数理解析研究所講究録
第 558 巻 1985 年 218-235

準斉次半線型偏微分方程式の解のなめらかさの伝播について

東大 教養　桜井 力 (Tsutomu Sakurai)

非線型方程式に対する超局所解析といえる最初の仕事は Rauch [10] によってなされた。Rauch は積に関する micro-local 評価を用い，半線型波動方程式の古典解に対して特異性の伝播定理を証明した。その後，Bony [1] はもっと一般の非線型方程式を扱い，非特性点及び実の単純特性点における解のなめらかさについて考察した。[1] において，Bony の導入した paradifferential operator は関数の Littlewood-Paley 分解に基礎をおくものであり，非線型超局所解析において有効に用いられている。Bony の結果はさらに Mayer [8], [9] により改良された。また，Littlewood-Paley の理論は Coifman-Mayer [3] や Bourdaud [2] において擬微分作用素の L^p 有界性の証明にも応用されている。

さて，ここで論ずる微分方程式はその Symbol が座標変数ごとに異なる重みの下で斉次性を持つもの（準斉次）である。

このような斉次性を持った擬微分作用素は Hörmander [4] 熊ノ郷 (cf. [6]) らによって以前から扱われていたが、超局所解析を展開したのは Lascar [7] が最初と思われる。

最近、山崎 [12], [13], [14], [15] は paradifferential operator の理論を準斉次な作用素に拡張し、その有界性をさまざまな空間において考察している。さらに彼は、その結果を非線型方程式の超局所解析に応用し、非特性点における正則性定理を証明している。

ここで、我々は準斉次 paradifferential operator の理論を実の単純特性点における解のなめらかさを調べることに応用する。そして、準斉次な主 symbol を持つ半線型方程式に対して、解のなめらかさが陪特性帯にそって伝播することを示す。

さて、結果を述べるにあたり、いくつかの定義を与えておこう。

<u>* Weight</u>

$M = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$; $\inf\{\mu_j\} = 1$ をみたす実数を成分とする multi-index で、symbol の準斉次性を表わす。

$$t^M \xi = (t^{\mu_1}\xi_1, \cdots, t^{\mu_n}\xi_n) \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

と定める．$\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_n \setminus 0)$ で定義された関数 g が m 次準斉次とは，任意の $t > 0$ に対して

$$g(x, t^M \xi) = t^m g(x, \xi)$$

をみたすこととする．また $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_n \setminus 0)$ は，任意の $t > 0$ に対して，$(x, \xi) \in \Gamma$ ならば $(x, t^M \xi) \in \Gamma$ となるとき，M-cone と呼ばれる．

* weight function

$[\xi]_M$：$|\xi| = 1$ において $[\xi]_M = 1$ となる 1 次準斉次な関数，但し $[0]_M = 0$ と定める．

注．$[\xi]_M$ は次の性質を持つ．

i) $[\xi]_M \in C^\infty(\mathbb{R}_n \setminus 0) \cap C(\mathbb{R}_n)$

ii) 任意の $\alpha \in \mathbb{N}^n$ に対し C_α が存在し $[\xi]_M \geqq 1$ において

$$|\partial_\xi^\alpha [\xi]_M| \leqq C_\alpha [\xi]_M^{1 - \langle \alpha, M \rangle}$$

をみたす．但し $\langle \alpha, M \rangle = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \mu_j$ である．

iii) $[\xi + \eta]_M \leqq [\xi]_M + [\eta]_M$

iv) $(1 + [\xi]_M)^{-s} \in L^2(\mathbb{R}_n)$ となるのは $s > \frac{|M|}{2}$ のとき，またその時に限る．但し $|M| = \sum_{j=0}^{n} \mu_j$．

* 擬微分作用素

Ω を $\mathbb{R}^n$ の open set とする．$m \in \mathbb{R}$，$0 \leqq \delta \leqq \rho \leqq 1$ に対し，Symbol class $S_{\rho, \delta}^{M, m}(\Omega)$ を次のように定める：

<u>定義 1</u>　$p(x,\xi) \in S^{M,m}_{\rho,\delta}(\Omega)$

$\Longleftrightarrow$ i) $p(x,\xi) \in C^{\infty}(\Omega \times R_n)$,

ii) $\forall \alpha, \forall \beta \in N^n$, $\forall K \subset\subset \Omega$. $\exists C_{\alpha,\beta,K}$ s.t.

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi)| \leqq C_{\alpha,\beta,K}(1+[\xi]_M)^{m-\rho\langle\alpha,M\rangle+\delta\langle\beta,M\rangle}.$$

$\Omega = R_n$ で上の定義において ii) の評価が R^n で一様にみたされるような関数の集合は $S^{M,m}_{\rho,\delta}$ と記す。

さて，$p \in S^{M,m}_{\rho,\delta}(\Omega)$，$u \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し，

$$p(x,D)u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i\langle x,\xi\rangle} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi.$$

と定義し，M-擬微分作用素と呼ぶ。ここに $\hat{u}$ は u の Fourier 変換である。

<u>定義 2</u>　$p \in S^{M,m}_{1,0}$ が classical symbol であるとは，m_j 次準斉次な関数 p_{m_j} による次の漸近展開を持つときである：

$$p(x,\xi) \sim p_m(x,\xi) + p_{m_1}(x,\xi) + p_{m_2}(x,\xi) + \cdots$$

但し，$m-1 \geqq m_1 > m_2 > \cdots \longrightarrow -\infty$。このとき，$p_m$ を主 Symbol と呼ぶ。

<u>定義 3</u> 実数値関数 $p(x,\xi) \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0))$ に対し，

i) $\mathcal{H}_p^M \underset{\text{def}}{=} \sum_{\xi M_j = 1} (\partial_{\xi_j} p \, \partial_{x_j} - \partial_{x_j} p \, \partial_{\xi_j})$,

ii) $\mathcal{H}_p^M$ の積分曲線を <u>陪特性帯</u> と呼ぶ．

<u>* weighted Sobolev 空間</u>

解のなめらかさを測るため Sobolev 空間 H_M^s を次で定める

<u>定義 4</u>. $u \in H_M^s$

$$\Longleftrightarrow \quad \|u\|_{M,s} \underset{\text{def}}{=} \left(\int (1 + [\xi]_M)^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

超局所化は M-cone を用いてなされる．

<u>定義 5</u>. $u \in H_M^s(\mathring{x}, \mathring{\xi})$, $(\mathring{x}, \mathring{\xi}) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$

$\Longleftrightarrow \quad {}^\exists \chi \in C_0^\infty(\Omega)$, ${}^\exists a(x,\xi) \in S_{1,0}^{M,0}$, s.t.

$$\chi(\mathring{x}) \neq 0 \; ; \; a(\mathring{x}, \mathring{\xi}) \neq 0,$$

$$a(x,D)\chi u \in H_M^s.$$

以上の準備のもとで主定理を述べる．

$P = p(x,D)$ は m 次の classical M-擬微分作用素で，p_m は実数値 かつ $\mathcal{H}_{p_m}^M \neq 0$ on $p_m^{-1}(0)$ をみたすものとする．非線型項 $F(u, D^\alpha u) = F(x; u, \cdots, D^\alpha u, \cdots)$

は $\langle\alpha, M\rangle \leq m-1$ なる微分 $D^\alpha u$ のみを含み、x について C^∞ かつ、$u, D^\alpha u$ については holomorphic な関数であるものとする。

Ω を $\mathbb{R}^n$ の open set として次の半線型方程式を考える

$$(A) \qquad Pu + F(u, D^\alpha u) = 0, \quad \text{in } \Omega.$$

我々の主定理は次のものである。

<u>定理 A</u> $s > \frac{1}{2}|M| + (m-1)$, $\sigma \leq s - \frac{1}{2}|M| - (m-1)$ とする。(A) の解 u が Ω で局所的に H^s_M に属し、さらに $(\mathring{x}, \mathring{\xi}) \in P_m^{-1}(0)$ において $\mathcal{H}^{s+\sigma}_M$ に属するならば、u は $(\mathring{x}, \mathring{\xi})$ を通る P_m の陪特性帯にそって $\mathcal{H}^{s+\sigma}_M$ に属する。

もし F が低階の微分 $D^\alpha u$ しか含んでいないなら、定理 A の結果は次のように改善される。

<u>定理 A'</u> 上において F は $\langle\alpha, M\rangle \leq m-j$ なる微分 $D^\alpha u$ にのみ依存するとせよ；但し j は実数で $j > 1$ を予たす。その時、$s > \frac{1}{2}|M| + (m-j)$, $\sigma \leq s - \frac{1}{2}|M| - (m-j) + (j-1)$ に対して定理 A の主張がそのまま成り立つ。

同時に我々は具体的な方程式として半線型 Schrödinger 方程式をとりあげて考察した。

$-i\partial_t - \Delta_x$ を $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$ における Schrödinger 作用素とする。ここで $\Delta_x = \sum_{j=1}^{n} \partial^2/\partial x_j^2$ である。その Symbol $p = \tau + |\xi|^2$ は実数値で、$M = (2, 1, \cdots, 1)$ととることにより $S^{M,2}_{1,0}$ に入る。この時 $H^M_p = 2\sum_{j=0}^{n} \xi_j \partial x_j$ となるので、Schrödinger 作用素の陪特性帯は $t =$ constant 内の直線となることに注意しよう。非線型項としては次のものを考える: $F(u,\bar{u}) = F(t, x; u, \bar{u}) \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{C}^2)$, u, $\bar{u}$ については holomorphic.
Ω を $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$ の open set とし次の方程式を考える

(B) $\quad -i\partial_t u - \Delta_x u = F(u, \bar{u})$, in Ω.

$|M| = n+2$ となることに注意し、次を得る。

<u>定理 B</u> $\quad s > \frac{1}{2}(n+2)$, $\sigma \leqq s - \frac{1}{2}(n+2)$ とする。(B) の解 u が Ω で局所的に H^s_M に属し、さらに $(\mathring{t}, \mathring{x}, \mathring{\tau}, \mathring{\xi}) \in p^{-1}(0)$ において $H^{s+\sigma+1}_M$ に属するならば u は $(\mathring{t}, \mathring{x}, \mathring{\tau}, \mathring{\xi})$ を通る陪特性帯にそって $H^{s+\sigma+1}_M$ に属す。

§1. 準斉次擬微分作用素

まず，M−擬微分作用素の性質についてまとめておく．

<u>命題 1-1</u>　$P \in Op\, S^{M.m}_{\rho.\delta}$; $m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$, $\delta < 1$.

$P : \mathcal{H}^{s}_{M} \longrightarrow \mathcal{H}^{s-m}_{M}$ は連続

Classical な M-擬微分作用素の結合は漸近展開を用いて，斉次な場合と同様に計算されるが．特に交換子については次が成立する．

<u>命題 1-2</u>　$p \in S^{M.m}_{1.0}$　$p' \in S^{M.m'}_{1.0}$ を classical symbol．また p_m, $p'_{m'}$ をその主 symbol とする．その時．

$$[\,p(x.D),\ p'(x.D)\,] + i\{p_m, p'_{m'}\}_M(x.D) \in Op\, S^{M,\, m+m'-}_{1.0}$$

但し．$\{p_m . p'_{m'}\}_M = H^{M}_{p_m}(p'_{m})$ ，

$M = (\mu_1 \cdots \mu_n)$ に対して．$\nu = \inf(\{\mu_j - 1;\ \mu_j > 1\} \cup$

<u>命題 1-3</u>　P を m 次 classical M-擬微分作用素とする．

そのとき，

$P(x.D)u \in \mathcal{H}^{s}_{M}(x.\xi)$ かつ $p_m(x.\xi) \neq 0$

$$\Longrightarrow \quad u \in \mathcal{H}_M^{s+m}(x, \xi)$$

エネルギー評価において重要な役割をはたす．Sharp Gårding 不等式は準斉次な場合へ拡張できる．

<u>命題 1-4</u>　$p \in S_{1,0}^{M,m}$: classical とする．そのとき．

$$\operatorname{Re} p_m(x, \xi) \geqq 0$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists C \\ \operatorname{Re}(p(x,D)u, u) \geqq -C\|u\|^2_{M,(m-1)/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty \end{array} \right.$$

命題 1-2，1-4 を用いれば．Hörmander [5]．Proposition 3.5.1 と同様にして．次が証明される．

<u>命題 1-5</u>　$p \in S_{1,0}^{M,m}(\Omega)$ classical symbol とする．$I \ni t \longmapsto \gamma(t) \in \Omega \times (\mathbb{R}_n \setminus 0)$ を．$\operatorname{Re} p_m$ に対する零陪特性帯とするとき．$(I = [t_1, t_2])$　$\gamma(I)$ の近傍で．$\operatorname{Im} p_m \geqq 0$ が成立していると仮定する．その時．

$$p(x,D)u \in \mathcal{H}_M^s(\gamma(I)) \text{ かつ } u \in \mathcal{H}_M^{s+m-1}(\gamma(t_2))$$

$$\Longrightarrow \quad u \in \mathcal{H}_M^{s+m-1}(\gamma(I))$$

§2. paraproduct, paradifferential operator

ここでは，Bony（有次な場合）Yamazaki（準有次）により導入された paraproduct 及び paradifferential operator の定義を与え．主定理の証明で必要となる性質を Yamazaki [12]～[15] より引用する．

$$\varphi \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+}) \qquad \begin{cases} \varphi(t) = 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(t) = 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

を一つ固定し．

$$\varphi_k^M(\xi) = \varphi([\xi]_M/2^k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\phi_k^M(\xi) = \varphi([\xi]_M/2^k) - \varphi([\xi]_M/2^{k-1}), \quad k = 1, 2, \cdots$$

とおく．そして $f \in \mathcal{S}'$ に対し

$$S_k(f) = \varphi_k^M(D) f$$

$$\Delta_k(f) = \phi_k^M(D) f$$

と定義する．すると，

$$f = S_0(f) + \sum_{k=1}^\infty \Delta_k(f)$$

となる．これを f の Littlewood Paley 分解と呼ぶ．この分解を用いて paraproduct $\pi(u, v)$ は次のように定義された．

定義 2-1. $u, v \in \mathcal{S}'$ とする.

$$\pi(u, v) \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=6}^{\infty} S_{k-6}(u) \Delta_k(v).$$

注. もし $u \in L^\infty$ なら. 容易にわかるように

$$\pi(u, \cdot) : H^s_M \to H^s_M$$

は任意の s について連続となる.

応用上. para product の重要な性質は. 次の結果である.

命題 2-2 (Yamazaki) $F = F(x; U_1, \cdots U_N) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^N)$, さらに $U_1 \cdots U_N$ につき正則とする.

また $u_1(x), \cdots u_N(x) \in H^s_M$, $s > \frac{|M|}{2}$.

このとき.

$$F(x; u_1(x), \cdots u_N(x)) \in H^s_{M, loc}(\mathbb{R}^n)$$

さらに.

$$F(x; u_1(x), \cdots u_N(x))$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \pi(\partial_{U_j} F(x; u_1(x), \cdots u_N(x)), u_j(x)) + G(x).$$

となる. 但し. $G \in H^{2s - \frac{|M|}{2}}_{M, loc}(\mathbb{R}^n)$.

次に paradifferential operator の symbol class を山崎にしたがった形で定義する.

<u>定義 2-3.</u> $r \geqq 0$ とする.

(i) $l = l(x,\xi) \in \Sigma_r^{M,m}$

$\Longleftrightarrow$ $\forall \alpha$, $\exists C_\alpha$ s.t.

$$\| \partial_\xi^\alpha l(x,\xi) \|_{H_M^{\frac{|M|}{2}+r}(dx)} \leqq C_\alpha (1+[\xi]_M)^{m-\langle \alpha, M \rangle}$$

(ii) $l \in \Sigma_r^{M,m}$ に対して $\pi(l(x,D), u)$ を

$$\pi(l(x,D), u)(x) = (2\pi)^{-2n} \iint e^{i\langle x, \eta+\xi \rangle} \theta(\eta,\xi) \hat{l}(\eta,\xi) \hat{u}(\xi)\, d\eta\, d\xi$$

で定義する. ここに

$$\hat{l}(\eta,\xi) = \int e^{-i\langle x,\eta \rangle} l(x,\xi)\, dx$$

$$\theta(\eta,\xi) = \sum_{k=6}^{\infty} \varphi_{k-6}^M(\eta)\, \phi_k^M(\xi).$$

$\pi(l(x,D)\cdot)$ の連続性は山崎[14]でくわしく調べられている. 我々の必要とするのは, 次である.

<u>命題 2-4.</u> $l \in \Sigma_r^{M,m}$ とする.

(i) $r > 0 \Longrightarrow \pi(l(x,D),\cdot) : H_M^s \to H_M^{s-m}$ は連続.

(ii) $r=0 \implies \pi(l(x,D),\cdot): H_M^{s+\varepsilon} \to H_M^{s-m}$ 連続 for $\forall \varepsilon>0$

さて，$l(x,\xi) \in \Sigma_r^{M,m}$，$l'(x,\xi) \in \Sigma_r^{M,m'}$ $(r>0)$ に対し，

$$m(x,\xi) = \sum_{\langle\alpha,M\rangle \leqq r} \frac{(-i)^\alpha}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha l(x,\xi)\, \partial_x^\alpha l'(x,\xi)$$

とおく．

<u>命題 2-5</u> (Theorem A in Yamazaki [15])

$$G(u) = \pi(m(x,D),u) - \pi(l(x,D), \pi(l'(x,D),u))$$

と定めると，任意の s について

$G: H_M^s \to H_M^{s+r}$ は連続．

<u>定義 2-6</u> $\mathcal{L} \in Op\Sigma_r^{M,m}$

$\iff \exists\, l(x,\xi) \in \Sigma_r^{M,m}$, s.t.

$\mathcal{L} = \pi(l(x,D),\cdot) + R$.

ただし，R は r regularizing すなわち

$R: H_M^s \longrightarrow H_M^{s+r}$ 連続 for ${}^\forall s \in \mathbb{R}$.

<u>注</u>．容易にわかるように $p \in S_r^{M,m}$ なる $p(x,D) =$

$\pi(p(x,D),\cdot)$ + smoothing. ゆえに

$$p(x,D)\in Op\,\Sigma_r^{M,m},\quad \forall r\in\mathbb{R}$$

である.

<u>系 2-7.</u> $\mathcal{L}\in Op\,\Sigma_r^{M,m}$, $\mathcal{L}'\in Op\,\Sigma_r^{M,m'}$ $(r>0)$

$$\Rightarrow [\mathcal{L},\mathcal{L}']\in Op\,\Sigma_{r-1}^{M,m+m'-1}\quad \text{if } r\geq 1$$

or

$[\mathcal{L},\mathcal{L}']$ は $r-m-m'$ regularizing.

§3. 主定理の証明

<u>定理Aの証明の概略</u>

$$Pu+F(u,D^\alpha u)=0 \quad \text{in } \Omega.$$

$$u\in H^s_{M,loc}(\Omega)\quad \left(s>(m-1)+\frac{|M|}{2}\right)$$

定理の主張は局所的であるから一般性を失うことなく

$P\in Op\,S^{M,m}_{1,0}$, supp $F(x;u(x)\cdots D^\alpha u(x),\cdots)\subset\subset\Omega$.

$u\in H^s_M\cap\mathcal{E}'(\Omega)$ と仮定してよい.

$r=s-(m-1)-|M|/2$ とおけば

(*) $F'_\alpha(u,D^\alpha u)\equiv\dfrac{\partial F}{\partial(D^\alpha u)}(x;u(x),\cdots,D^\alpha u,\cdots)\in H_M^{r+\frac{|M|}{2}}$

また、命題 2-2 より、

$$F(u, D^\alpha u) = \sum_\alpha \pi(F'_\alpha(u, D^\alpha u), D^\alpha u) + g,$$

但し、 $g \in \mathcal{H}_M^{2(s-(m-1))-\frac{|M|}{2}} \quad (= \mathcal{H}_M^{s-(m-1)+r})$.

ゆえに、 $l = F'_\alpha(u(x), D^\alpha u(x)) \cdot \xi^\alpha$ とおくと

$l(x, \xi) \in \Sigma_r^{M, m-1}$ となることがわかる。

さて、

$$v(x) = (1 + [D]_M)^{m-1} u(x),$$

$$P_1 = P \circ (1 + [D]_M)^{1-m},$$

$$\mathcal{L} = \pi(l, \cdot)(1 + [D]_M)^{1-m},$$

とおくと、

$$(P_1 + \mathcal{L}) v = g \in \mathcal{H}_M^{s-(m-1)+r}$$

$$v \in H_M^{s-(m-1)+r}(\mathring{x}, \mathring{\xi}) \cap H_M^{s-(m-1)}.$$

定理 A は、次の命題より直ちに従う。

<u>命題 3-1</u>　$P \in Op\, S_{1,0}^{M,1}$ classical, $\mathcal{L} \in Op\, \Sigma_r^{M,0}$

$r > 0$, また $\rho > 0$ とする。p_1 を主 symbol として、

$I \ni t \longrightarrow \gamma(t)$ なる $\mathrm{Re}\, p_1$ の零陪特性帯 $(I = [t_1, t_2])$

の近傍で、$\mathrm{Im}\, p_1 \geq 0$ をみたすと仮定する。

このとき.

$$(\mathcal{P}+\mathcal{L})v \in H^{\rho}_{M}(\gamma(I))$$

かつ $\quad v \in H^{\rho}_{M}(\gamma(I_2)) \cap H^{\rho-r}_{M}$

$$\Longrightarrow \quad v \in H^{\rho}_{M}(\gamma(I)).$$

この命題は. Hörmander [5] Prop 3.5.1 の方法にしたがい、超局所エネルギー評価を導びくことによって. 証明される.

定理 A′ と B については. 次の補題が用いられる.

<u>補題.3-2.</u> $F(x; U_1 \cdots U_N) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^N)$, $U_1 - U_N$ につき正則. また. $s > \frac{|M|}{2}$, $\sigma \leqq s - \frac{|M|}{2}$ に対し. $u \in H^{s}_{M.loc}(\Omega) \cap H^{s+\sigma}_{M}(\mathring{x}.\mathring{\xi})$ とする. その時.

$$F(x; u_1(x), \cdots u_N(x)) \in H^{s}_{M.loc}(\Omega) \cap H^{s+\sigma}_{M}(\mathring{x}.\mathring{\xi})$$

となる.

定理 A′ は、命題 1-5 を用いた. 単純な bootstrap argument により. 証明される. 定理 B については さらに. Schrödinger 作用素の零陪特性帯の antipodal が. 非特性点よりなることに注意すればよい.

References

[1] Bony, J. M., Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4^e série, 14 (1981), 209-246.

[2] Bourdaud, G., L^p-estimates for certain non-regular pseudo-differential operators, Comm. Partial Diff. Eq., 7(1982), 1023-1033.

[3] Coifman, R. R. and Mayer, Y., Au delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque 57, Soc. Math. France, Paris, 1978.

[4] Hörmander, L., Pseudo-differential operators and hypo-elliptic equation, Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math., 10(1966), Singular Intagral Operators, 138-183.

[5] —————— , On the existence and the regularity of solution of linear pseudo-differential equations, L'Enseignement Math., 17(1971), 99-163.

[6] Kumano-go, H., Pseudo-differential operators, MIT press, Cambridge-Massachusetts-London, England, 1984.

[7] Lascar, R., Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-différentielles quasi homogènes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 27(1977), 79-123.

[8] Mayer, Y., Remarque sur un théorème de J. M. Bony, Supplemento ai rendiconti del Circolo matematico di Palermo, atti del Seminario di Analisi Armonica Pisa, 8-17 aprile 1980, serieII, numero 1(1981), 1-20.

[9] ――――――, Nouvelles estimations pour les solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires, Exposé VI, Séminaire Goulaouic-Schwartz '81-'82.

[10] Rauch, J. Singularities of solutions of semilinear wave equations, J. Math. Pure Appl., 58(1979), 299-308.

[11] Sakurai, T., Propagation of singularities of solutions to semilinear Schrödinger equations, Submitted to Proc. Japan Acad.

[12] Yamazaki, M., Continuite des operateurs pseudo-différentielles et para-différentielles dans les espaces de Besov et les espaces de Triebel-Lizorkin non isotropes, C. R. Acad. Sc. Paris, 296(1983), série I, 533-536.

[13] ――――――, Régularité microlocale quasi-homogène des solutions d'équations aux dérivées partielles non lineaires, C. R. Acad. Sc. Paris, 298(1984), série I, 225-228.

[14] ――――――, A quasi-homogeneous version of para-differential operators, I. Boundedness on spaces of Besov type, preprint.

[15] ――――――, ibid, II. A symbolic calculus, preprint.