

## polygram とその基本変形

神戸大教養 池田裕司 (Hiroshi Ikeda)

上智大理工 横山和夫 (Kazuo Yokoyama)

東洋大工 山下正勝 (Masakatsu Yamashita)

今回の短期共同研究における討論により得られた polygram の概念とその基本変形について、その基礎部分の大筋を述べる。[1] がその下敷になっている。なお、この概念が出てきた背景や先の展開などについては今回のいくつかの報告に見ることができるとか [2], [3], [4] も参照されたい。

### §1. cell complex と homogeneous map

記号  $\mathbb{R}^m$ :  $m$  次元 Euclidean space

$$E^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq 1\}$$

$$\dot{E}^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in E^m \mid x_1^2 + \dots + x_m^2 = 1\}$$

$$\overset{\circ}{E}^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in E^m \mid x_1^2 + \dots + x_m^2 < 1\}$$

$$E^0 = \overset{\circ}{E}^0 = \{0\}, \quad \dot{E}^0 = \emptyset$$

/

定義  $X$  を位相空間,  $\sigma$  を  $X$  の subspace とする.  $E^m$  から  $\sigma$  の上への continuous map  $\varphi$  で  $\varphi|_{\mathring{E}^m}$  は homeomorphism となるものが存在するとき  $\sigma$  を  $X$  内の  $m$ -cell といい.

用語と記号. 1. 上の  $\varphi$  を  $\sigma$  の characteristic map ということがある.

2.  $m$  を  $\dim \sigma$  と書く.

3.  $\varphi(\mathring{E}^m)$  を  $\mathring{\sigma}$ ,  $\varphi(\dot{E}^m)$  を  $\dot{\sigma}$  とあらわす.

4.  $\dim \sigma = 0$  のとき,  $\mathring{\sigma} = \emptyset$  と約束する.

定義  $X$  を位相空間,  $K$  を  $X$  内の cells  $\sigma, \sigma', \dots$  の集まりとする.  $X$  と  $K$  に対して

$$(1) \bigcup_{\sigma \in K} \mathring{\sigma} = K$$

$$(2) \sigma \neq \sigma' \Rightarrow \mathring{\sigma} \cap \mathring{\sigma}' = \emptyset$$

$$(3) \sigma \cap \sigma' \neq \emptyset \Rightarrow \exists \rho_1, \dots, \rho_j \in K;$$

$$\dim \rho_i \leq \min(\dim \sigma, \dim \sigma'), \quad i=1, \dots, j.$$

$$\sigma \cap \sigma' = \mathring{\rho}_1 \cup \dots \cup \mathring{\rho}_j$$

$$(4) \forall \sigma \in K, \exists \tau_1, \dots, \tau_k \in K;$$

$$\dim \tau_i = \dim \sigma - 1, \quad i=1, \dots, k$$

$$\mathring{\sigma} = \tau_1 \cup \dots \cup \tau_k$$

が成りたるとき  $K$  を  $X$  の 幾何的 cell 構造 といい.  $(X, K)$  を

$X$ 上の幾何的 cell complex といい。今後は  $(X, k)$  を単に  $k$  とあらわすことにするが、その場合 underlying space  $X$  は  $|k|$  とあらわすだろう。

(註1) こゝで定義した幾何的 cell complex は近代的な cell complex の概念 (たとえば [5]) に強い制限を加えたものではあるが、伝統的な (幾何的) cell complex の概念よりはるかに緩やかなものになっている。これから先、我々の幾何的 cell complex を単に cell complex と呼ぶ。

(註2) 我々の cell complex に対し、こゝで subcomplex, cellular map, cellular isomorphism などを定義すべきだが、分っているものとして割愛する ([5] などを参照すればこれらの定義の仕方などが分かるであろう)。

(註3)  $m$ -cell にはいろいろな幾何的 cell 構造が入る。2つの  $m$ -cells は一般に同相でないというのがその理由であるが、同相なもの、たとえば  $E^m$  自身にすら種々の cell 構造を持たせることができる。しかしながら cell 構造が明白な cell に対しては、位相空間としての cell と cell complex としての cell とを混同して同じ文字であらわすことにする。とくに1つの cell complex 内の各 cell は subcomplex としての構造から cell complex になっているものとする。

定義  $K, L$  を cell complex とする. continuous map  $f: |K| \rightarrow |L|$  が

- (1)  $f$  は surjective.
  - (2)  $f$  は cellular: すなわち 各  $\sigma \in K$  に対して  $f(\sigma) \in L$ .
  - (3) 各  $\sigma \in K$  に対して  $f|_{\sigma}$  は homeomorphism
- を満たすとき,  $f$  を homogeneous map と呼ぶ.

任意の  $m$ -cell  $\sigma$  ( $m \geq 1$ ) に対し,  $E^m$  の向きと characteristic map  $\varphi: E^m \rightarrow \sigma$  を指定することにより 向きも入れることができる. たとえば  $\varphi$  から induce される同型写像

$$\varphi_*: H_{m-1}(E^m - 0) \xrightarrow{\cong} H_{m-1}(\sigma - \varphi(0))$$

を利用すればよい.  $m=0$  のときはすべて正の向きと考えるやればよい. (しかしながら後では (専ら,  $m \leq 2$  の場合のみを取り扱うことになるので) 我々は矢印を用いて幾何学的に  $\sigma$  の向きを示すことになるだろう.)

cell complex  $K$  の各 cell に向きが指定されたとき,  $K$  を oriented cell complex と称するのも慣習とあり.

$K, L$  を oriented cell complex,  $f: |K| \rightarrow |L|$  を homogeneous map とする.  $f(\sigma) = f(\sigma')$  なる任意の  $m$ -cell  $\sigma, \sigma' \in K$  ( $m \geq 1$ ) について考える.

いま  $\alpha$  を  $f(\sigma) = f(\sigma') = \alpha$  なる  $m$ -cell in  $L$  とし、 $\alpha$  の内点  $q$  を勝手によぶ。このとき  $f(p) = q, f(p') = q$  なる点  $p \in \sigma, p' \in \sigma'$  が一意に定まる。さて  $f_\sigma = f|_{\sigma-p}, f_{\sigma'} = f|_{\sigma'-p'}$  から induce される  $\mathbb{Z}$  係数 homology 群の間の同型写像

$$f_{\sigma*}: H_{m-1}(\sigma-p) \xrightarrow{\cong} H_{m-1}(\alpha-q)$$

$$f_{\sigma'*}: H_{m-1}(\sigma'-p') \xrightarrow{\cong} H_{m-1}(\alpha-q)$$

から同型写像  $\Phi = f_{\sigma'*}^{-1} f_{\sigma*}^{-1} f_{\sigma*} f_{\sigma'*}$  が得られる。

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\varphi} & (\sigma, p) \\ (\dot{E}^m, 0) & & \searrow f_\sigma \\ & \xrightarrow{\varphi'} & (\sigma', p') \\ & & \nearrow f_{\sigma'} \\ & & (\alpha, q) \end{array}$$

但し  $\varphi, \varphi'$  は  $\sigma, \sigma'$  の向きを与える characteristic map (必要に応じて  $\dot{E}^m$  上で修正したもの) である。  $\Phi$  のタイプとしては 2 種類 (恒等写像と  $\pm 1$  だけのも) しかない。

定義  $\left\{ \begin{array}{l} f(\sigma) = f(\sigma') \text{ なる任意の } m\text{-cell } \sigma, \sigma' \in K \text{ (} m \geq 1 \text{) に対して,} \\ \Phi \text{ が恒等写像 であるとき } f \text{ は同調である} \end{array} \right.$

という。

Prop.  $K$  を cell complex,  $L$  を oriented cell complex,  $f: |K| \rightarrow |L|$  は homogeneous. このとき  $f$  が同調となるように  $K$  に向きを付けることができる。

## §2. diagram.

定義.  $K, L$  を oriented cell complex,  $f: |K| \rightarrow |L|$  を同調な homogeneous map とする.  $f(\sigma) = f(\sigma') = \dots$  となるような  $m$ -cells  $\sigma, \sigma', \dots \in K$ , ( $m \geq 0$ ), をすべて (向きも含めて) 同じ文字 (たとえば  $\alpha$ ) でおきかえる. このようにして  $K$  から得られた  $\Sigma$  を  $f$  から induce された  $K$  上の diagram と呼ぶ.  $f(\sigma) = f(\sigma')$  なる  $\sigma, \sigma' \in K$  は  $\Sigma$ -同値 であると呼ばれ,  $\sigma \sim_{\Sigma} \sigma'$  とあらわされる.

記号と用語 1.  $K$  の  $m$ -cells の  $\Sigma$ -同値による同値類を  $\Sigma$  の  $m$ -gram と呼ぶ. 1 かし我々は  $\Sigma$ -同値な  $\sigma, \sigma', \dots$  を等しい文字, たとえば  $\alpha$ , でおきかえた一つのものを  $m$ -gram と呼ぶ; ことが多くある.

2.  $K$  の  $m$ -cells の  $\Sigma$ -同値類  $\alpha$  の元の個数 (=  $\Sigma$  内に現れる  $m$ -gram  $\alpha$  の個数) を  $\alpha$  の 重複度 と呼ぶ.  $\mu(\alpha)$  とあらわす.

3.  $f$  を  $\Sigma$  の 実現 という.

4.  $K$  を  $[\Sigma]$  と表すことがある. ( $\Sigma$  は  $K$  の構造を壊してはいないので,  $\Sigma$ -同値なものすべて異なる文字であらわせば  $K$  (と cellular 同型な cell complex) が復元できる.)

定義  $\Sigma$  が diagram

$\Leftrightarrow \exists L: \text{oriented cell complex}$   
 $\exists f: |\Sigma| \rightarrow |L|$ , 同調な homogeneous map  
 $\Sigma$  は  $f$  から induce された  $[\Sigma]$  上の diagram

(注意)  $f: |\Sigma| \rightarrow |L|$ ,  $f': |\Sigma| \rightarrow |L'|$  が  $\Sigma$  の  
 実現であるとき,  $|L|$  と  $|L'|$  が 同相であるとは限らない.

記号  $\Sigma$  を diagram,  $H \in [\Sigma]$  の subcomplex とする.  
 そのとき  $\Sigma$  の  $H$  の制限と  $|H|$  の diagram が自然に定まる.  
 これを  $\Sigma|H$  とあらわすことにする.

定義  $\Sigma, \Sigma'$  を diagram とする.  ~~$\Sigma$  の実現  $f: |\Sigma| \rightarrow |L|$ ,  $\Sigma'$  の実現  $f': |\Sigma'| \rightarrow |L'|$  がある~~

cellular isomorphism  $\psi: |\Sigma| \rightarrow |\Sigma'|$  が存在して

$$\sigma \underset{\Sigma}{\sim} \sigma' \iff \psi(\sigma) \underset{\Sigma'}{\sim} \psi(\sigma')$$

が成り立つならば  $\Sigma$  と  $\Sigma'$  は  $\Delta$ -isomorphic である  
 といい,  $\Sigma \underset{\Delta}{\sim} \Sigma'$  と書き表す.

\*  $\underset{\Delta}{\sim}$  は 実現  $f$  の 選い方に 依らない.

定義  $\Sigma, \Pi$  を diagram とする. 同調な homogeneous map  $f: |\Sigma| \rightarrow |\Pi|$  と  $\Pi$  の実現  $g$  が存在して  $g \circ f$  が  $\Sigma$  の実現となるとき  $\Sigma$  は  $\Pi$  に reducible であるという.

$$\begin{array}{ccc} |\Sigma| & \xrightarrow{f} & |\Pi| \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & |L| \end{array}$$

定義 2つの diagrams  $\Sigma$  と  $\Sigma'$  は共通の diagram  $\Pi$  に reducible であるとき  $\delta$ -isomorphic であるといふ.  $\Sigma \underset{\delta}{\sim} \Sigma'$  と表す.

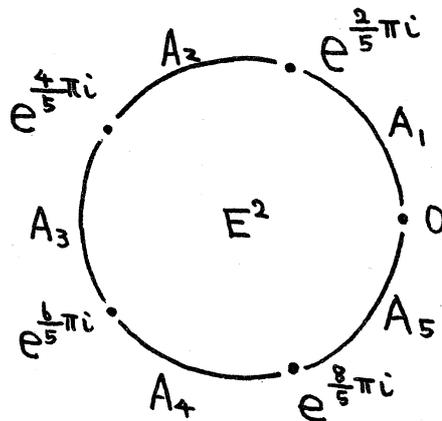
Prop. diagram  $\Sigma$  において  $\sigma, \sigma' \in [\Sigma]$  が  $\Sigma$ -同値な cells であるならば  $\Sigma/\sigma \underset{\delta}{\sim} \Sigma/\sigma'$  である.

### §3. polygram

以下、対象を限定し、最終的には 2次元球面上の diagram にもって焦点をいぼり込んでいく.

$E^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  は  $e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ ,  $k=0, 1, \dots, n-1$ , を 0-cells,  $A_k = \{e^{i\theta} \mid \frac{2k\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{2(k+1)\pi}{n}\}$ ,  $k=0, 1, \dots, n-1$ ,

を 1-cells,  $E^2$  自身を 2-cell  
 とする自然な cell complex の  
 構造をもつ. この cell complex  
 を  $Q_n$  (または単に  $Q$ ) と表す  
 ことにし, 正  $n$  辺形 と呼ぶ.



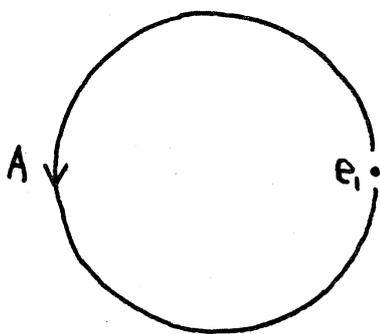
定義  $\Lambda_n$  を  $Q_n$  上の diagram とする. 任意の  $k = 0, 1, \dots, n-1$  に対して

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} \underset{\sim}{\Lambda_n} \psi(e^{\frac{2k\pi i}{n}}), \quad A_n \underset{\sim}{\Lambda_n} \psi(A_n)$$

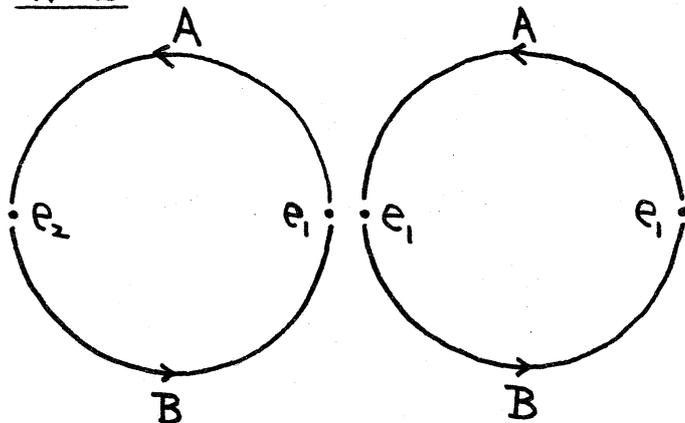
が成り立つような  $E^2 = |Q_n|$  上の対称変換  $\psi: |Q_n| \rightarrow |Q_n|$   
 は恒等変換だけであるとき  $\Lambda_n$  を program といい.

$Q_n$  ( $n=1, 2, 3$ ) にあつちける program の type を示す.

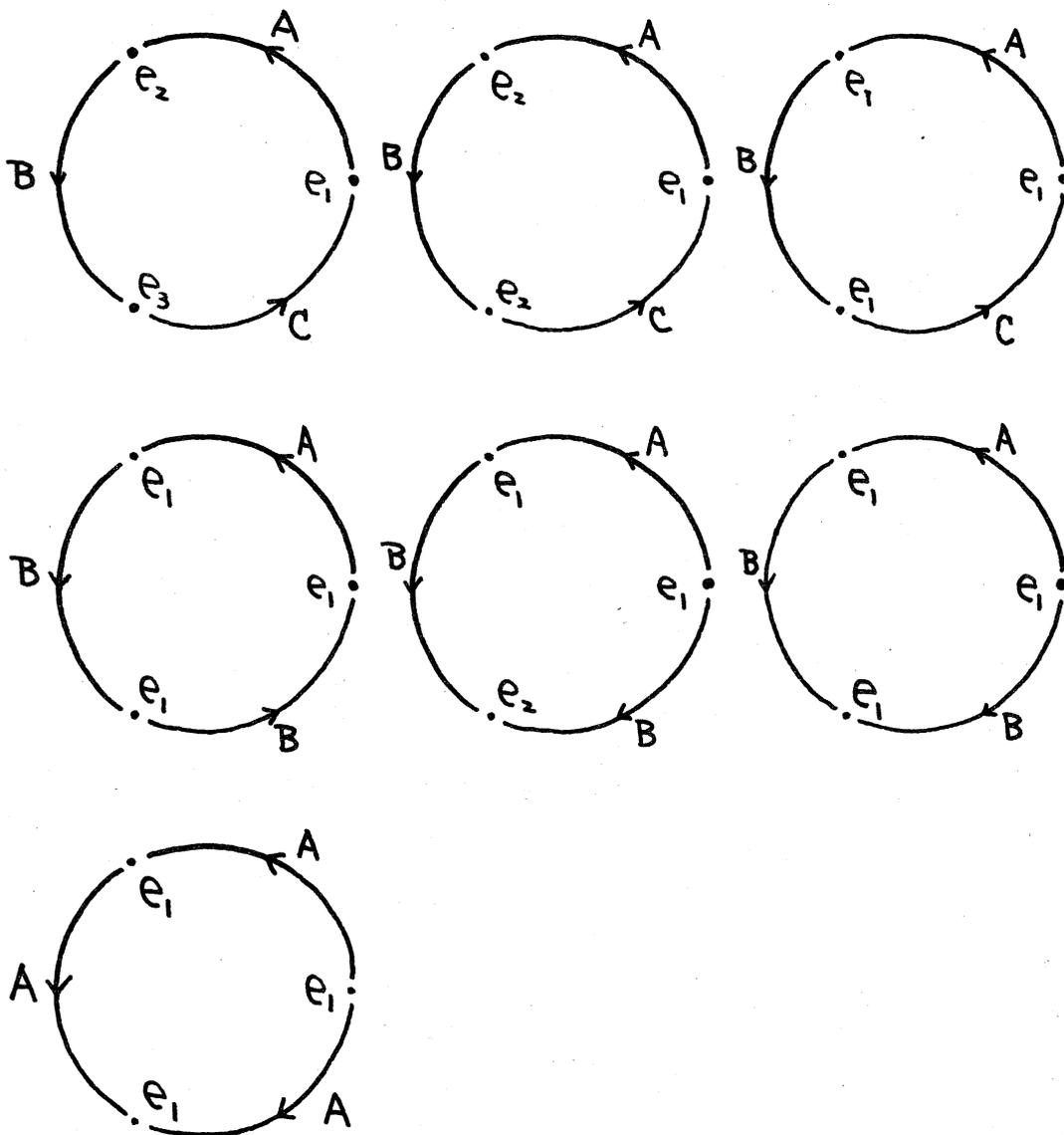
$n=1$



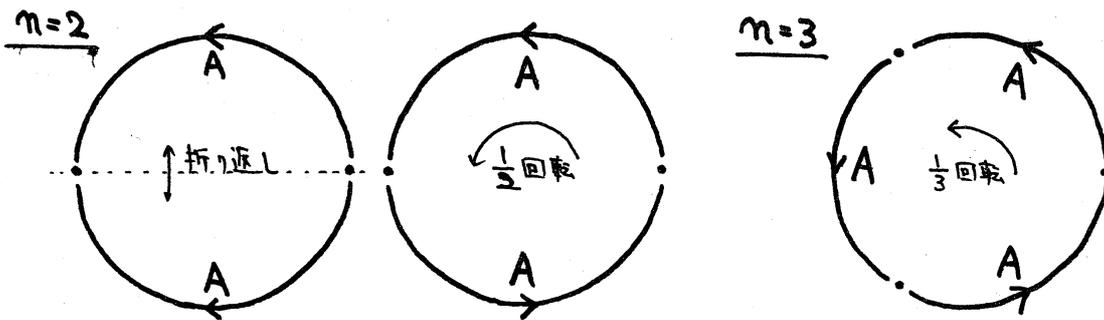
$n=2$

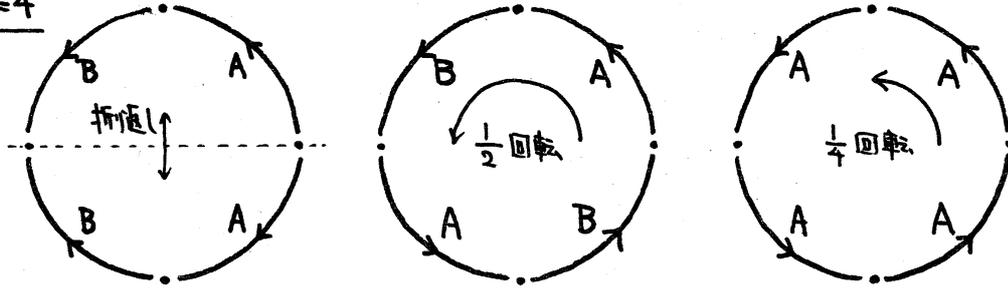
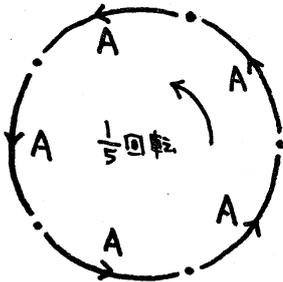
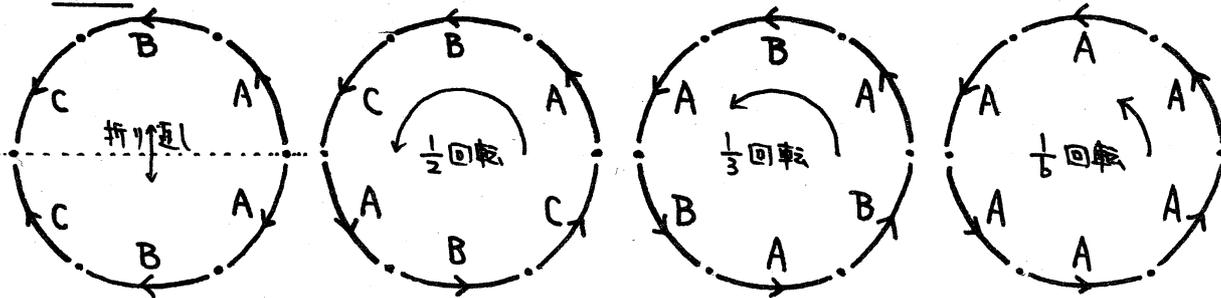


$n=3$



$Q_m$  ( $1 \leq m \leq b$ ) 上の program:  $t_1 \leq t_2 \dots$  diagram n type.



$n=4$  $n=5$  $n=6$ 

$n=1$  の diagram は 唯一種で、それは必然的に program である。program に ちがな、例 において は 0-gram の バリエーション は 省略 した (ちがな に 多く は ない)。

定義 program  $\Lambda_n$  から reduce される diagram を monogram と いう。

定義  $\Gamma$  が polygram

$\iff$

- (1)  $\Gamma$  は diagram.
- (2)  $[\Gamma]$  の underlying space は 2次元球面  $E^3$ .
- (3)  $\Gamma$  の 2-gram の重複度はすべて 2.
- (4) 任意の 2-cell  $\sigma \in [\Gamma]$  に対して  $\Gamma|_{\sigma}$  は monogram.

定義 polygram  $\Gamma$  が与えられると それに応じて  $E^3$  上の diagram とし、3-gram は  $E^3$  だけ (必然的に重複度1)、 $E^3$  上は  $\Gamma$  なるものが自然に定まる。この diagram を  $\Gamma$  から induce される solid polygram と呼ぶ。  $\hat{\Gamma}$  で表す。

Prop. polygram  $\Gamma$  の 2つの実現  $f: |[\Gamma]| \rightarrow |L|$ ,  
 $f': |[\Gamma]| \rightarrow |L'|$  に対して  $|L|$  と  $|L'|$  は同相である。

Prop.  $\Gamma$  から induce される solid polygram  $\hat{\Gamma}$  の実現  
 $\hat{f}: |[\hat{\Gamma}]| \rightarrow |\hat{L}|$ ,  $\hat{f}': |[\hat{\Gamma}]| \rightarrow |\hat{L}'|$  に対して  $|\hat{L}|$  と  $|\hat{L}'|$  は  
 同相である。

記号 1.  $f: |[\Gamma]| \rightarrow |L|$  が polygram  $\Gamma$  の実現である  
 とき、 $|L|$  を  $|\Gamma|$  で表すことがある。

2.  $\hat{\Gamma}$  が polygram  $\Gamma$  から induce される solid polygram,  
 $f: |\hat{\Gamma}| \rightarrow |\hat{\Gamma}|$  が  $\hat{\Gamma}$  の 実現 であるとき,  $|\hat{\Gamma}| \in |\hat{\Gamma}|$  で  
 表すことがある.

3. 2つの位相空間  $X$  と  $Y$  が 同相 であるとき  $X \approx Y$  と表す.

定理  $\Gamma, \Gamma' \in \text{polygram}$ ,  $\Pi \in \text{diagram}$  とする. そのとき

$$(1) \Gamma \underset{\Delta}{\sim} \Gamma' (\delta - i\omega) \Rightarrow |\Gamma| \approx |\Gamma'|, |\hat{\Gamma}| \approx |\hat{\Gamma}'|$$

(2)  $\Gamma$  が  $\Pi$  に reducible;  $g: |\Pi| \rightarrow |\Gamma|$ ,  $g': |\Pi| \rightarrow |\Gamma'|$  は  $\Pi$  の  
 実現  $\Rightarrow |\Gamma| = |\Gamma'| = |\Pi|$

$$(3) \Gamma \underset{\delta}{\sim} \Gamma' (\delta - i\omega) \Rightarrow |\Gamma| \approx |\Gamma'|, |\hat{\Gamma}| \approx |\hat{\Gamma}'|$$

#### §4. Polygram の 基本変形

以下  $\Sigma, \Sigma'$  などは断らな~~い~~限り polygram をあらわす  
 ものとする.

定義  $|\Sigma| \approx |\Sigma'|$  (同相) であるとき  $\Sigma$  と  $\Sigma'$  は home-  
isomorphic であるといひ,  $\Sigma \approx \Sigma'$  とあらわす

或る変形  $Q$  によつて  $\Sigma$  から  $\Sigma'$  が得られるとき,

$\Sigma \approx \Sigma'$  であるならば「変形  $\Omega$  は  $\phi$ -不変 であるという。

### $\mathcal{J}$ -変形 (Isomorphism)

定義  $\Sigma$  内の一種類の  $m$ -gram ( $m=0,1,2$ ) に対して

- (1) その向きを反対にすること。
  - (2) 全く新しい (向きも込めた) 文字におきかえること
- による変形を  $\mathcal{J}$ -変形 という。

Prop.  $\mathcal{J}$ -変形は  $\phi$ -不変である。

### $\mathcal{A}$ -変形 (Ambient isotopy)

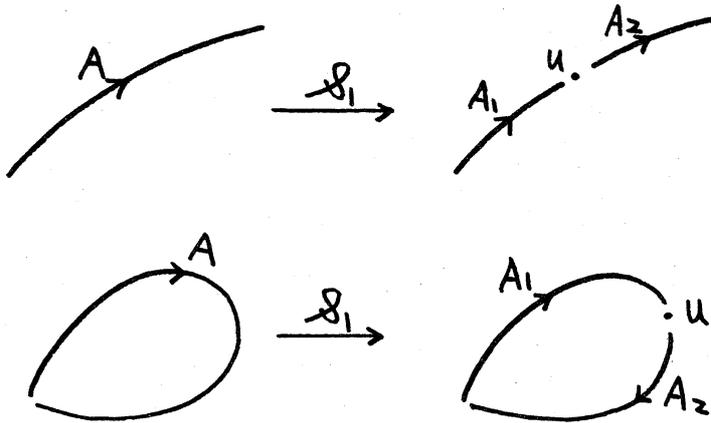
定義  $\Sigma$  を球面  $E^3$  上の ambient isotopy で変形することを  $\mathcal{A}$ -変形 という。

Prop.  $\mathcal{A}$ -変形は  $\phi$ -不変である。

(詳)  $\mathcal{J}$ -変形 及び  $\mathcal{A}$ -変形 は変形とは名ばかりで本質的には何も変えない、いわゆる自明な変形である。

$\mathcal{S}_1$ -変形と  $\overline{\mathcal{S}}_1$ -変形 (1-gramの Subdivision と  $\mathcal{S}$  の逆)

$\Sigma$  内の 1-gram  $A$  に対し、下図のようにして  $A$  を  $A_1$  と  $A_2$  に細分する変形を  $\mathcal{S}_1$ -変形、その逆を  $\overline{\mathcal{S}}_1$ -変形という。



この  $\mathcal{S}_1$ -,  $\overline{\mathcal{S}}_1$ -変形の定義に  $\Sigma$  の実現  $f: |K| \rightarrow |L|$  を用いる。但し  $K = [\Sigma]$ ,  $|L| = |\Sigma|$  である。

定義  $L$  の 1-cell  $A$  に対し、 $A$  の内点  $u$  を新たな 0-cell とすることにより、 $A$  を 2 つの 1-cells  $A_1, A_2$  に細分することが出来る。  $A_1, A_2$  に適当な向きを入れる。このとき  $L$  から 1-cell  $A$  を除去し、その代りに 0-cell  $u$  と 1-cells  $A_1, A_2$  を附加して新たな oriented cell complex  $L_1$  ( $|L| = |L_1|$ ) が得られる。  $f$  から自然に oriented cell complex  $K_1$  及び同調な homogeneous map  $f_1: |K_1| \rightarrow |L_1|$  が得られる。この  $f_1$  から induce される diagram  $\Sigma_1$  はまた polygram

になる。  $\Sigma$  から  $\Sigma_1$  への変形を  $\mathcal{S}_1$ -変形 といい。

定義 次の (1), (2) を満たす 0-cell  $v \in L$  について考える:

(1) graph  $|L^{(1)}|$  において  $v$  の degree は 2. 但し  $L^{(1)}$  は  $L$  の 1-skeleton.

(2)  $v$  は異なる 2 つの 1-cells  $B_1, B_2 \in L$  に共通の 0-cell.

そのとき  $B_1 \cup B_2$  を新たな 1-cell  $B$  におきかえ、 $B$  に適当な向きを入ける。このようにして  $L$  から 0-cell  $v$  と 1-cells  $B_1, B_2$  を除去し、その代りに 1-cell  $B$  を附加して新たな oriented cell complex  $\bar{L}_1$  ( $|\bar{L}_1| = |L|$ ) が得られる。  $f$  から自然に oriented cell complex  $\bar{K}_1$  及び同調な homogeneous map  $\bar{f}_1: |\bar{K}_1| \rightarrow |\bar{L}_1|$  が得られる。この  $\bar{f}_1$  から induce される diagram  $\bar{\Sigma}_1$  はまた polygram になる。  $\Sigma$  から  $\bar{\Sigma}_1$  への変形を  $\bar{\mathcal{S}}_1$ -変形 といい。

Prop  $\mathcal{S}_1$ -変形 及び  $\bar{\mathcal{S}}_1$ -変形 は  $\mathcal{S}$ -不変である。

\* 2-gram の細分とその逆についても同様の記述をしたいが残念ながら少々事情が異なる。そこで (後にあらわれる他の変形のためにも) rigid loop ということについて述べておく。

rigid loop

通常のやり方で path を定義する。simple path, closed path についての定義は了解され得るものとして割愛する。

定義 oriented cell complex  $K = [\Sigma]$  に対し、重複を許した oriented 1-cells の列:

$$\pi = \sigma_1^{\varepsilon_1} \sigma_2^{\varepsilon_2} \cdots \sigma_k^{\varepsilon_k}, \quad \varepsilon_i = \pm 1,$$

を  $K$  上の path といい、path  $\pi$  に対し、

$$\pi^{-1} = \sigma_k^{-\varepsilon_k} \cdots \sigma_2^{-\varepsilon_2} \sigma_1^{-\varepsilon_1}$$

と定める。

path  $\pi$  が ~~simple path~~  $\tau$  であるとき  $\pi$  から自然に induce される  $K$  の subcomplex 及びその underlying space をも同じ記号  $\pi$  で表すことにする。

定義  $\Sigma$ -同値 " $\cong$ " により path  $\pi$  から自然に induce される  $\Sigma$  上の 1-gram の列:

$$\pi_\Sigma = A_1^{\varepsilon_1} A_2^{\varepsilon_2} \cdots A_k^{\varepsilon_k}$$

を  $\Sigma$  上の word といい、

$\pi$  が simple path  $\tau$  であるとき  $\pi_\Sigma$  は simple word,  
 $\pi$  が closed path  $\tau$  であるとき  $\pi_\Sigma$  は closed word といふ。

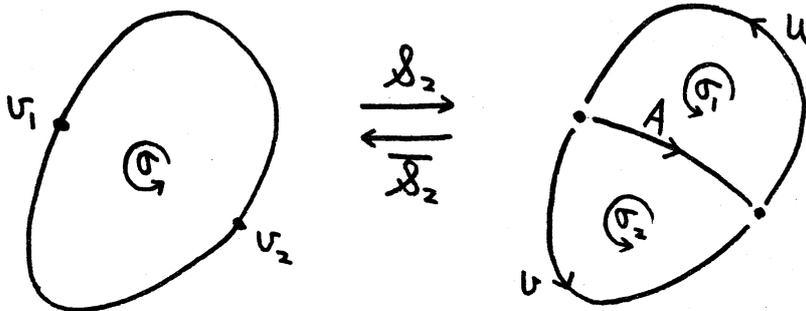
定義  $\Sigma$  上の closed path  $\pi$  に対し, diagram  $\Sigma/\pi$  から pregram  $\Lambda$  の  $\dot{E}^2$  への制限  $\Lambda|_{\dot{E}^2}$  から reduce されるとき, closed word  $\pi_\Sigma$  を rigid loop といい.

定義  $\Sigma$  上の monogram  $M$  から pregram  $\Lambda$  から reduce されるとき,  $\Lambda|_{\dot{E}^2}$  から reduce される  $M$  の subdiagram を  $M$  の 境界 と呼び  $\dot{M}$  で表す.  $\Lambda|_{\dot{E}^2}$  から associate される  $\dot{M}$  上の closed word を  $M$  の 境界 と呼び  $\dot{M}$  で表す.

Prop monogram  $M$  に対し,  $\dot{M}$  は rigid loop である.

$\mathcal{S}_2$ -変形と  $\overline{\mathcal{S}}_2$ -変形 (2-gram の Subdivision とその逆)

$\mathcal{S}_2$ -変形,  $\overline{\mathcal{S}}_2$ -変形は 実戦的には下図のようになる. とくに  $\overline{\mathcal{S}}_2$ -変形を施そうとするときには closed word  $uv$  が rigid であるかどうかをチェックする必要がある.



$f: |K| \rightarrow |L|$  を polygram  $\Sigma$  の実現とする。但し、  
 $K = [\Sigma]$ ,  $|L| = |\Sigma|$ .

定義  $\sigma$  を  $L$  の 2-cell とし、 $v_1, v_2$  を  $\sigma$  上の異なる  
 0-cells とする。  $v_1$  と  $v_2$  を結ぶ  $\sigma$  上の simple arc  $A$  を選ぶ。  
 但し、 $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{\sigma} = \emptyset$  とする。この  $A$  を新たな 1-cell とすること  
 により、 $\sigma$  を 2 つの 2-cells  $\sigma_1, \sigma_2$  に細分できる。  $A, \sigma_1, \sigma_2$  に  
 それぞれ適当な向きを付ける。このようにして  $L$  から 2-cell  
 $\sigma$  を除去し、その代りに 1-cell  $A$  と 2-cells  $\sigma_1, \sigma_2$  を附加した  
 新しい oriented cell complex  $L_2$  が得られる。

$f: |K| \rightarrow |L|$  から自然に oriented cell complex  $K_2$  及び  
 同調な homogeneous map  $f_2: |K_2| \rightarrow |L_2|$  が得られる。この  $f_2$   
 から induce される diagram  $\Sigma_2$  はまた polygram になる。

$\Sigma$  から  $\Sigma_2$  への変形を  $\mathcal{A}_2$ -変形 とする。

定義 次の (1), (2) を満たす 1-cell  $B \in L$  について考える:

(1)  $B$  を 1-cell として 2-cell は  $L$  内に丁度 2 つ存在  
 する。それぞれを  $\beta_1, \beta_2$  とする。

(2)  $\beta_1 - \overset{\circ}{B}$ ,  $\beta_2 - \overset{\circ}{B}$  は connected,  $\overset{\circ}{B}$  は connected である。

そのとき  $\beta_1 \cup \beta_2$  を新たな 2-cell  $\beta$  におきかえ、 $\beta$  に  
 適当な向きを付ける。このようにして  $L$  から 1-cell  $B$  と

2-cells  $\beta_1, \beta_2$  を除去し、その代りに 2-cell  $\beta$  を附加して新たな oriented cell complex  $\bar{L}_2$  ( $|\bar{L}_2| = |L|$ ) が得られる。

$f: |K| \rightarrow |L|$  から自然に oriented cell complex  $\bar{K}_2$  及び同調な homogeneous map  $\bar{f}_2: |\bar{K}_2| \rightarrow |\bar{L}_2|$  が得られる。この  $\bar{f}_2$  から induce される diagram を  $\bar{\Sigma}_2$  とする。

$uB, vB^{-1}$  をそれぞれ  $\beta_1, \beta_2$  に associate される monogram の境界とする。そのとき

(3) closed word  $uv$  が rigid loop  $\tau$  であるならば  $\bar{\Sigma}_2$  はまた polygram になる。

$\Sigma$  から  $\bar{\Sigma}_2$  への変形を  $\mathcal{J}_2$ -変形 といい、但し  $\bar{\Sigma}_2$  は polygram であることを要する。

Prop  $\mathcal{J}_2$ -変形,  $\bar{\mathcal{J}}_2$ -変形 はともに  $\beta$ -不変である。

### $\mathcal{J}$ -変形

$\mathcal{J}_1$ -,  $\mathcal{J}_2$ -変形はそれぞれ 1-, 2-cell の細分から induce される変形であり、 $\bar{\mathcal{J}}_1$ -,  $\bar{\mathcal{J}}_2$ -変形はそれぞれ  $\mathcal{J}_1$ -,  $\mathcal{J}_2$ -変形の逆変形である。今後我々はこれらの変形を総称して  $\mathcal{J}$ -変形 と呼ぶことにする。

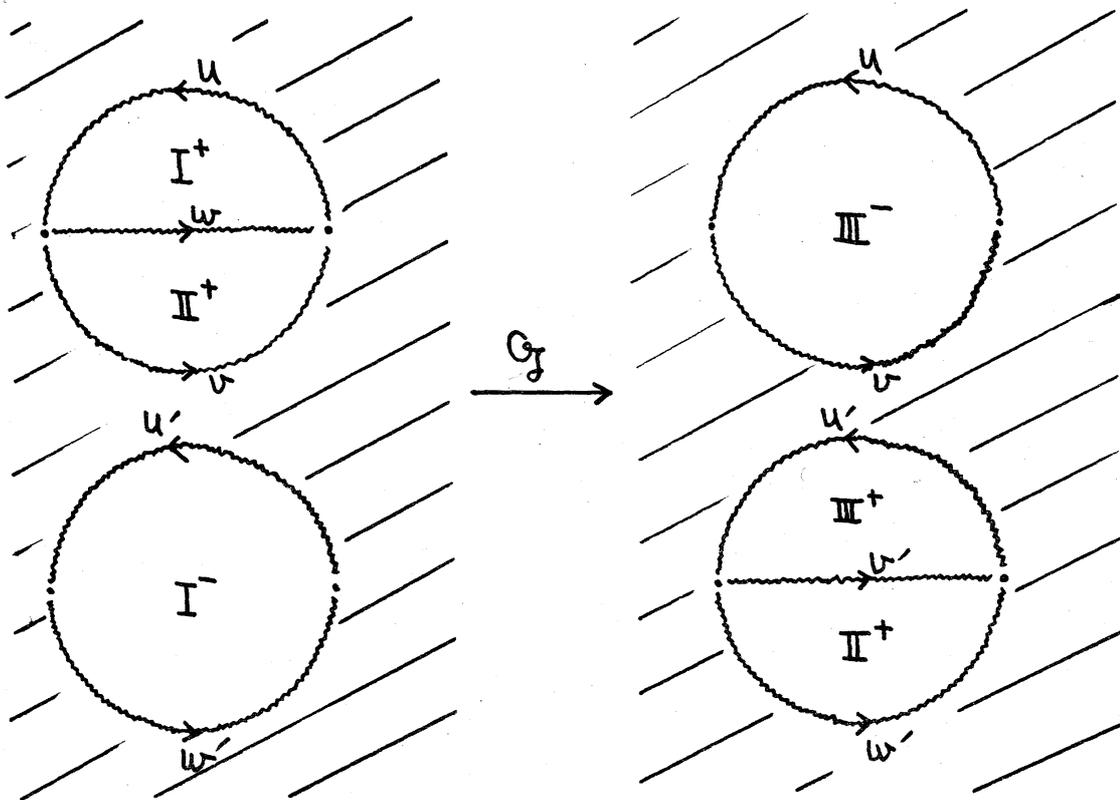
## $G_2$ -変形 (Cutting & Glueing)

定義  $w$  を  $\Sigma$  上の simple word とする.  $I^+, I^-$  を一対の monogram,  $I^+ = u w$ ,  $I^- = u' w'$  とする. 但し  $u$  と  $u'$ ,  $w$  と  $w'$  が対応しているものとする.  $w$  を境として  $I^+$  と隣接している monogram を  $II^+$ ,  $II^+ = v w^{-1}$  とする.

(1)  $u, u', w, w', v$  はどれも simple word とする.

(2)  $I^+ \cup II^+$  上の word  $uv$  は simple rigid loop とする.

そのとき  $v$  に対応する simple word  $\tilde{v}$  を新たに導入して下の図のように、左図の  $\{I^+ \cup II^+, I^-\}$  を右図の  $\{III^-, III^+ \cup II^+\}$  に変える変形を  $G_2$ -変形 とする.



Prop (1)  $G_f$ -変形は  $f$ -不変である。

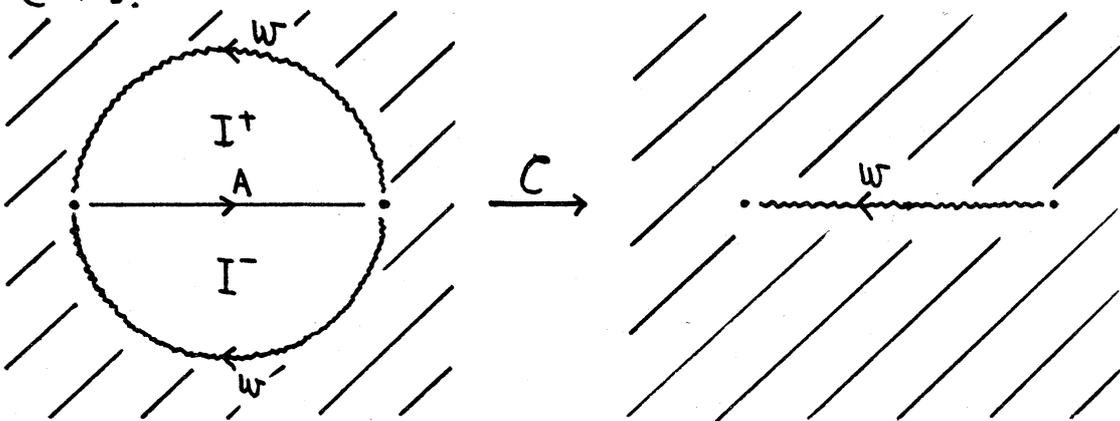
(2)  $G_f$ -変形の逆はまた  $G_f$ -変形である。

### C-変形 (Collapsing)

Prop  $A$  を  $\Sigma$  内の重複度 1 の 1-gram とする。このとき  $A$  を境として隣接する monogram  $X$  と  $Y$  に対して 2-cells  $[X]$  と  $[Y]$  は  $\Sigma$ -同値である。(すなわち  $X$  と  $Y$  は対応する monogram)

定義  $\Sigma$  が重複度 1 の (loop でない) 1-gram  $A$  を持っている場合について考える。  $A$  を境として隣接する (同種の) monogram を  $I^+, I^-$  とする。  $I^+ = wA, I^- = w'A$  とする。

word  $w, w', ww^{-1}$  が何れも simple であるとき  $A, I^+, I^-$  を除去し、  $w$  と  $w'$  を同一視することによって得られる polygram を  $\Sigma'$  とする。  $\Sigma$  から  $\Sigma'$  への変形を C-変形 という。



(註)  $\Sigma$  上の任意の simple word  $w$  に対して、いま定義した  $\mathcal{C}$ -変形の逆の変形が一意的に定義できる。便宜上この逆変形をも  $\mathcal{C}$ -変形 と呼ぶことにするが、恐らく、この逆変形が実用的に用いられる場面は殆んどないであろう。

Prop  $\mathcal{C}$ -変形は  $\phi$ -不変である。

### 基本変形

定義  $\mathcal{D}$ -,  $\mathcal{A}$ -,  $\mathcal{S}$ -,  $\mathcal{G}$ -,  $\mathcal{C}$ - の5種の変形を総称して polygram の基本変形 といい。

定義 polygram  $\Sigma$  から有限回の基本変形によって他の polygram  $\Sigma'$  が得られるとき  $\Sigma$  と  $\Sigma'$  は  $\phi$ -equivalent である、という。

このとき  $\Sigma$  から  $\Sigma'$  への変形を  $\phi$ -変形 といい。

Prop  $\phi$ -equivalence は同値関係である。

Prop:  $\phi$ -変形は  $\phi$ -不変である。

## 文 献

- [1] 数理解析研講究録 524 (1984), 多様体と Fake Surface, p. 21 - p. 83.
- [2] 石井一平, Flow and Spines (preprint)
- [3] 数理解析研講究録 542 (1985), 低次元多様体の幾何構造と位相構造, p. 81 - p. 96
- [4] 数理科学 (1984) 10月号 p. 48 - p. 54.
- [5] Lundell - Weingram, The Topology of CW complexes, Van Nostrand C. (1969).