb{N}^d$ に対して $\rho(C + MS(Q_0);P) = 1$ である.

$\sigma_\xi = -\infty$ の場合の解析をするために次の Lemma を準備しておく。

<u>Lemma 3.7.</u> $\sigma_\xi = -\infty$ をみたす各 ξ に対して $s \in \mathbb{R}$ ξの錐近傍 Γ_ξ, $^\exists g_{ij}(\eta)$ $(1 \le i, j \le N)$ co$P(\eta)$の成分が存在して 次が成立すると仮定する.

$$(3.7) \qquad \liminf_{|\eta| \to \infty,\ \eta \in \Gamma(\xi) \cap \mathbb{N}^d} |\eta|^{-s} |g_{ij}(\eta)| > 0.$$

そのとき

$$(3.8) \qquad \rho(A;P) = \liminf_{|\eta| \to \infty,\ \eta \in A \cap \mathbb{N}^d} |\det P(\eta)|^{1/|\eta|}.$$

<u>例 3.8</u>. N=1 の場合が条件(3.7)を満たす最も簡単な例である.

<u>Lemma 3.8</u>. $d=2$と仮定する。このとき

$\rho(A;P) > 0$ (resp. $=1$) $\Leftrightarrow$ (3.8)の右辺が >0 (resp. $=1$).

<u>注意 3.9.</u> $\rho(A;P)$ は Leray によって導入された補助関数の一般化であることを示しておこう。このため $d=2$ かつ $P = P_m$: *homogeneous* とする. $\det P(\eta) = C\eta^\alpha \prod_j (\eta_1 - \tau_j \eta_2)^{m_j}$ ($\alpha \in \mathbb{N}^2$; C, τ_j *constants*, $\tau_j \neq 0$; $m_j \ge 1$ *integer*) としこれを(3.8)に代入する。そのとき もし 無限に多くの $\eta \in A \cap \mathbb{N}^d$ に対して $\eta^\alpha = 0$ となったとすれば $\rho(A;P) = 0$ である。そうでなければ $\rho(A;P) = \min_{j, \tau_j > 0} \tilde{\rho}(A;\tau_j)^{m_j/(1+\tau_j)}$. ここで

$$\tilde{\rho}(A;t) = \liminf_{\nu,\mu\to\infty,\ (\nu,\mu)\in A\cap\mathbb{N}^2} |\nu - t\mu|^{1/\mu}$$

$\tilde{\rho}(\mathbb{N}^2;t)$ はグルサー問題の Fredholm 性の研究に関連して J. Leray によって導入され　　Leray および Pisot によって研究されている。(3.3) (3.4) によれば、

$$\tilde{\rho}(\mathbb{N}^2;t) = \liminf_{n\to\infty} a_n^{-1/\mu_{n+1}}$$

であることがわかっている。(3.8) によれば $\det p(\eta) \sim e(\eta)|\eta - \xi(\eta_1+\cdots+\eta_d)|^c$ ここで $n>0$, $e(\eta)\neq 0$ なるものにすれば さらに高次元の一般化された Leray の補助関数が得られる。

1984. 12/27　都立大.
〒158　世田谷区 深沢 2-1-1
都立大学理学部数学教室