数理解析研究所講究録
第563巻 1985年 169-206

Lens space の DS-diagram について

上智大理工　横山和夫（Kazuo Yokoyama）

前回，京都大学数理解析研究所講究録542の「DS-diagramの基本変形 II」（[4]）において，特別な Lens space $L(p,q)$ の DS-diagram について述べたが，ここでは全ての Lens space $L(p,q)$ に対する DS-diagram の"標準形"なるものを与える。

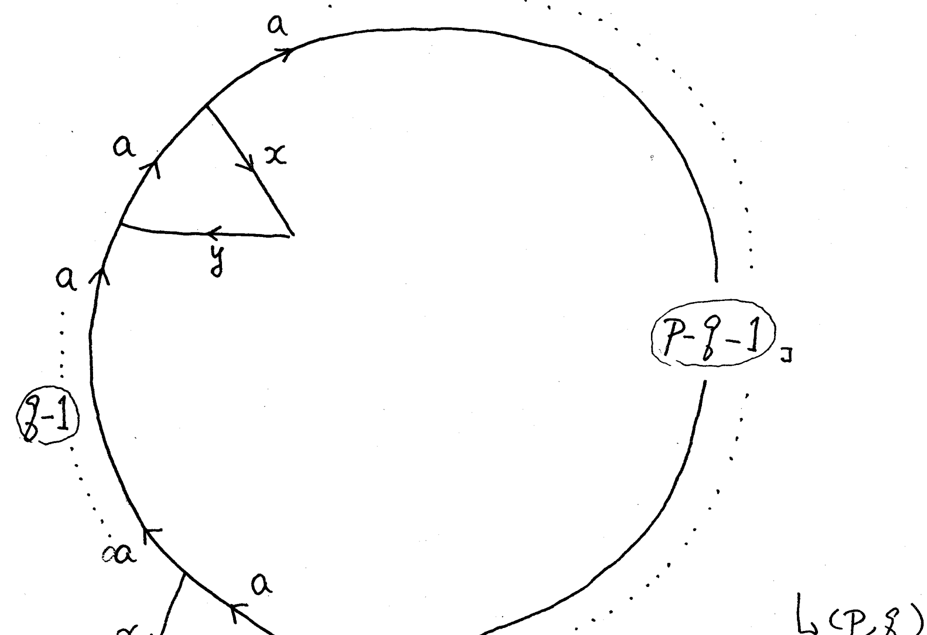
そして，与えられた p と q から $S_3(P)$（ここに P は上の DS-diagram から定まる $L(p,q)$ の fake surface を表わし $S_3(P)$ e.t.c. 詳しい定義，記号は [1] を参照）の点の数を計算することによって，$S_3(L(p,q))$ を上からおさえる式（定理4，命題5）を求める。そして予想として「その式は = であろう」と思われる。

<注> DS-diagram, polygram 等は S^2 上 diagram（[5] 参照）であるが，ここでは図で表わすときは，その polygram の1つの 2-gram 上の点をとって，平面 $\mathbb{R}^2$ 上の diagram

（図形）として書く。

§1 polygram（特に Lens space の polygram）の基本変形にかんする基本命題.

今後 polygram（詳しいことは [5] をみられたい）のみを扱うものとする。まず Lens space $L(p,q)$ の polygram の『基本形』を



［図 1］

としておく。但し

$$\overleftarrow{a \cdots S_{\text{コ}} \cdots a} \qquad \overleftarrow{a \cdots\cdots S_{\text{コ}} \cdots\cdots a}$$

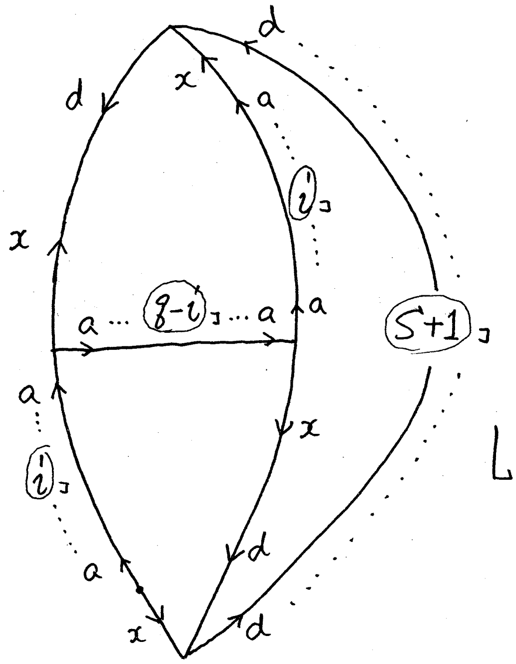
は $\overleftarrow{a}$ が S コ並んでいること，すなわち

$$\underbrace{\overleftarrow{a}\ \overleftarrow{a} \quad\cdots\cdots\quad \overleftarrow{a}\ \overleftarrow{a}}_{S\text{コ}}$$

を表わす。また上の polygram から定まる3次元多様体が Lens space $L(p,q)$ であると理解してもらってもよい。

次に，polygram の基本変形（[5] の p23）を使って，種々の polygram の変形（$\mathfrak{p}$-変形）に関する補題を述べておこう。まず

補題 1

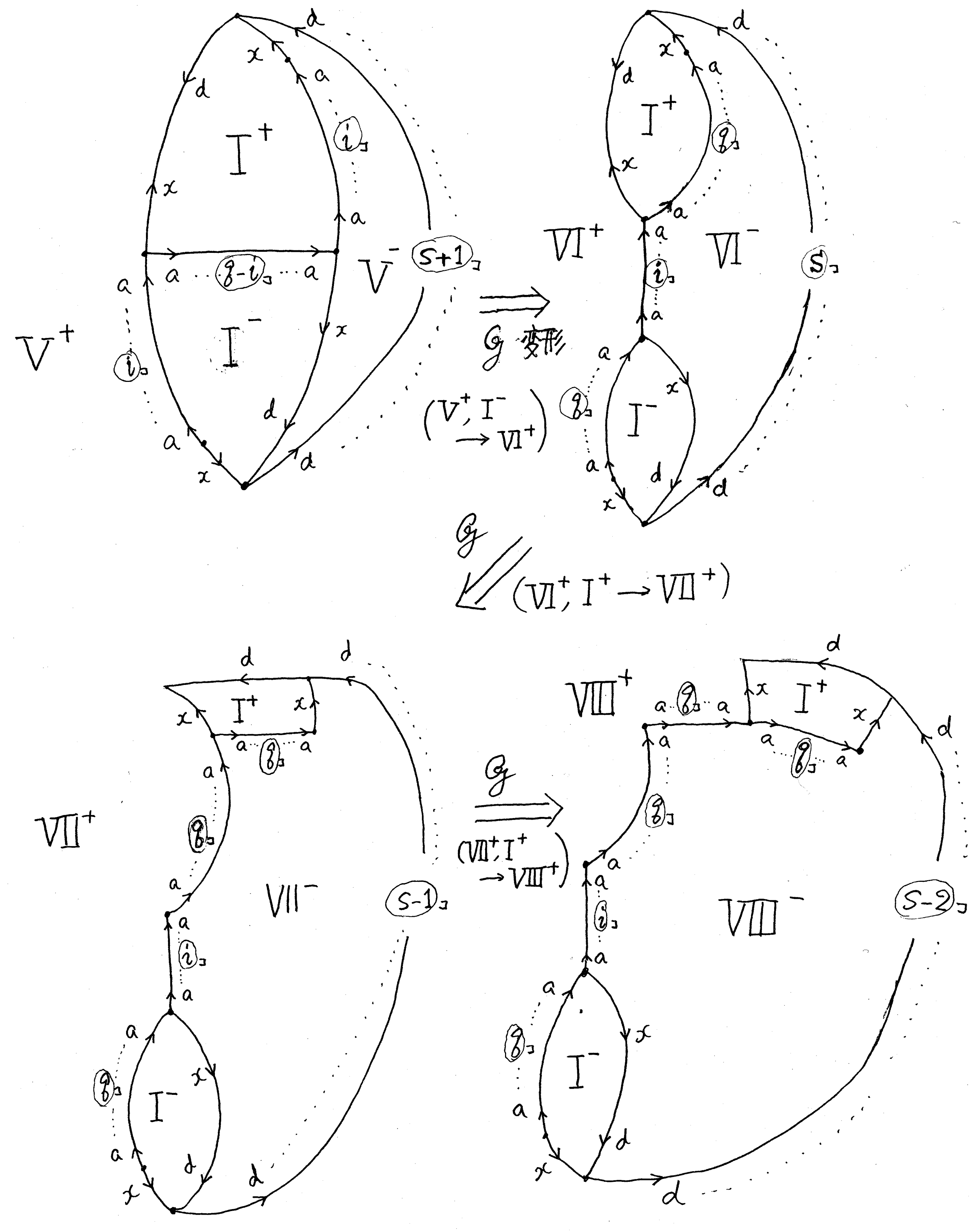


$L((s+2)q+i,q)$

[図 2]

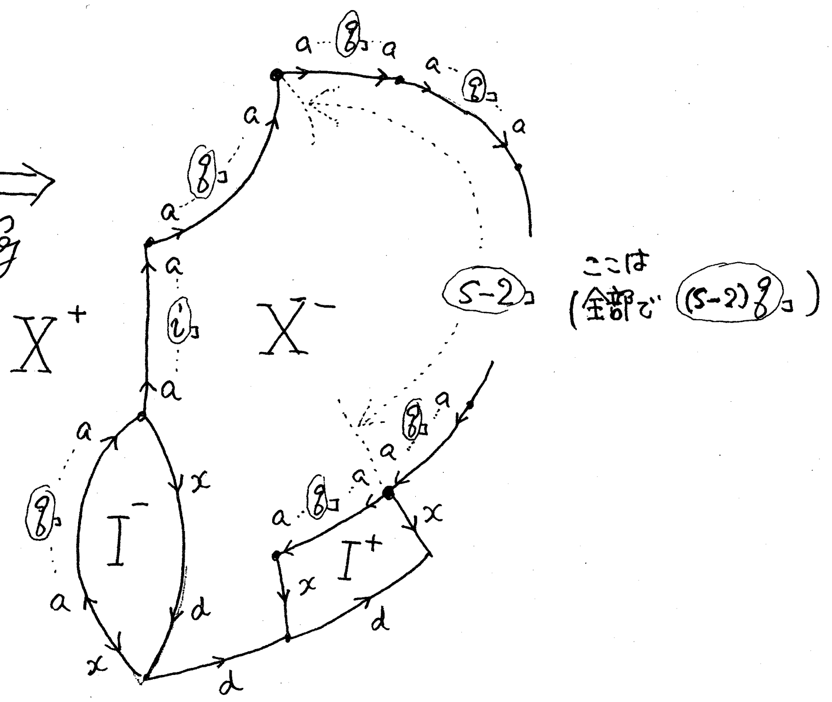
任意の整数 q, s, i（$q \geqq 1$, $s \geqq 0$, $q > i \geqq 1$）に対して $p=(s+2)q+i$ とおくと図2は図1と $\mathfrak{p}$-equivalent である。（p と q は互いに素）　すなわち，この polygram から定まる3次元多様体は $L((s+2)q+i,q)$ なる Lens space である。

[証明]　以下の図で示される。

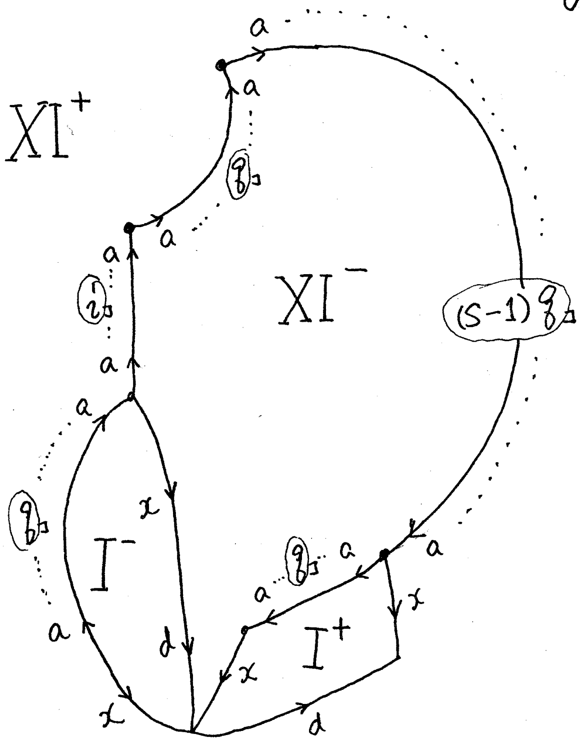

V^+
I^+
I^-
V^-
$\mathcal{G}$ 変形
$(V^+, I^- \to VI^+)$
VI^+
VI^-
$\mathcal{G}$
$(VI^+, I^+ \to VII^+)$
VII^+
VII^-
$\mathcal{G}$
$(VII^+, I^+ \to VIII^+)$
$VIII^+$
$VIII^-$

$\Longrightarrow$ ······ アト S-3回 ······ $\Longrightarrow$

G (同じ操作) G

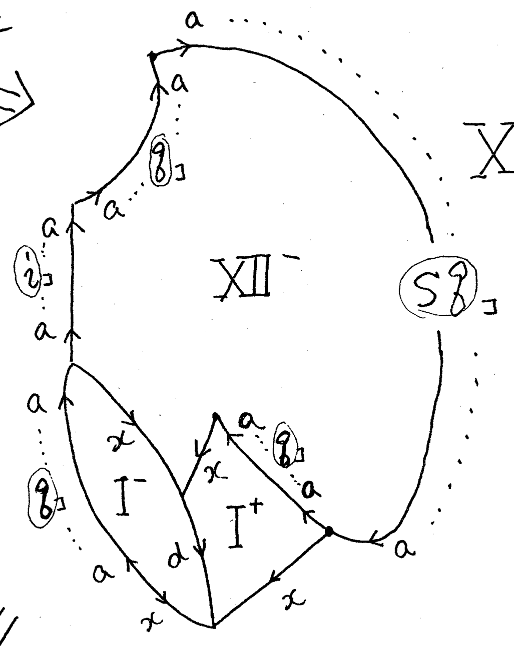


$\Downarrow G$ $(X^+, I^+ \longrightarrow XI^+)$

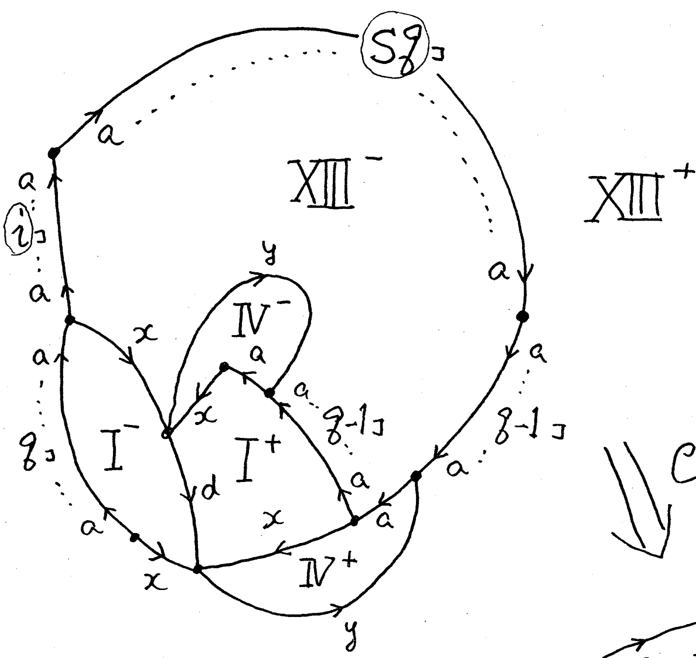


G

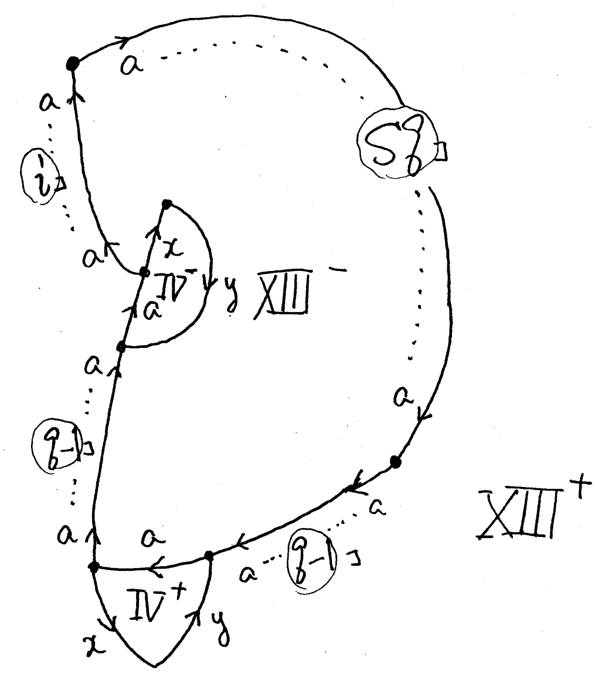
$\Longrightarrow$



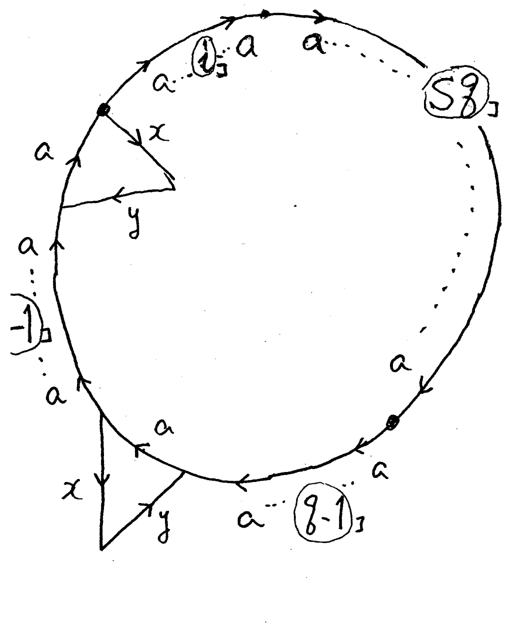
$\Downarrow S_2$ $(\mathrm{VII} \xrightarrow[(y)]{} \mathrm{VIII}, \mathrm{IV})$



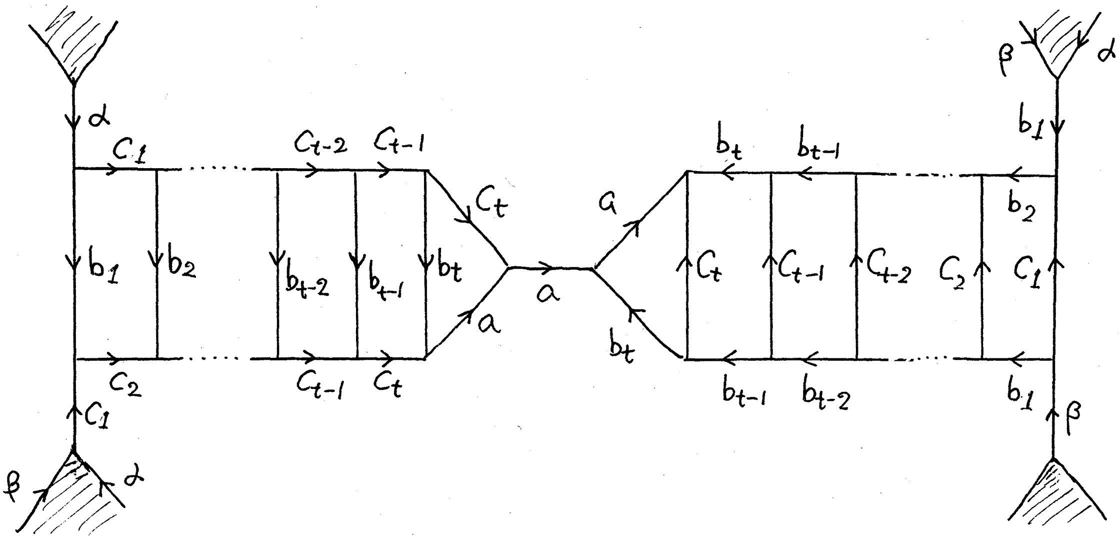
⇓ C変形 (I⁻とI⁺(d⃗による))

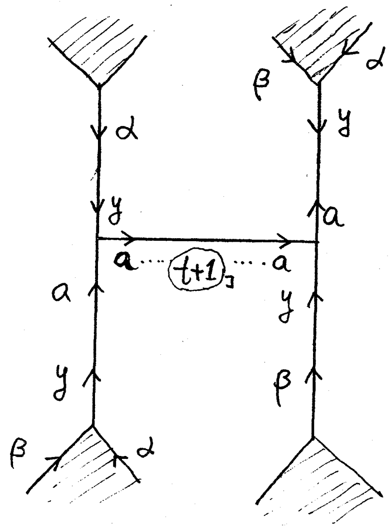


=

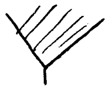


補題２　次の２つのpolygramは ϕ-equivalentである。



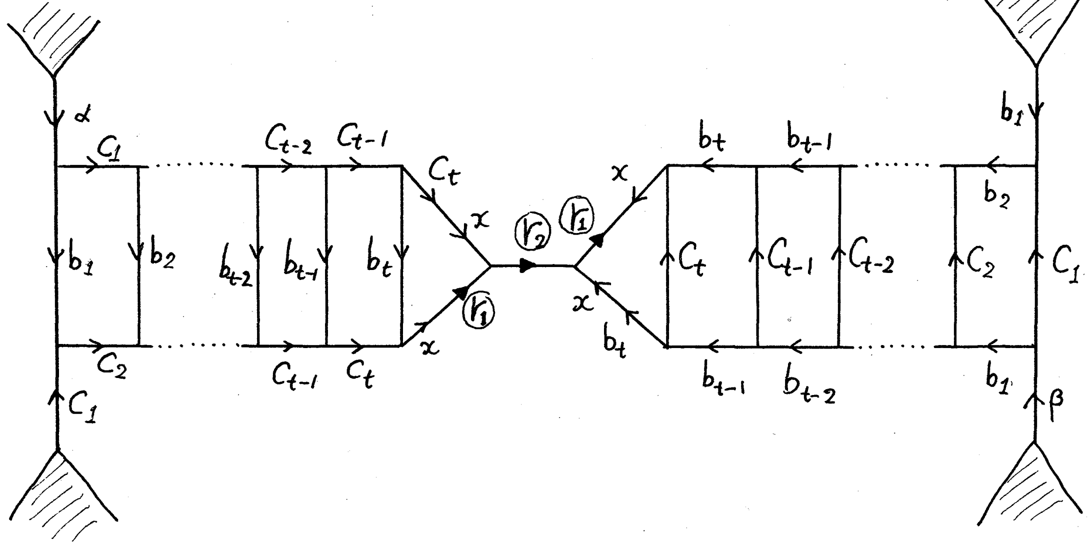


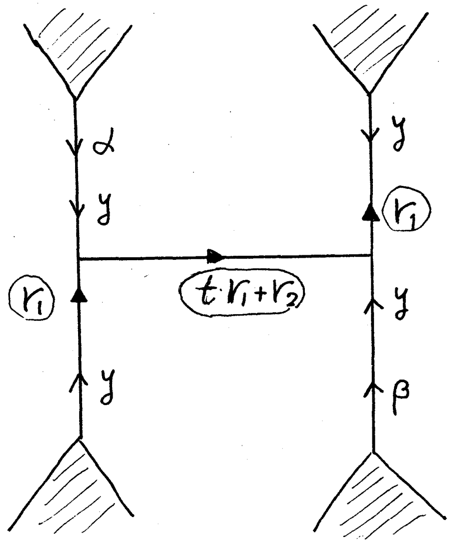
$(y = b_1 b_2 \cdots b_t)$

ただし，tは $t \geqq 1$ なる任意の整数で b_i, c_i $(1 \leq i \leq t)$ はpolygramの他の所には現われない。また  は polygramがこの先はどうなっていてもよいことを表わす。

もっと一般に，次の補題が示される。

<u>補題3</u>　次の2つのpolygramは β-equivalentである。



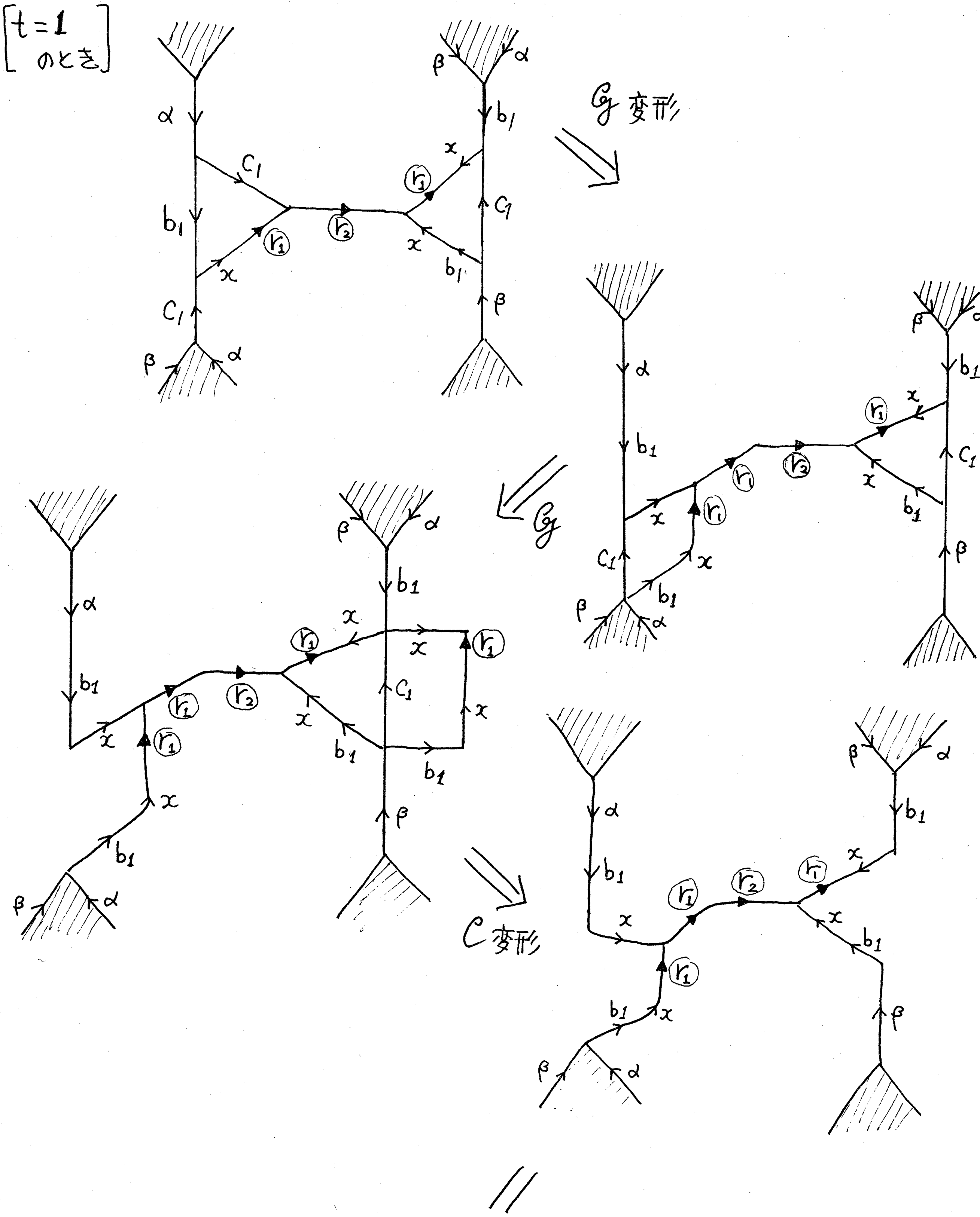


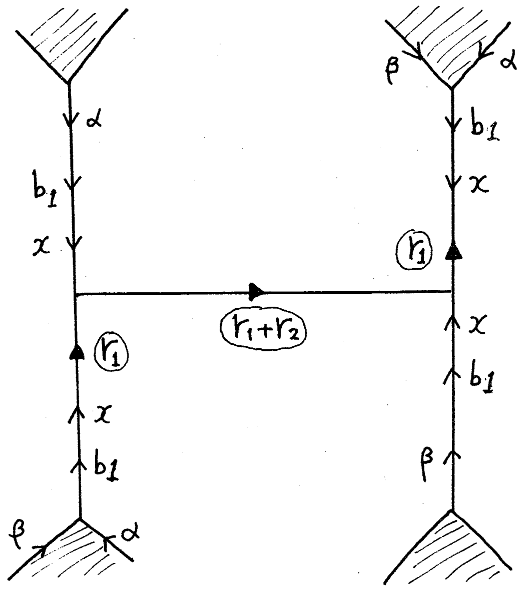
$y = b_1 b_2 \cdots b_t x$

t $(t \geqq 1)$，b_i, c_i $(1 \leqq i \leqq t)$ については，前の補題と同様で $\xrightarrow[r]{}$ は $\xrightarrow{a} \cdots r \cdots \xrightarrow{a}$ を表わす。$(r \geqq 1)$

［証明］ t に関する induction でおこなわれる。まず $t=1$ のときを示し，次に $t-1$ のとき成立するとして t のときを示す。それは次の図のとおり．

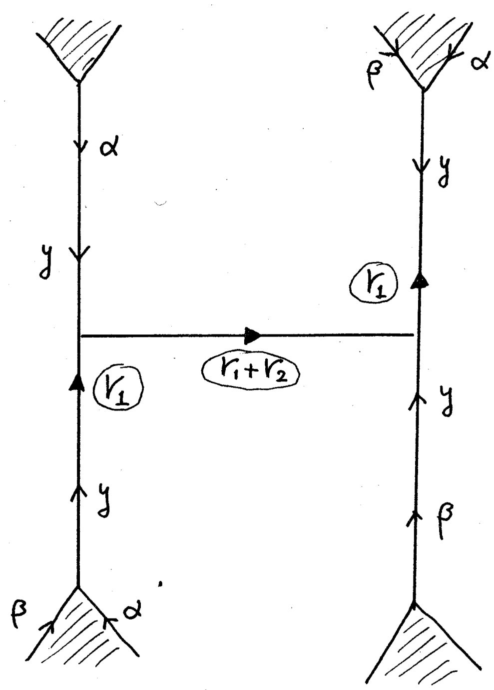
[t = 1 のとき]



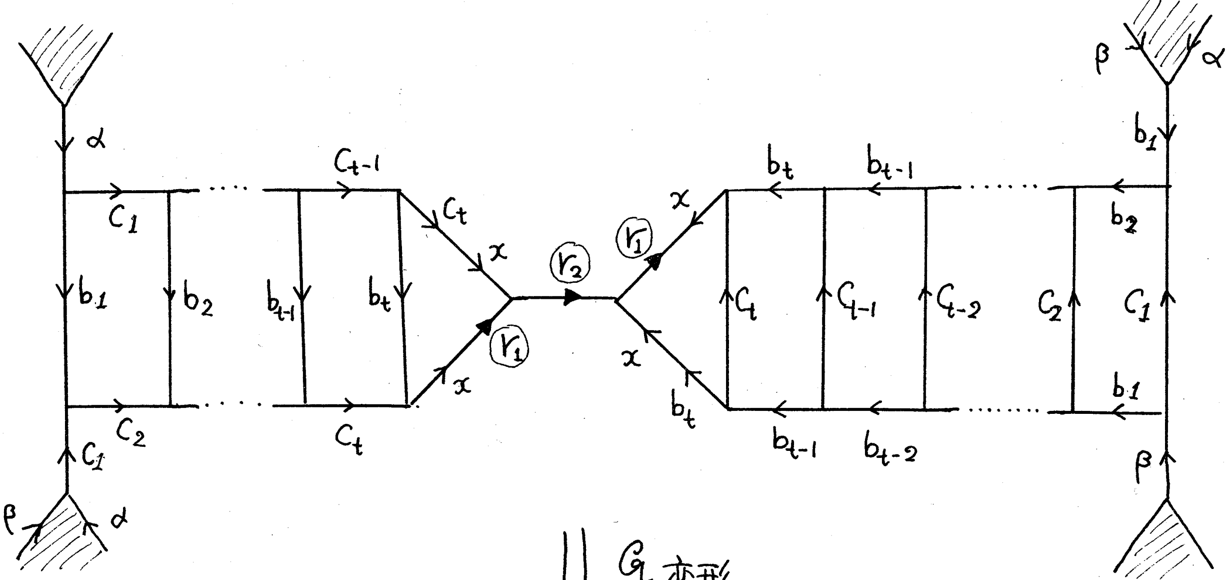


$\overline{S}_1$ 変形

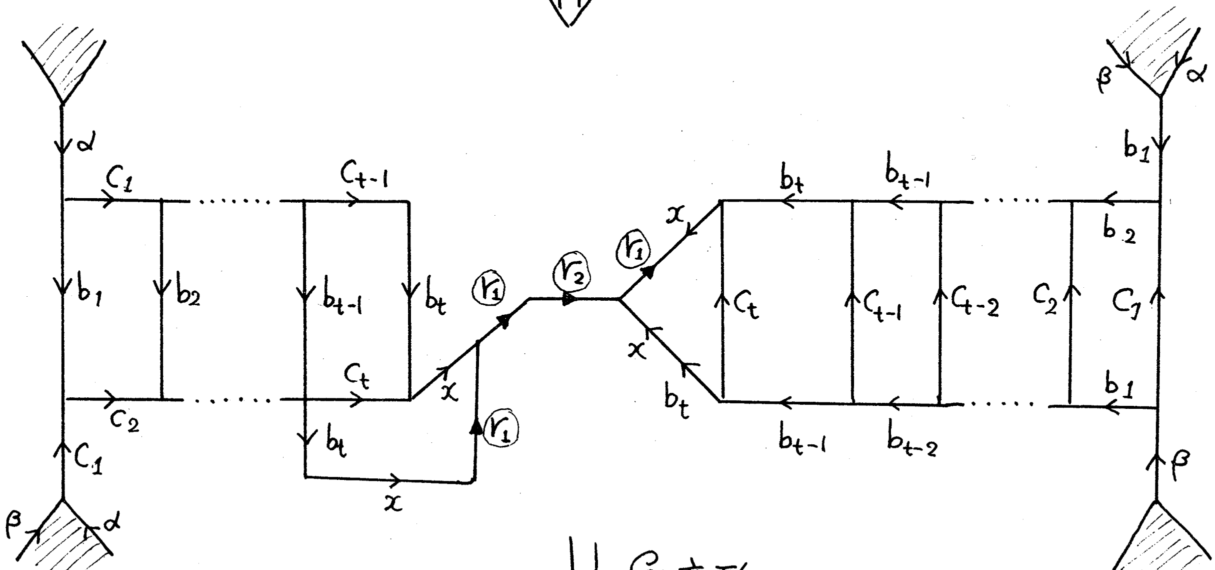
($y = b_1 x$)



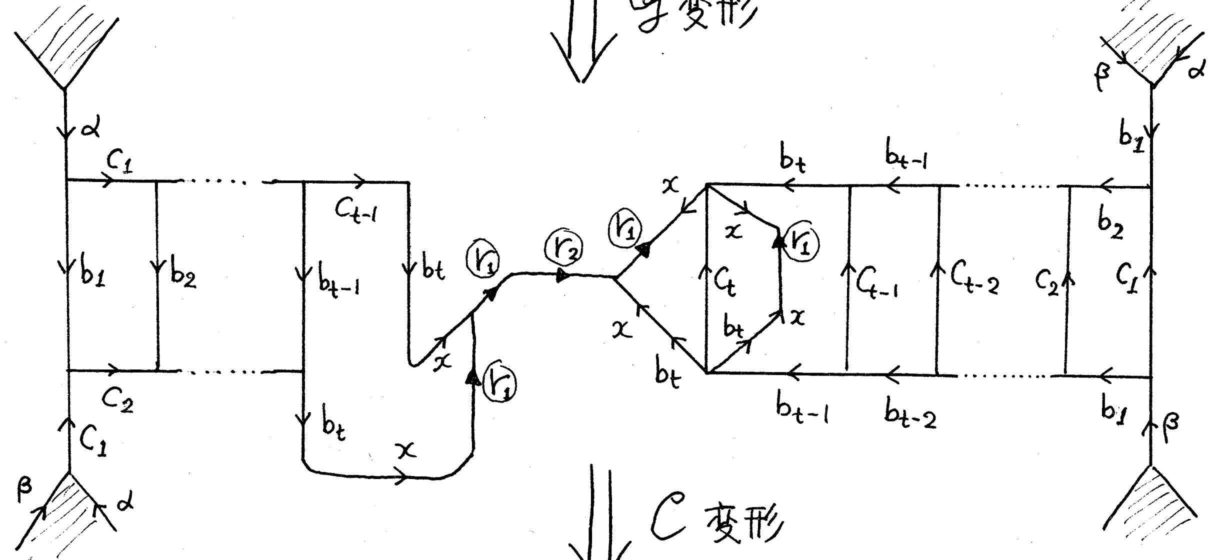
［tのとき］



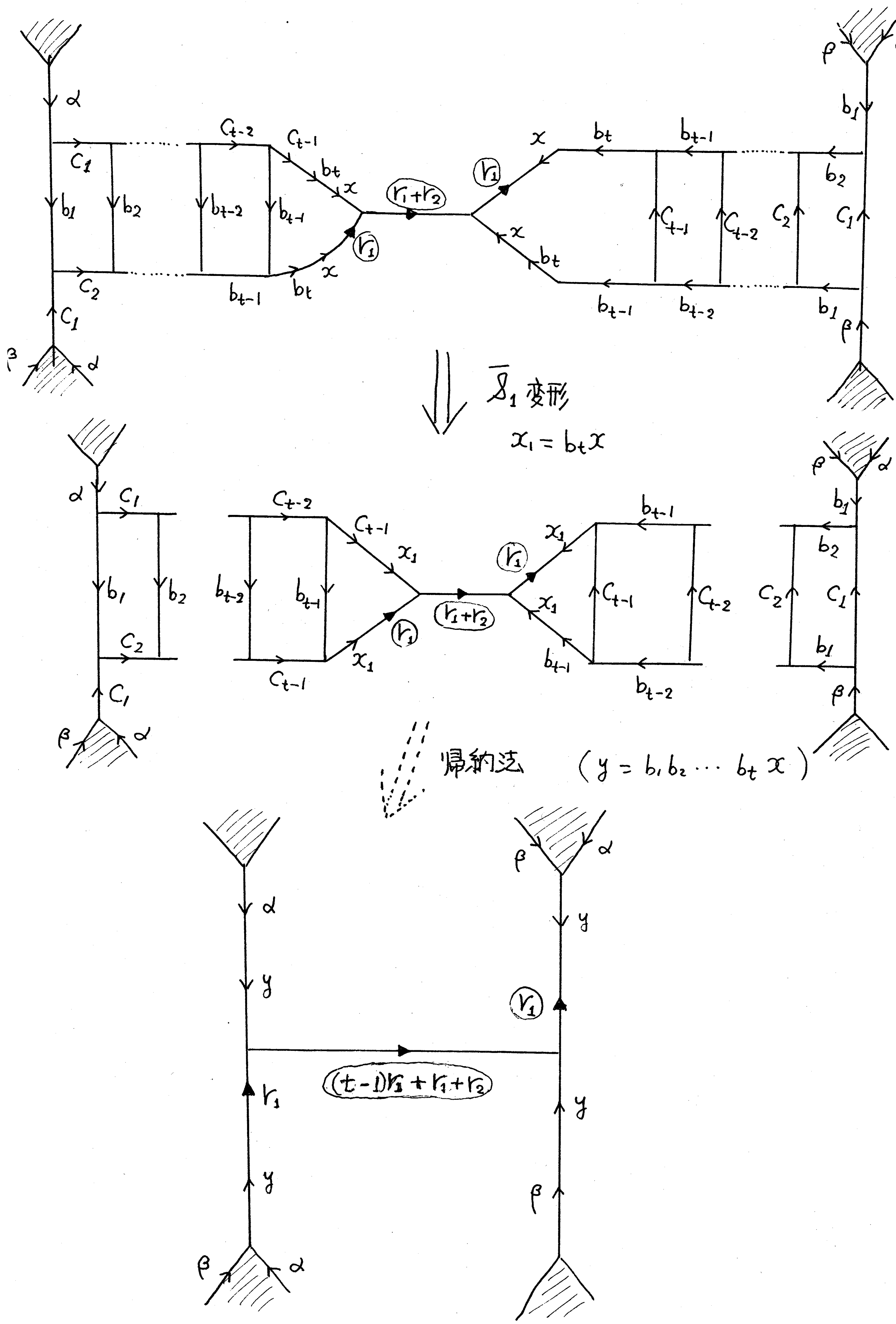
$\Downarrow$ $\mathcal{G}$ 変形



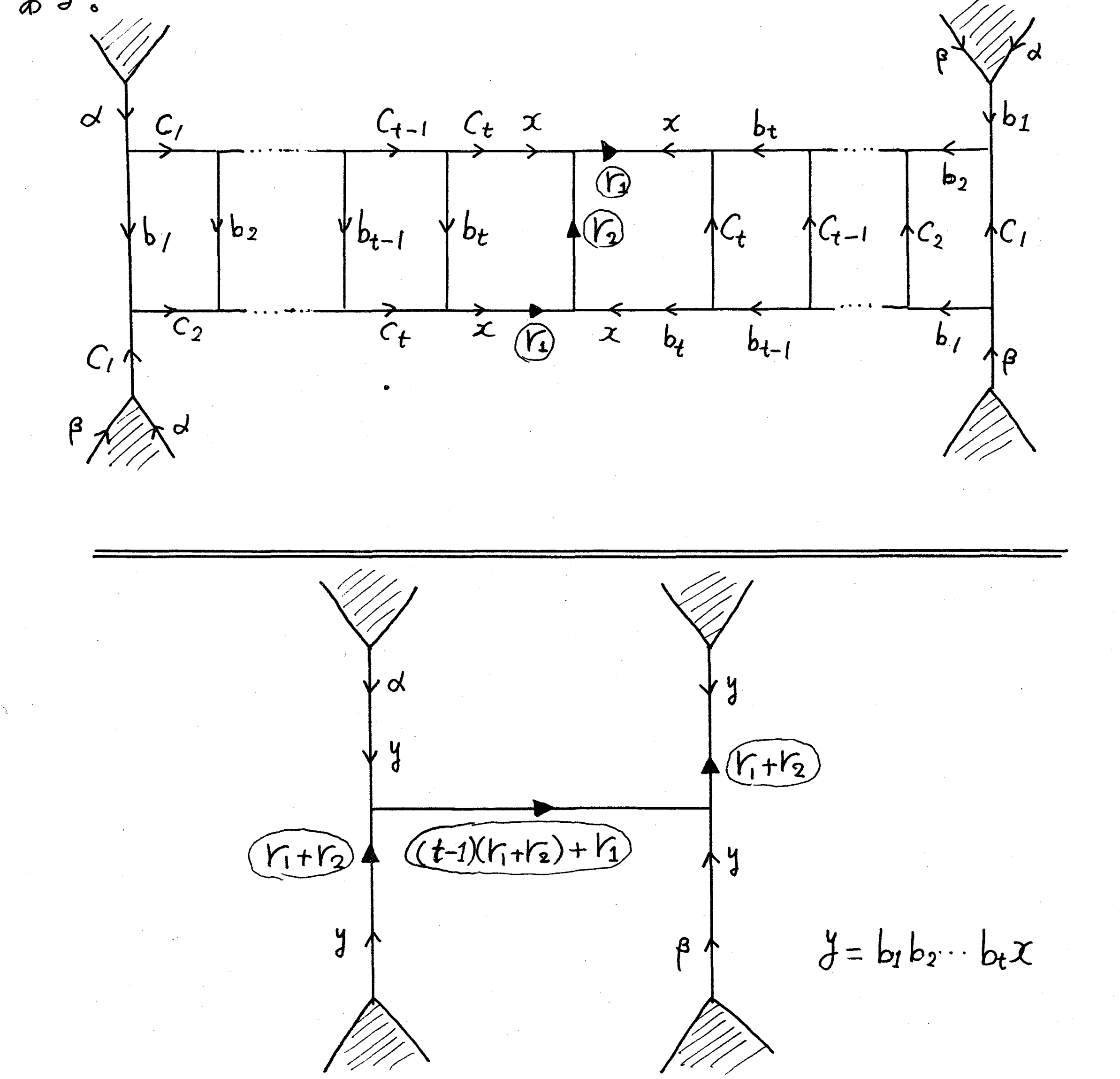
$\Downarrow$ $\mathcal{G}$ 変形



$\Downarrow$ $\mathcal{C}$ 変形


α
c_1
b_1
b_2
c_2
c_{t-2}
c_{t-1}
b_t
x
b_{t-2}
b_{t-1}
r_1
r_1+r_2
β
$\overline{\delta}_1$ 変形
$x_1 = b_t x$
x_1
帰納法 ($y = b_1 b_2 \cdots b_t x$)
y
$(t-1)r_1 + r_1 + r_2$

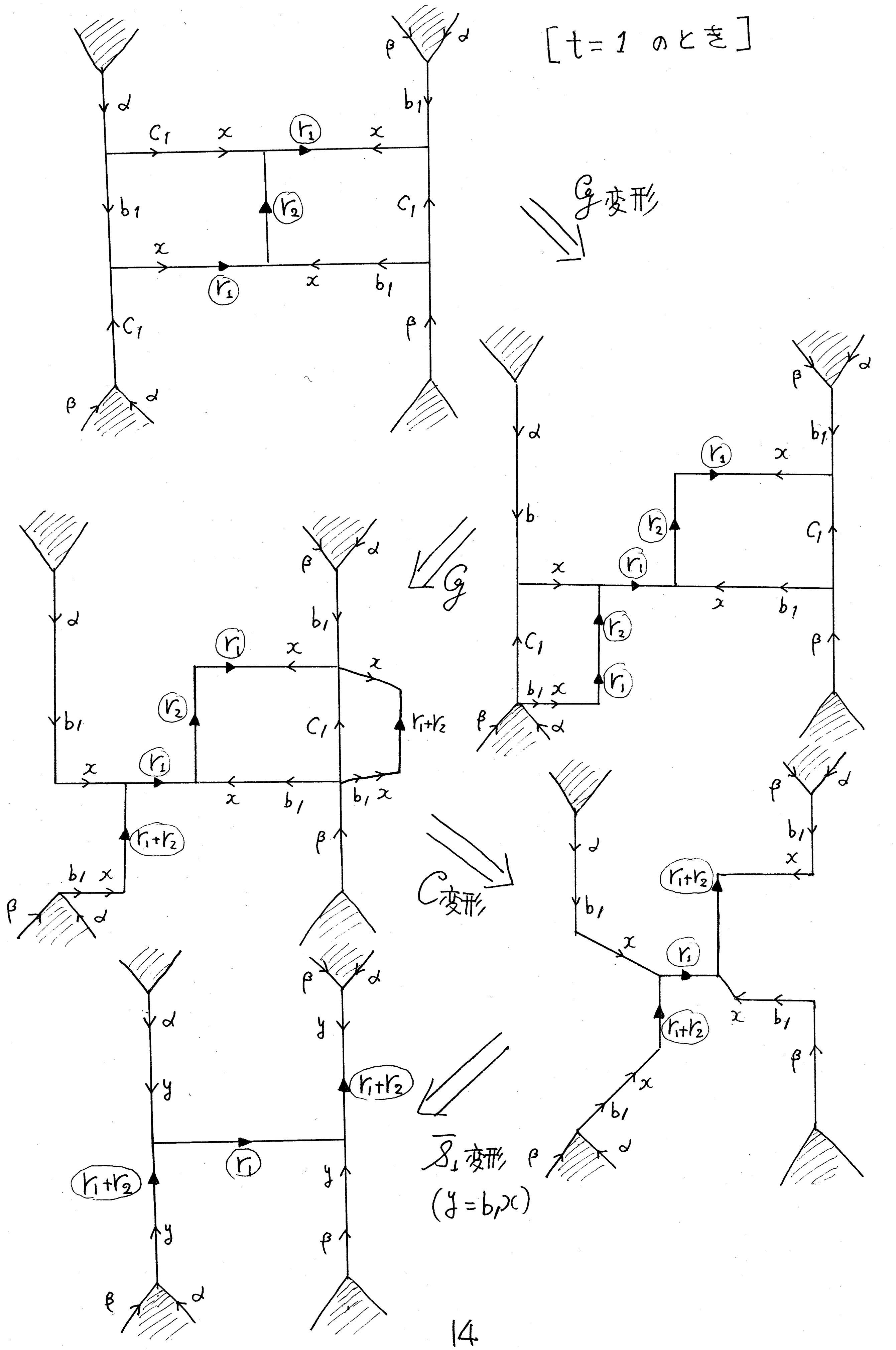
補題4　次の2つのpolygramは $\wp$-equivalentである。



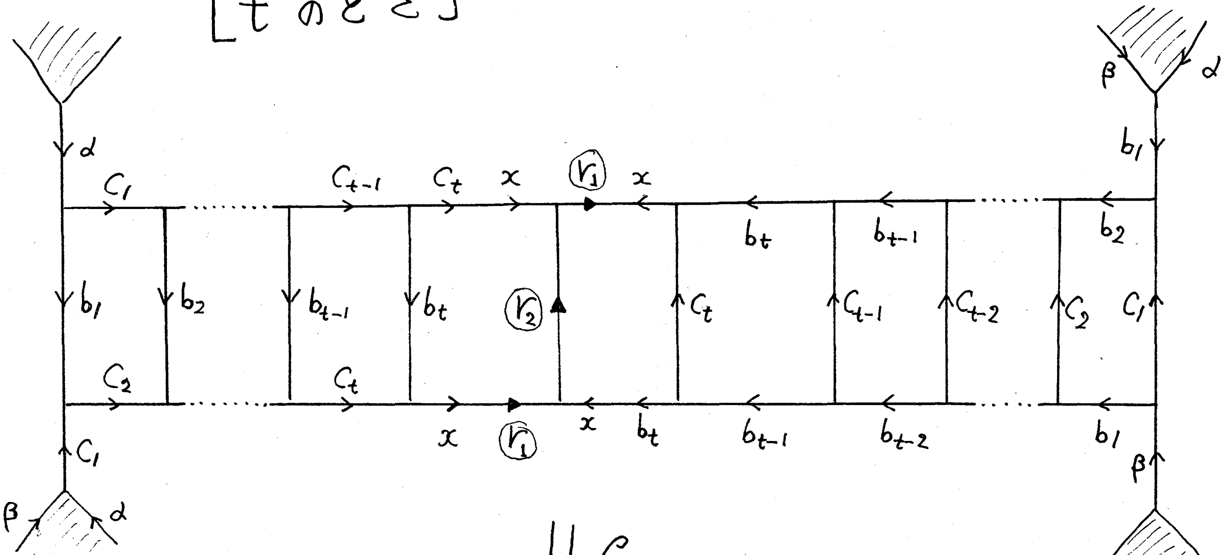
tは $t\geqq 1$ なる任意の整数, b_i, c_i $(1\leqq i\leqq t)$ は polygramの他の所には現われない。図についての記法は前の補題と同じ。(r_1, r_2 は任意の正の整数)

[証明]　$t=1$ のときをまず示し、$t\geqq 1$ のときは補題3を使って、次の図のように示される。($t=1$ も含まれるが)

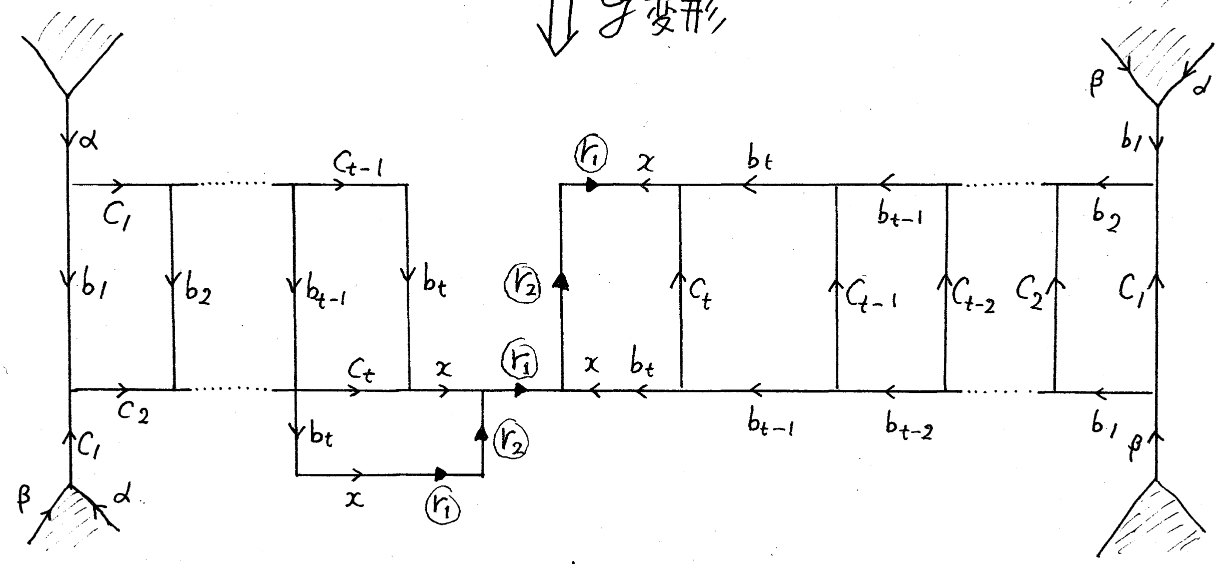
[t = 1 のとき]



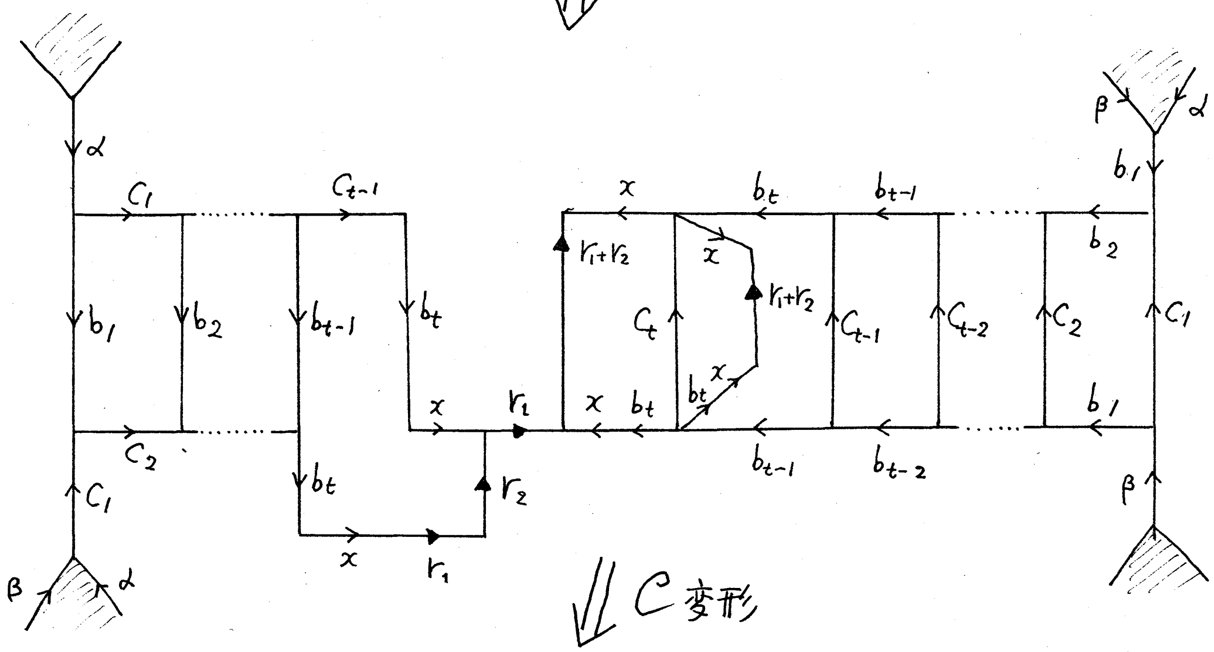
[t のとき]



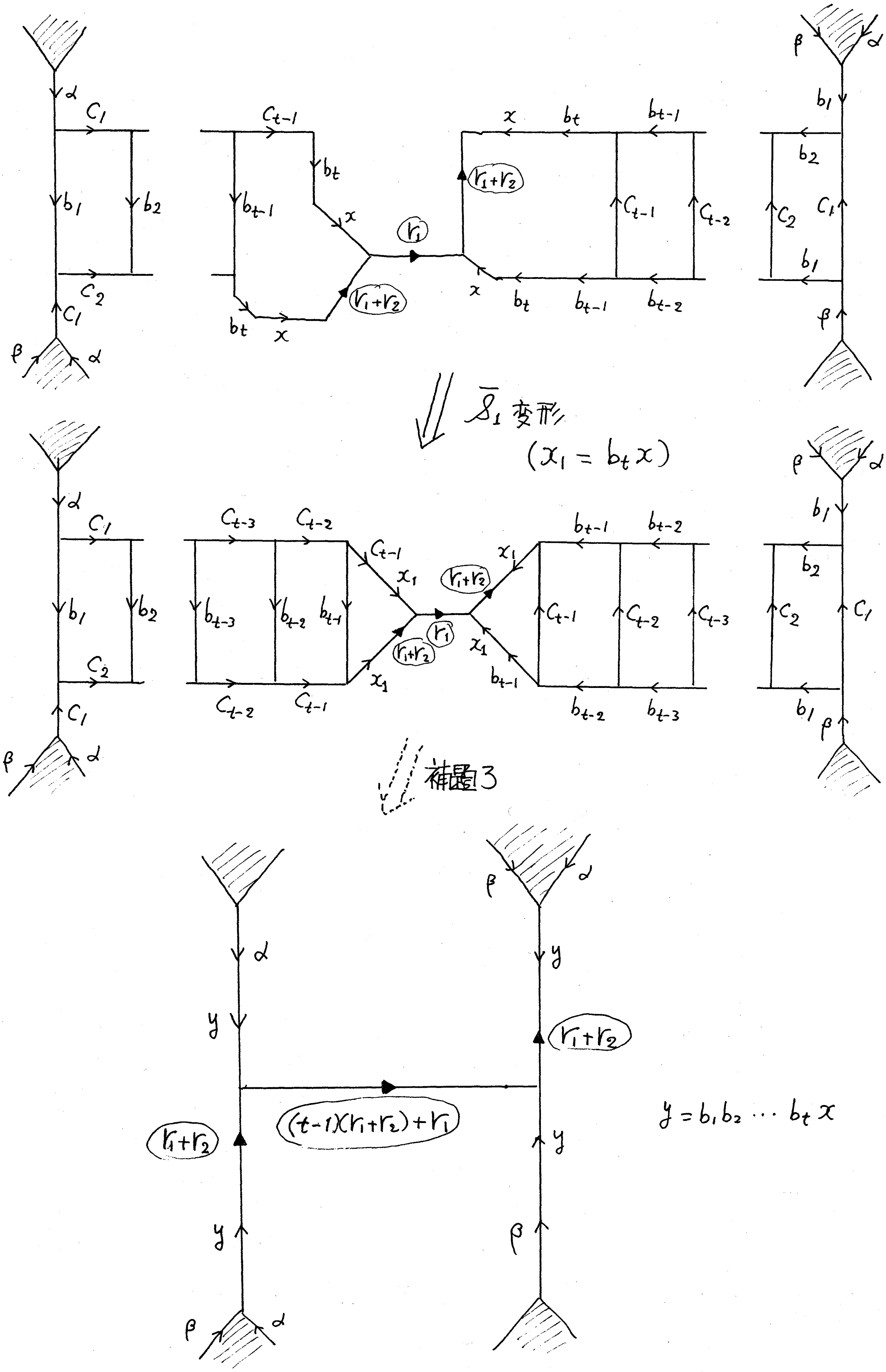
⇓ G 変形



⇓ G



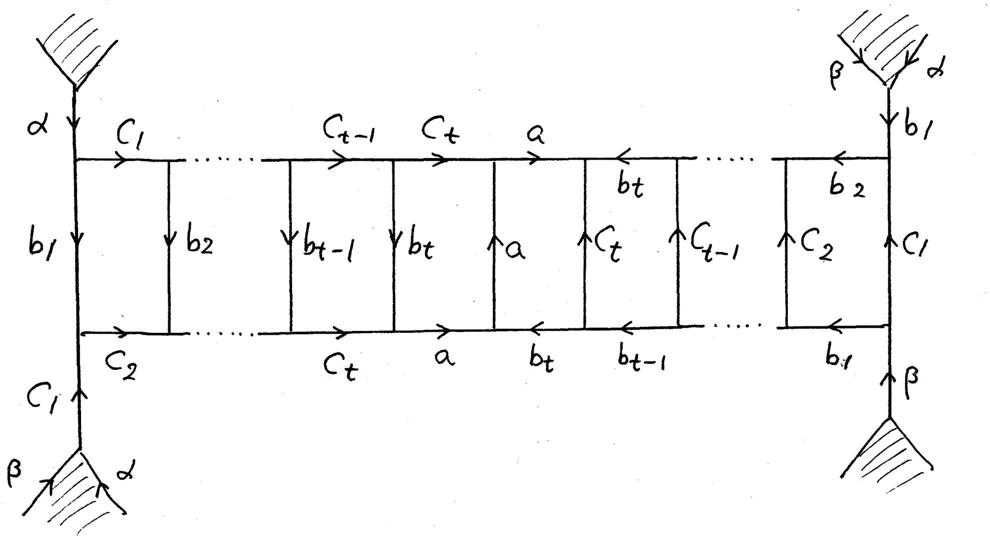
⇓ C 変形

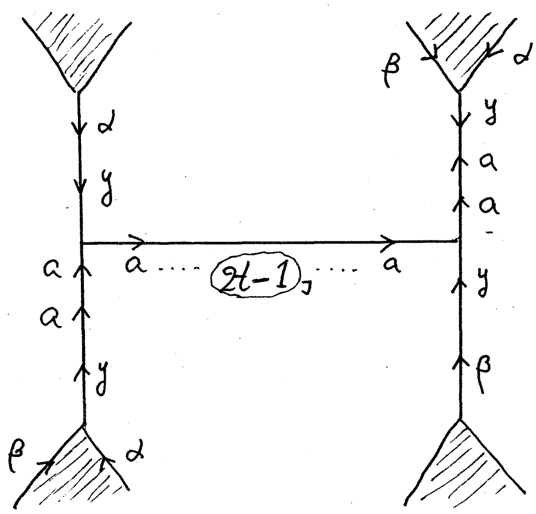


$\bar{S}_1$ 変形
$(x_1 = b_t x)$
補題3
r_1+r_2
$(t-1)(r_1+r_2)+r_1$
$y = b_1 b_2 \cdots b_t x$

特に $r_1 = r_2 = 1$ のとき（x がさらにないとき）

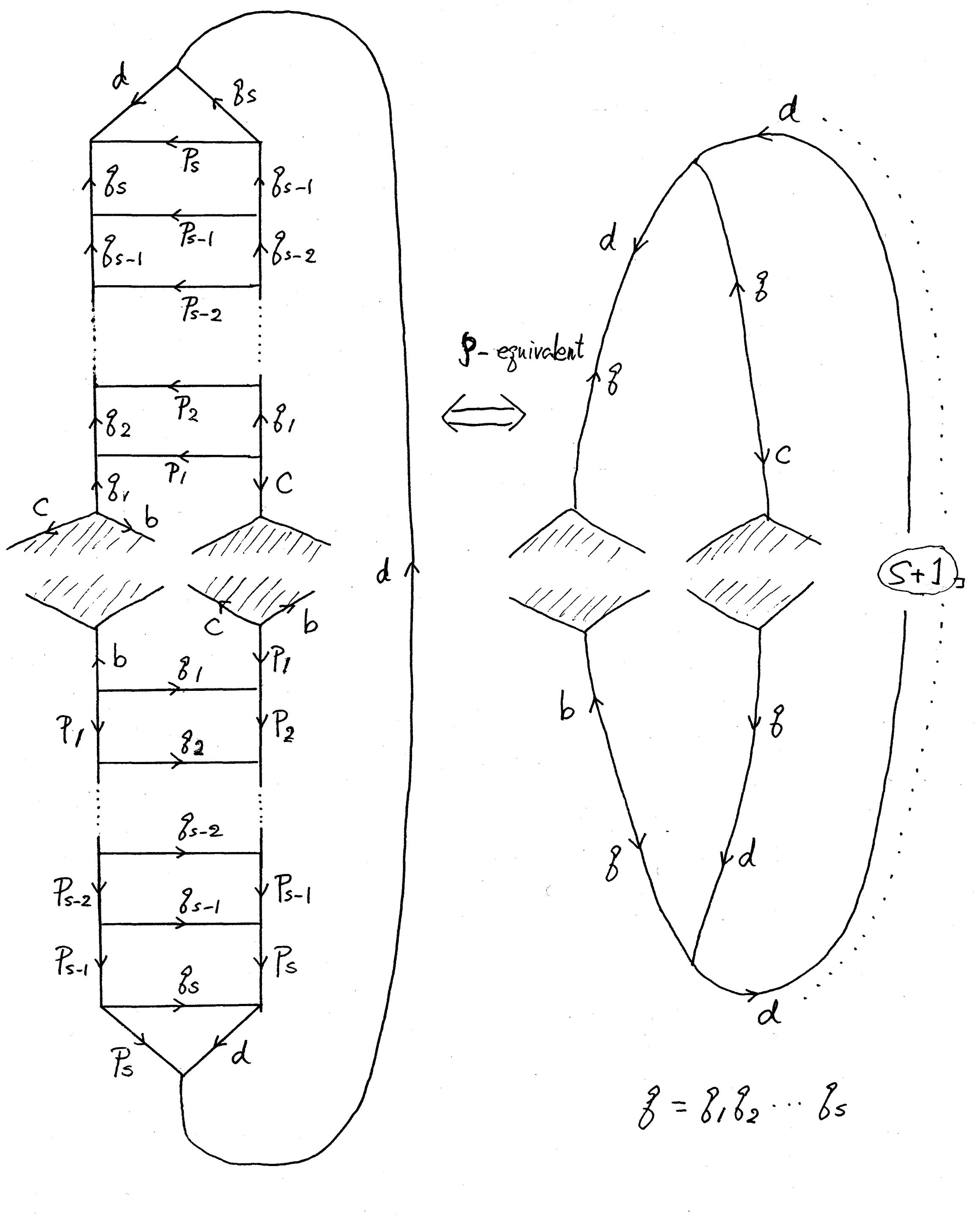
<u>補題 5</u>　次の2つの polygram は $\mathfrak{p}$-equivalent である





次に 補題1と同じ方法によって

<u>補題 6</u>　次の2つの polygram は $\mathfrak{p}$-equivalent である。


d
q_s
p_s
q_s
q_{s-1}
p_{s-1}
q_{s-1}
q_{s-2}
p_{s-2}
p_2
q_2
q_1
p_1
q_1
c
b
C
C
b
d
b
p_1
q_1
p_1
p_2
q_2
q_{s-2}
p_{s-2}
q_{s-1}
p_{s-1}
p_{s-1}
q_s
p_s
p_s
d
ρ- equivalent
d
d
q
q
c
b
q
q
d
d
S+1
$q = q_1 q_2 \cdots q_s$

§ 2　Lens space $L(p,q)$ の DS-diagram の構成法とその応用

この節では §1 の補題を使って，Lens space $L(p,q)$ の DS-diagram の“標準形”の構成法を述べ，$S_3(L(p,q))$ に関する命題と予想を述べる。

まず p, q が $p/2 > q \neq 1$ をみたすとしておく。その時，ユークリッドの互除法によって p と q が互いに素であるから，次のような式(⊛)の列が作られる。$\exists u \in \mathbb{N}$

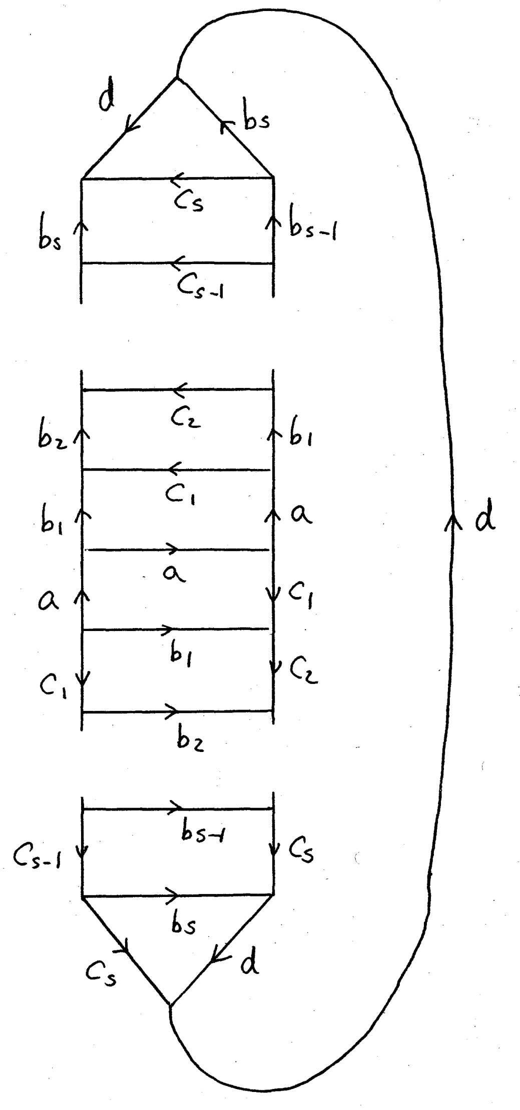
$$
(⊛)\quad
\boxed{
\begin{array}{llll}
\exists!\, q_0, r_1 \in \mathbb{N} & ; & p = q_0 q + r_1 & 1 < r_1 < q \\
\exists!\, q_1, r_2 \in \mathbb{N} & ; & q = q_1 r_1 + r_2 & 1 < r_2 < r_1 \\
\exists!\, q_2, r_3 \in \mathbb{N} & ; & r_1 = q_2 r_2 + r_3 & 1 < r_3 < r_2 \\
 & & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\exists!\, q_{u-2}, r_{u-1} \in \mathbb{N} & ; & r_{u-3} = q_{u-2} r_{u-2} + r_{u-1} & 1 < r_{u-1} < r_{u-2} \\
\exists!\, q_{u-1}, r_u \in \mathbb{N} & ; & r_{u-2} = q_{u-1} r_{u-1} + r_1 & 1 = r_u < r_{u-2}. \\
\exists!\, q_u \in \mathbb{N} & ; & r_{u-1} = q_u r_u & (q_u = r_{u-1})
\end{array}
}
$$

ここに $\mathbb{N}$ は正の整数(自然数)全体の集合を表わす。

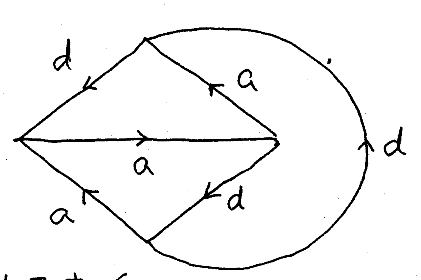
このとき $L(p,q)$ の DS-diagram は

定理 1　$p/2 > q > 1$ をみたす Lens space $L(p,q)$ の DS-diagram は次のようにして上の式の列(⊛)から構成される。

$q=2$ のときは　$u=0$ であって $L(p,q)$ の DS-diagram は　$s=(p-5)/2$ とおくと

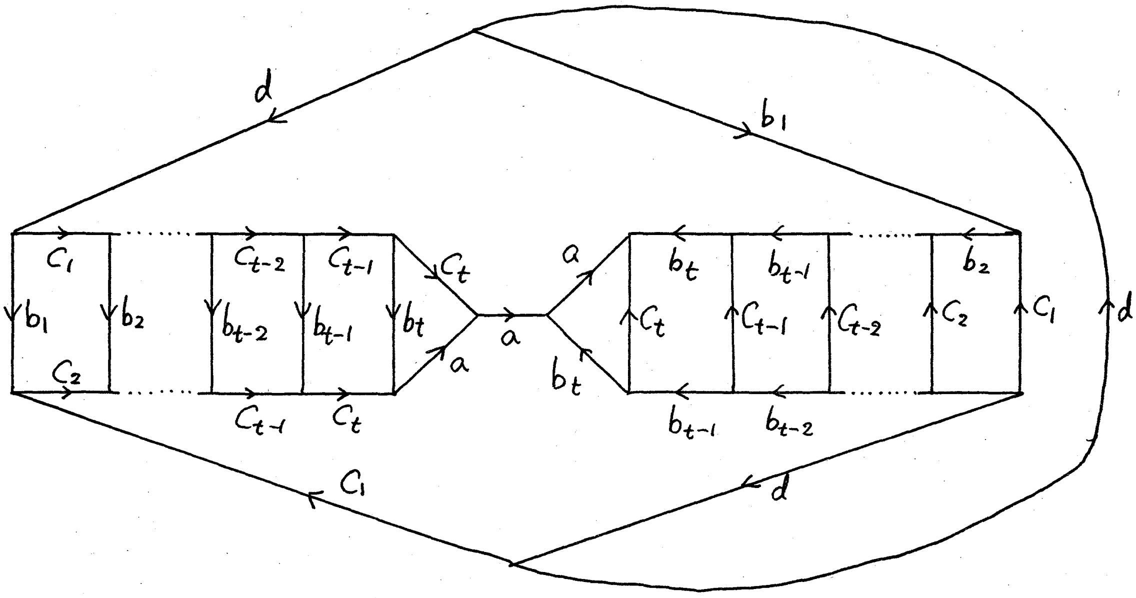


であって　特に $p=5$ のときは

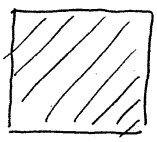


よって $q>2$ としておく。

[Step 0]* 仮定より $g_0 \geqq 2$ で $g_0=2$ で $u=1$ のときは $t=(p-5)/2$ とおくと $L(p,g)$ の DS-diagram は



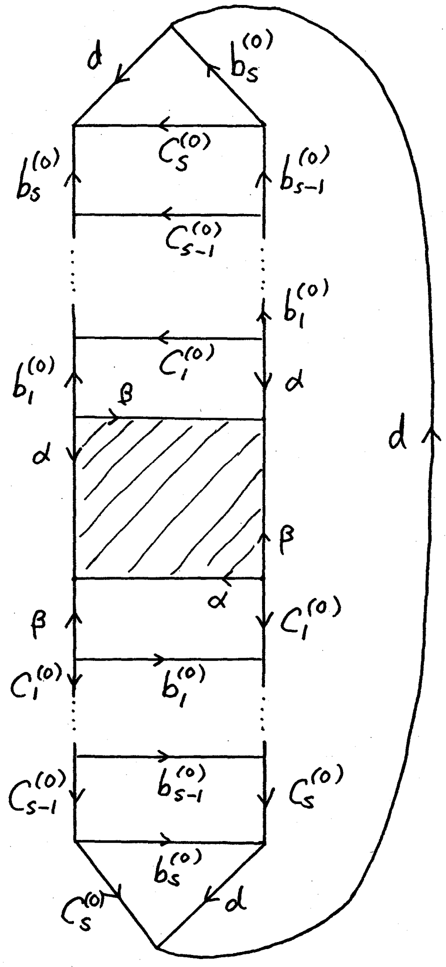
である。（$p=5$ のときは $g=2$ で $L(5,2)$ となり前述） さて 一般に $g_0>2$ であるか $g_0=2$, $u>1$ のときは，まず Step 0 で次のような diagram (polygram) の一部 の一部 をかき そして次の Step の polygram の一部をかき，それを



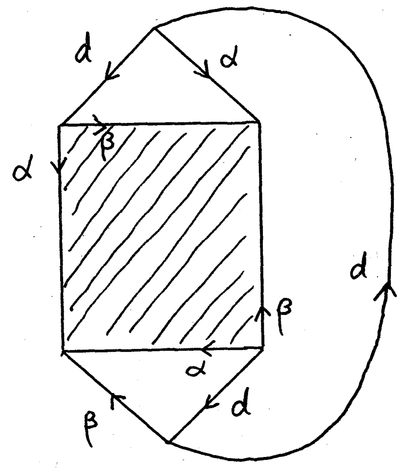
のなかに入れて，次の Step に進む。これを u までくりかえす。最後の Step はもう一度きちんと最後にかくことにする。

[step 0] 仮定より $g_0 \geqq 2$ で

$g_0 > 2$ のときは $s = g_0 - 2$ とすれば

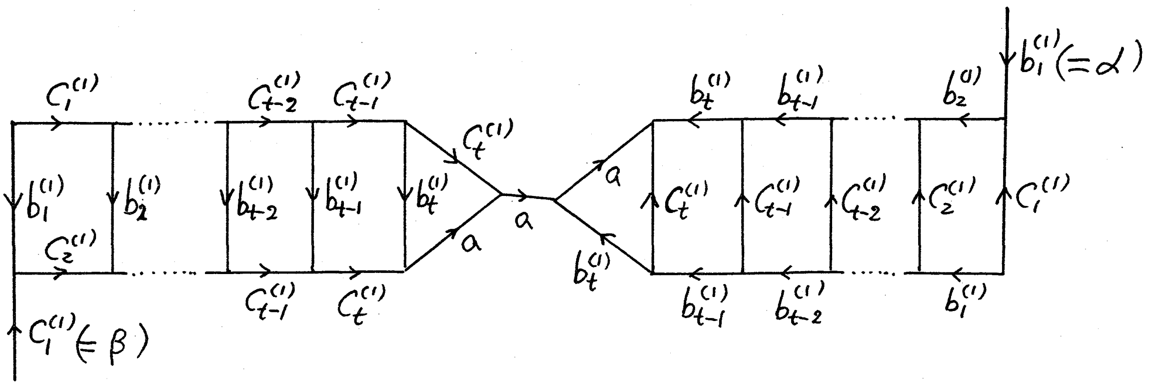


$g_0 = 2$ のときは
($u > 1$)

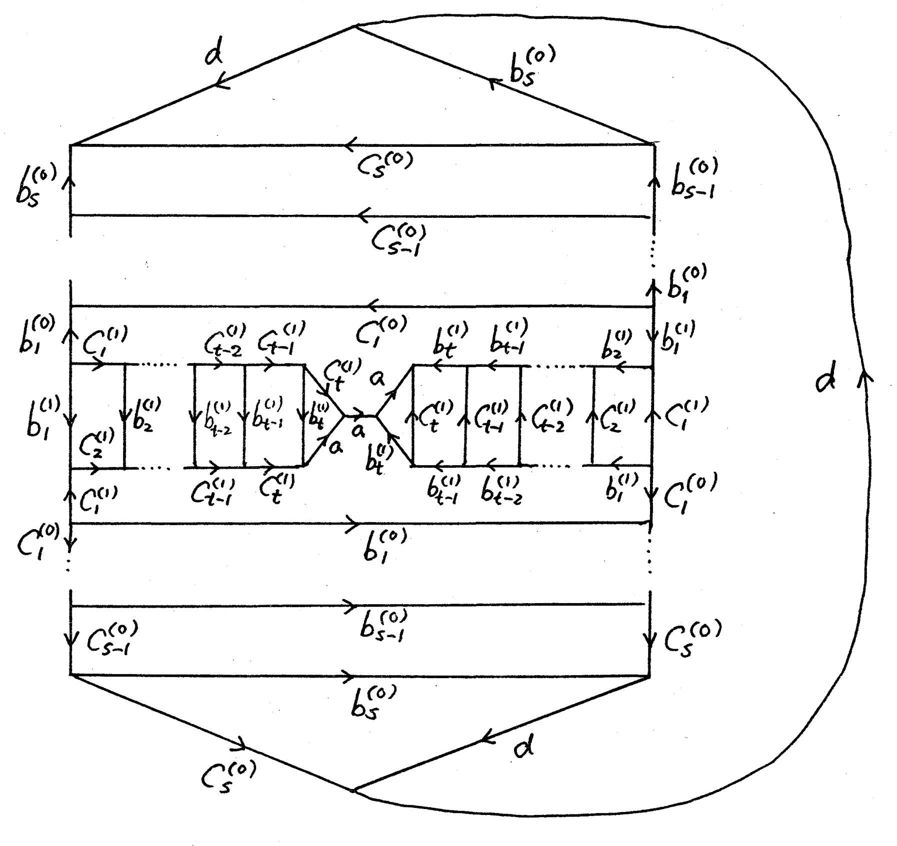


[Step 1] $r_0 = 1$ のときは $u = 1$ で次の図1A になり $r_0 = 2$ のときは $u = 2$ で次の図1Bになり その他 $r_0 > 2$ のときは図1C となり次のstepに進む.

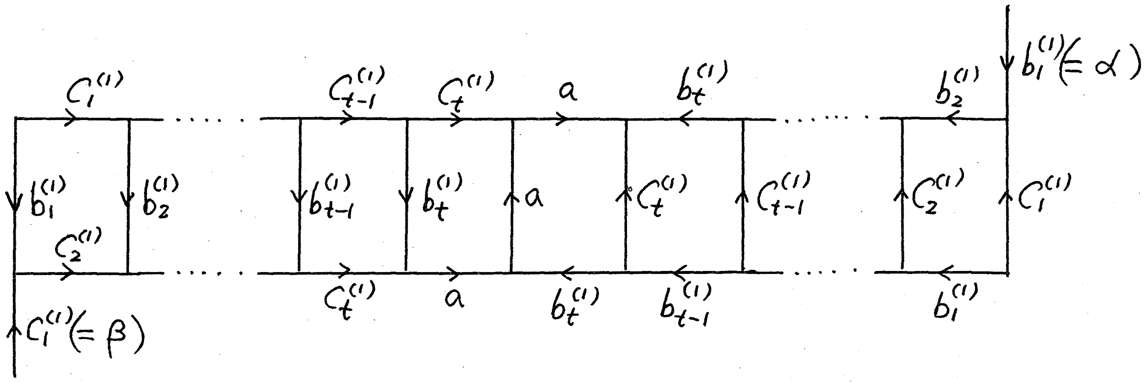
（図１Ａ）　　$t = g_1 - 2\ (= g - 2)$ とおくと



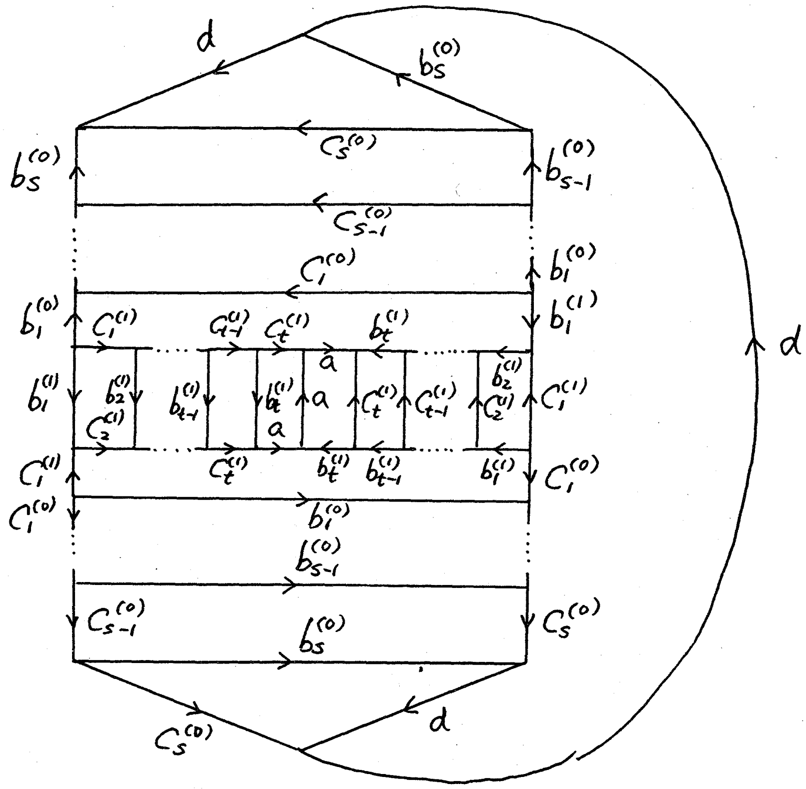
このとき，DS-diagram は　（$s>0$ で）



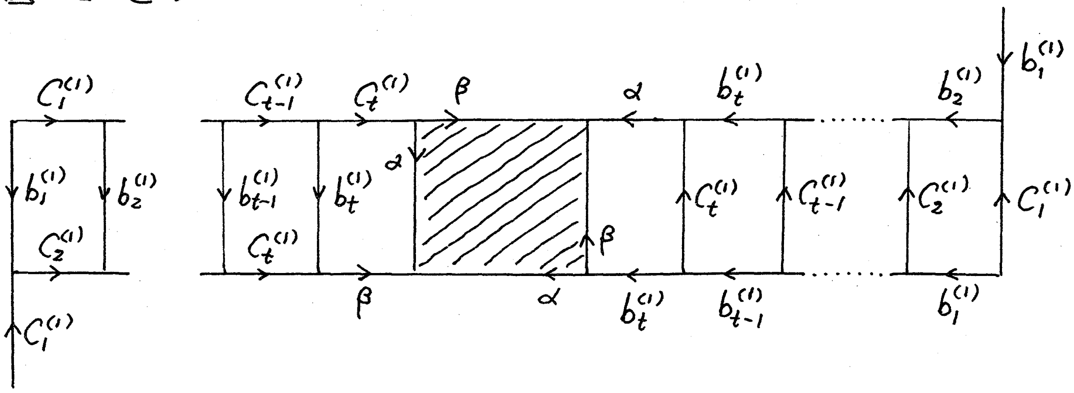
（図 1 B）　$t = q_1$　($q = 2q_1 + 1$) とおくと



このときは，DS-diagram は　($s = 0$ のときもある)



(図 1C)　$t=\delta_1$ とおくと

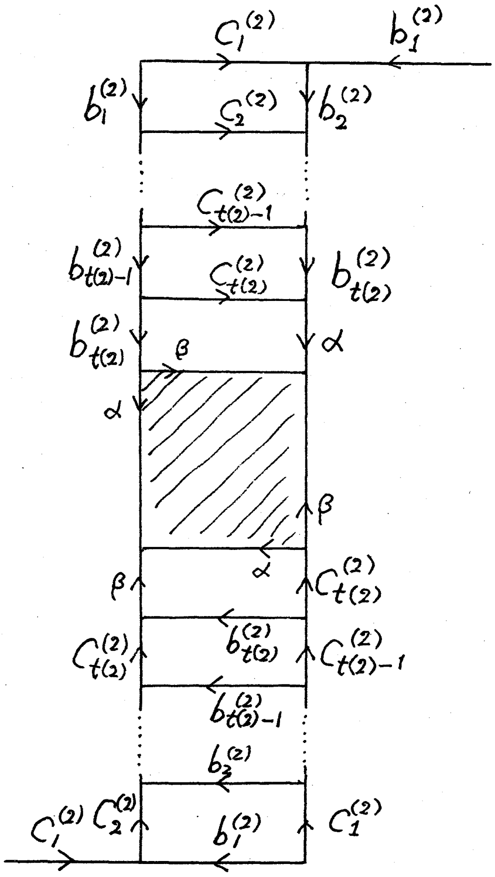


[Step 2]　$r_2=1$ のときは $u=2$ で図2Aになり $r_2=2$ のときは $u=3$ で図2Bになり、$r_2>2$ のときは図2Cとなり次のStepに進む。まず図2Cから書いておく。

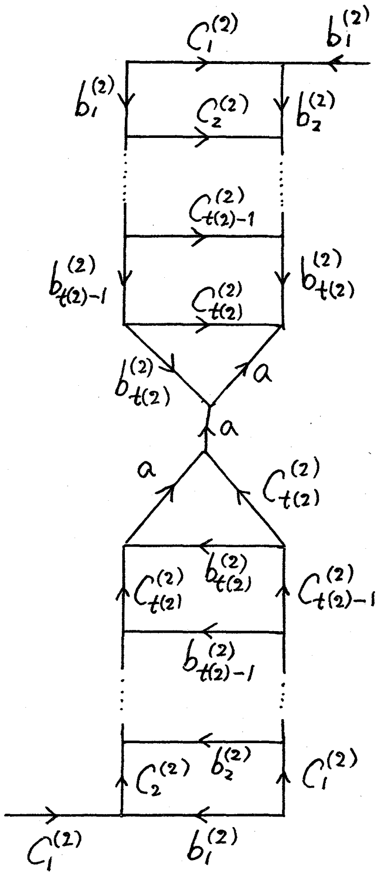
(図2C)

$t(2)=\delta_2$

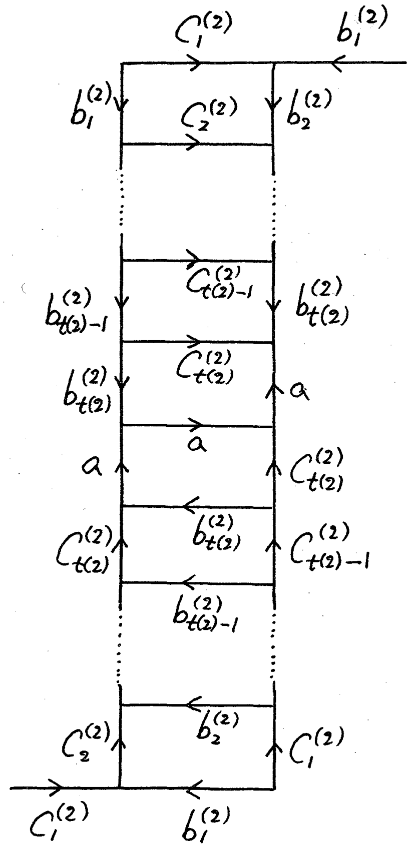
とおくと



（図 2 A） $t(2)=g_2-2$ とおくと



（図 2 B） $t(2)=g_2$ とおくと



であって，

図2A のとき($u_2=1$のとき)の DS-diagram は

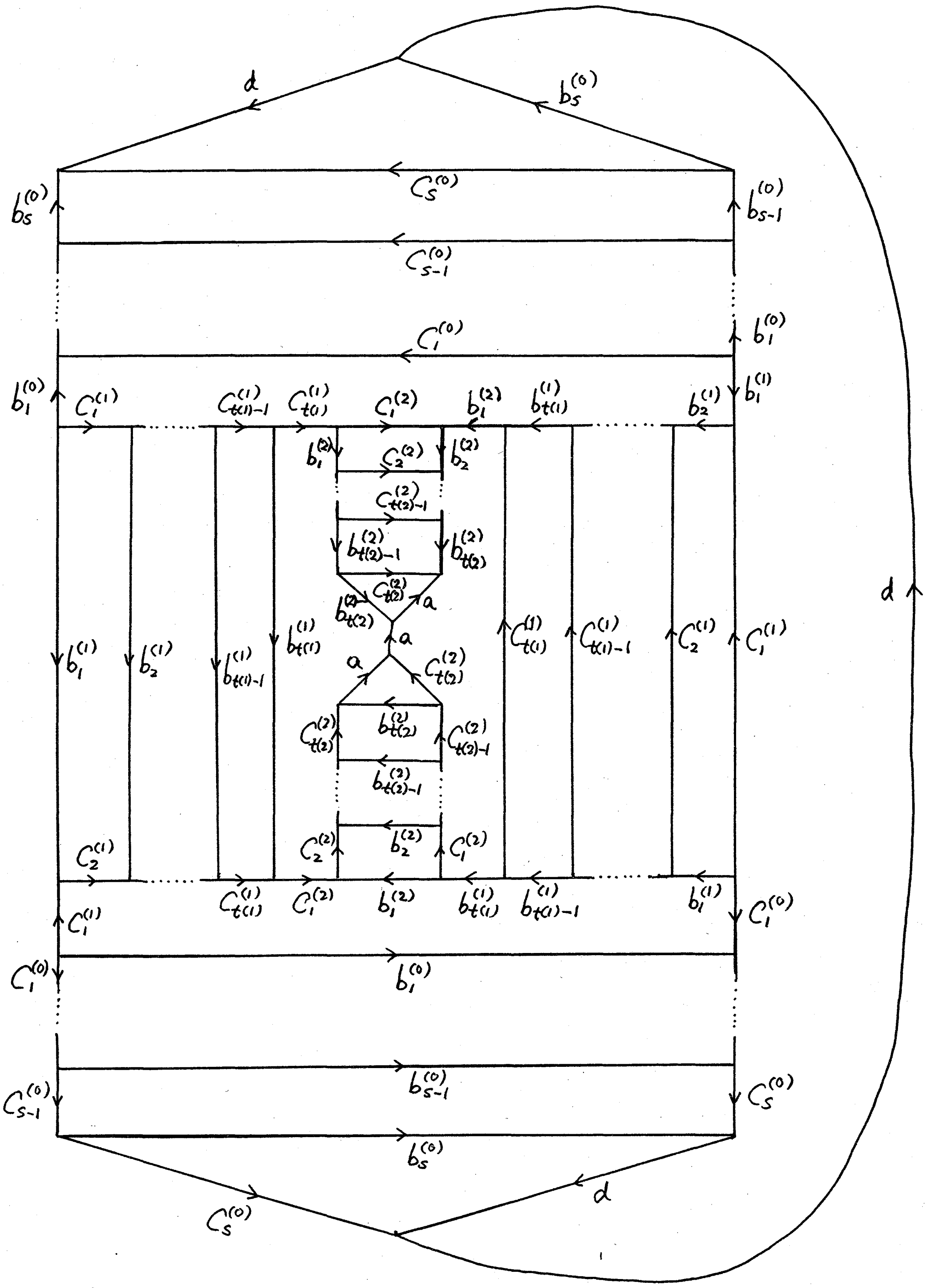
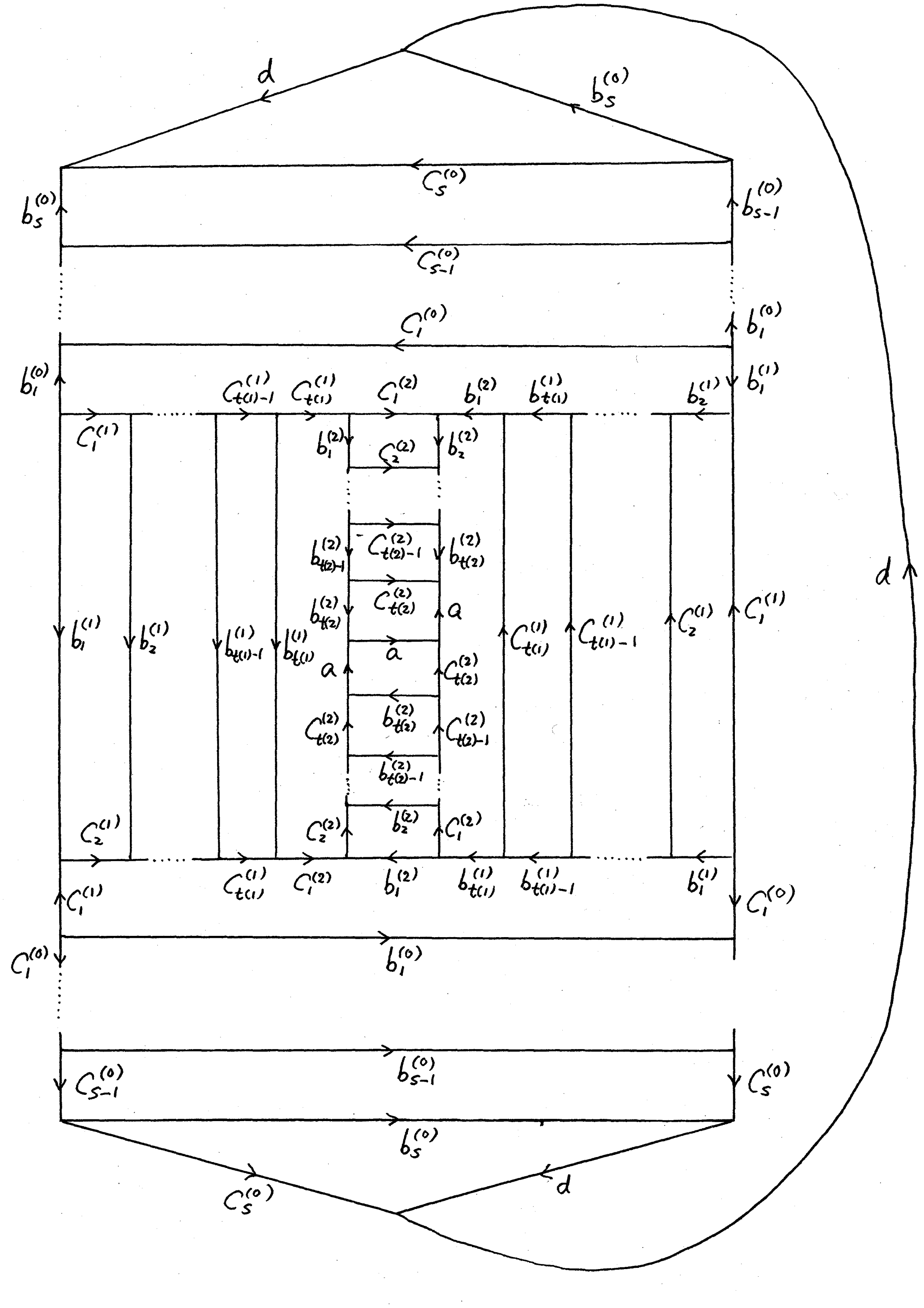


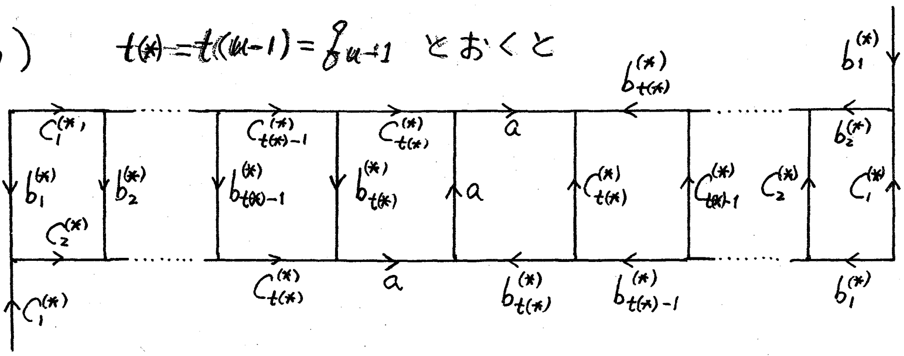
図２Ｂのとき（$u_2 = 2$のとき）のDS-diagramは



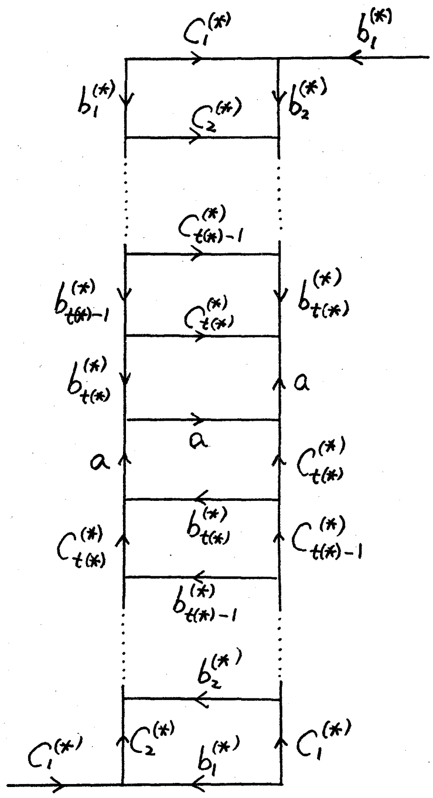
[Step $u-1$]　uの性質より $r_{u-1} \geqq 2$ だから $r_{u-1}=2$ のときは図$(u-1)$Bで終わり、$r_{u-1}>2$ の時は図$(u-1)$Cになり次のStep uに進んで終了する。

(図$(u-1)$B)　$\cancel{t(*)=t(u-1)}=g_{u-1}$ とおくと

$(u-1)$: odd のとき



$(u-1)$: even のとき

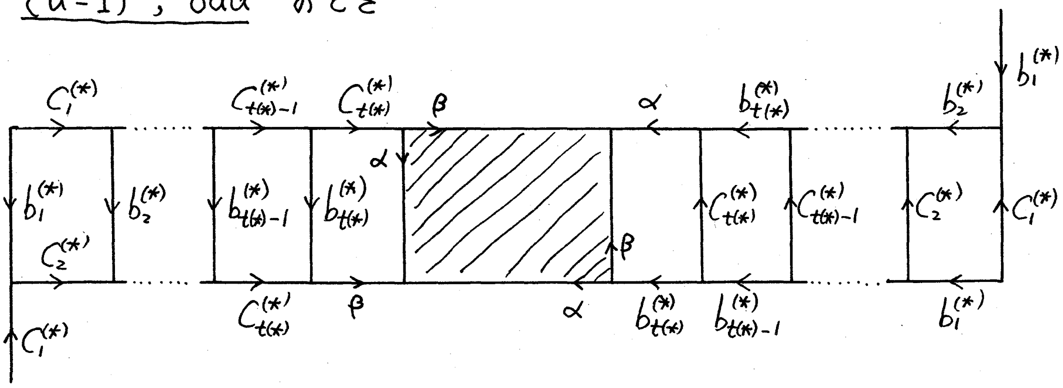


但し $b_i^{(*)}=b_i^{(u-1)}$, $C_i^{(*)}=C_i^{(u-1)}$ $(1\leqq i\leqq t(*)=t(u-1))$ と表わす。

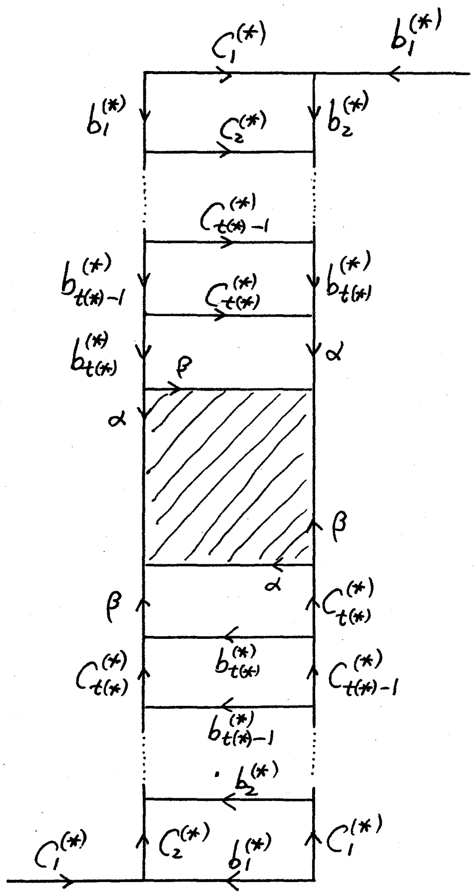
（図 (u-1) C）　　$t(*) = t(u-1) = g_{u-1}$ とおくと

$b_i^{(*)} = b_i^{(u-1)}$, $C_i^{(*)} = C_i^{(u-1)}$ $(1 \leq i \leq t(*) = t(u-1))$ と書わすと

(u-1) ; odd のとき



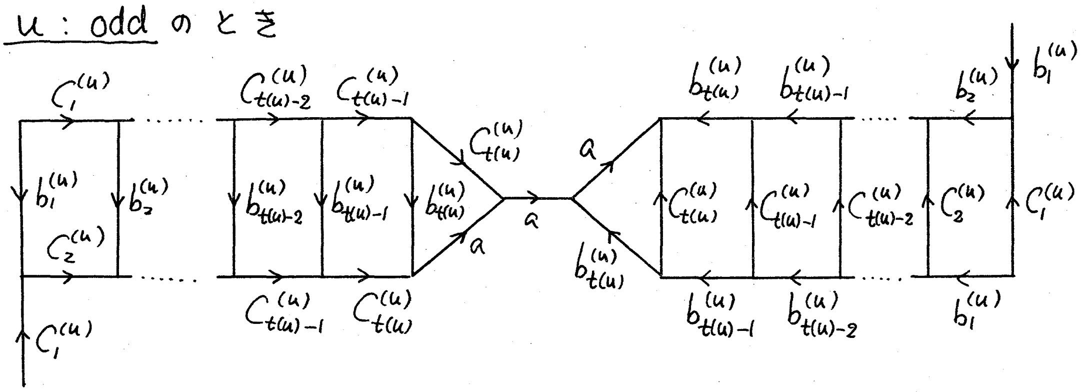
(u-1) ; even のとき



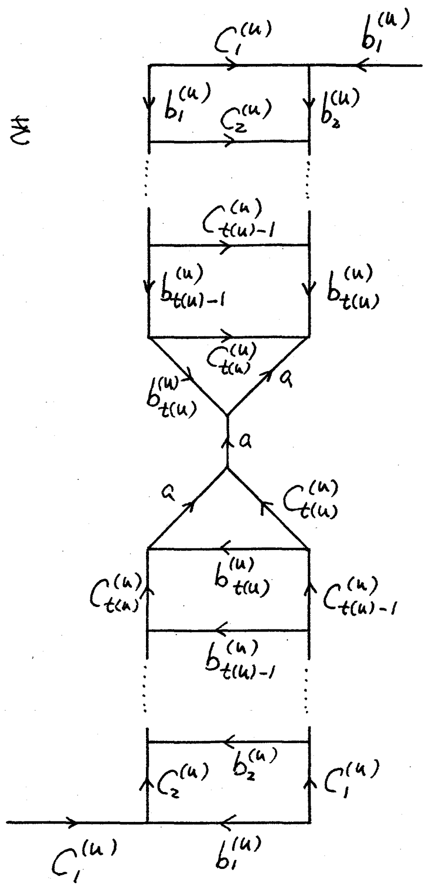
[Step u]　$r_u = 1$ で $r_{u-1} > 2$ としてよい。その時は図uになり終了する。

(図u)　$t(u) = g_u - 2$ とおくと

u : odd のとき

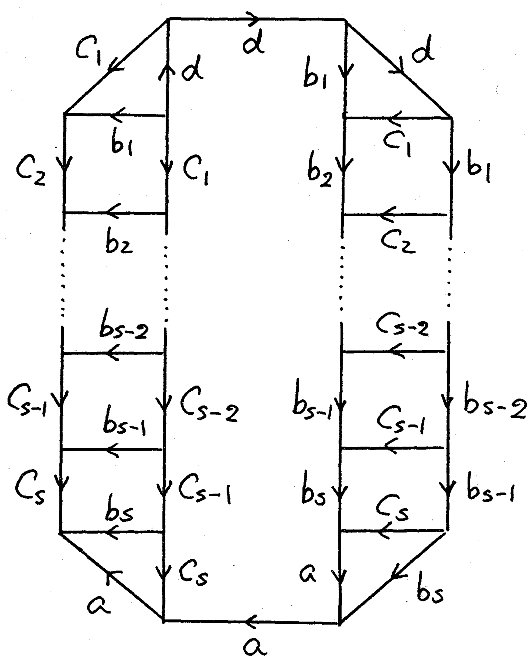


u ; even のとき



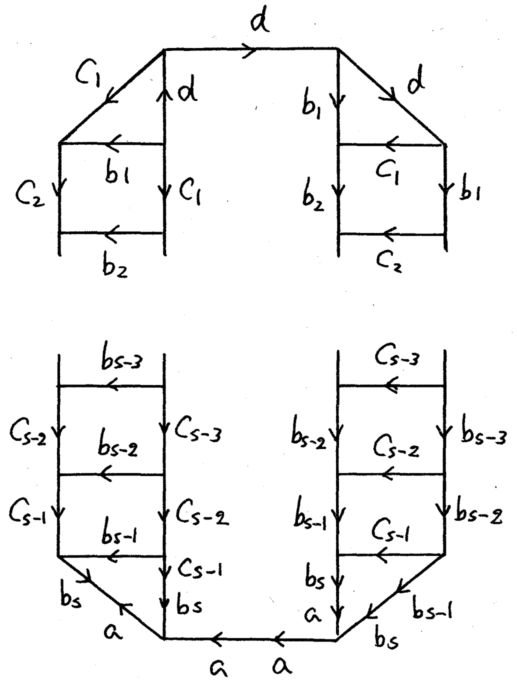
Q.E.D. ▨

<u>定理2</u>　$g=1$ のとき（但し $p=2$ と $p=3$ は除く）　Lens space $L(p,1)$ の DS-diagram は $s=p-3$ とおけば



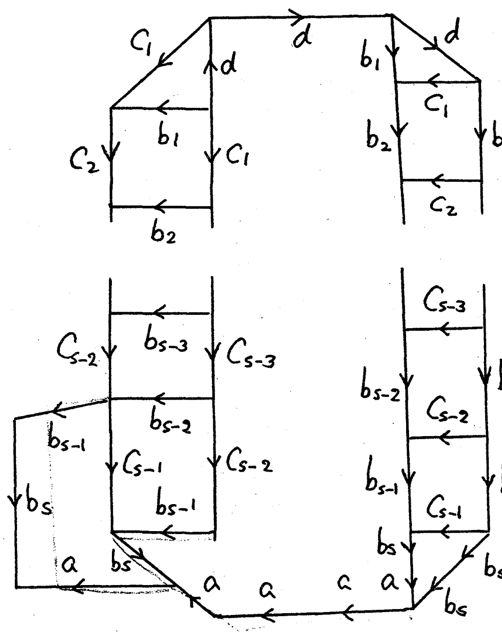
[証明]　$p=4$ については [4] の p5 と同じ（$\xrightarrow{a}$ と $\xleftarrow{a}$ とみればよい），$p=5$ についても [4] の p14 と同じ（$\xrightarrow{g}$ を $\xleftarrow{a}$ とみればよい）。　$p>5$ については次の図のように変形をおこなえば $\xleftarrow{a}$ を $\xleftarrow{a}\cdots\cdots\xleftarrow{a}$ とすれば，

$p=5$ のときと同じ証明ができるので，p に関する帰納法で証明できる。

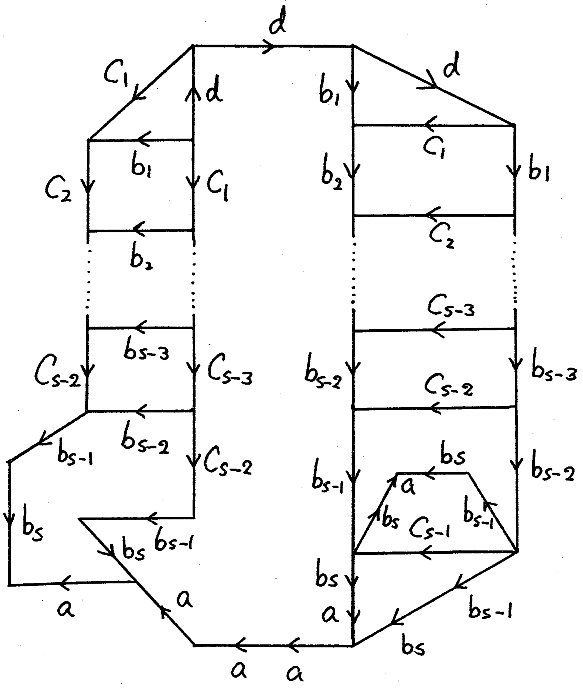


帰納法で（$c_{s-1}b_s$ について $\mathcal{G}$変形をして，c_{s-1} について $\mathcal{G}$変形をして c_{s-1} で $\mathcal{C}$変形をすれば）示される。
ねんのために書いておくと

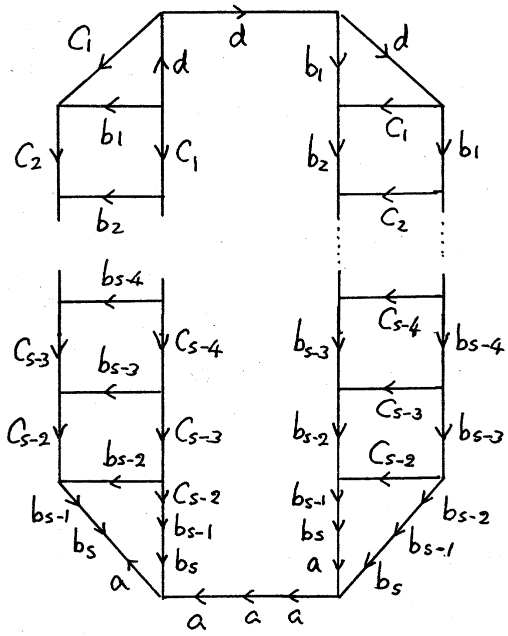
$\Longrightarrow$ $\mathcal{G}$変形



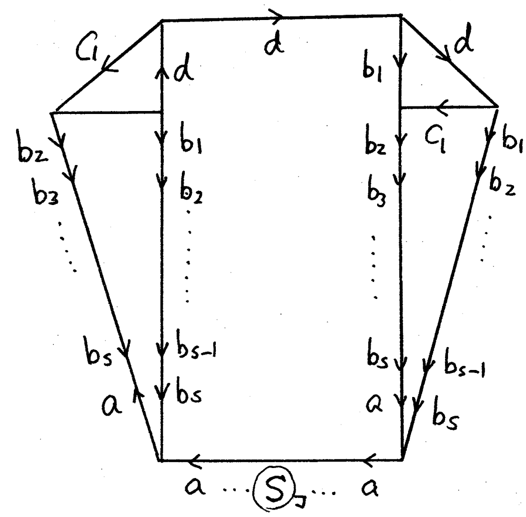
$\Longrightarrow$ $\mathcal{G}$変形



$\mathcal{C}$変形 [C_{s-1}]

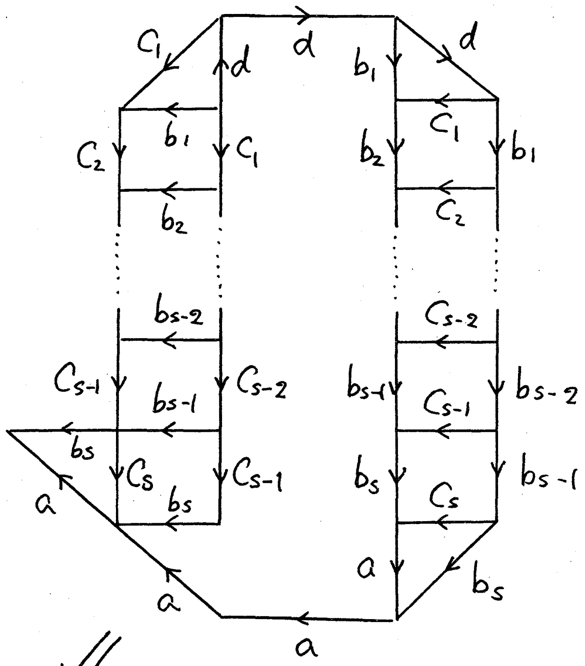


. . . .

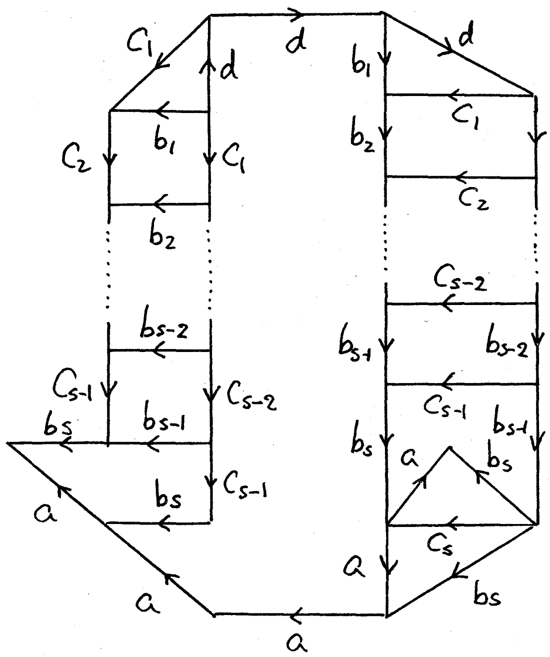


あとは $p=5$ の場合と
同様にして

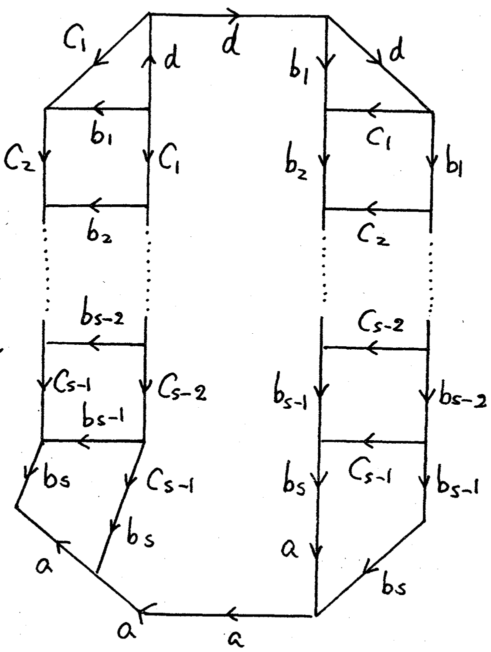
⇓ 𝒢変形

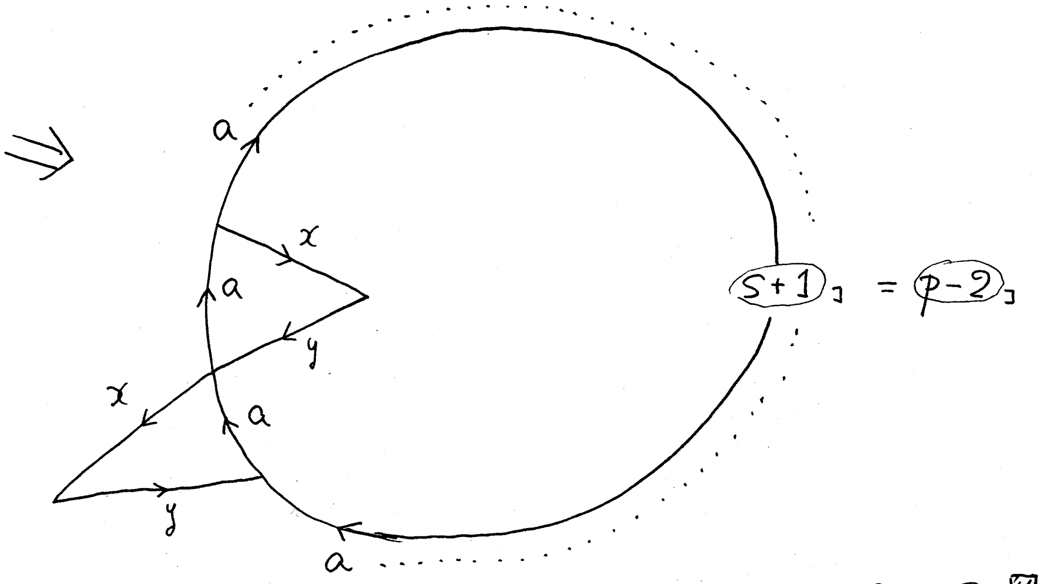


⇓ 𝒢変形



⟹ $\mathcal{C}$変形 [C_s]





Q.E.D. ▨

<u>命題３</u>　$L(2,1)$ と $L(3,1)$ は例外で [４] の p5 あるいは [２] の (2-4) が $L(2,1)$ の DS-diagram であり。[４] の p9 (or p12) あるいは [２] の (2-5) (or (2-10)) が $L(3,1)$ の DS-diagram である。

さて残った $p > q \geqq p/2$ のときであるが Lens space $L(p,q)$ と $L(p,p-q)$ は orientation が反対であるだけで，位相同型だから $L(p,p-q)$ に対して定理１，２，命題３で（$p/2 \geqq p-q$ だが ＝ はない）DS-diagram を構成して，それをうらがえせば（miror image をとれば）よい。（向きをきにしなければ，そのままでもよい）。

実際は向きがついているときには，同調する所をかえないように，基本変形 l の（1）のとき矢印の向きをかえない，基本変形 δ，δ のとき向きをそのままに保つようにすれば，向きを保つ位相同型写像を3次元多様体に与えるので，orientation preserving homeomorphism で このNote では Lens space の polygram の変形は全て orientation preserving なものしか使っていない)。

さて次に $S_3(P)$ であるが，それは実際に計算してみると分かるように　（$q=1$ も（⊛）を行なって）

定理 4　上に与えられた Lens space $L(p,q)$ の DS-diagram に対応する fake surface P の $S_3(P)$ は次の式で求められる。（$L(2,1)$，$L(3,1)$（$\approx L(3,2)$）は例外）

$$\#_3 = q_0 + q_1 + q_2 + \cdots\cdots + q_u - 3$$

$\boxed{\text{予想}}$　Lens space $L(p,q)$ に対する $S_3(L(p,q))$ も上で式で与えられる？

命題 5　（$p=2, q=1$ と $p=3, q=1$，$p=3, q=2$ を除いて）

$$S_3(L(p,q)) \leq \#_3(p,q)$$

命題 6　$S_3(L(p,q)) \leq 3$ までは上の予想は正しい。（[2] と [4] による）

参考文献

[1] H. Ikeda : Acyclic fake surfaces, Topology 10 (1971) 9−36

[2] H. Ikeda & Y. Inoue「3次元多様体，Fake surfaces, D-S graphs」京都大学数理解析研講究録 524『多様体と Fake surfaces』21−45（1984年5月）

[3] M. Yamashita & K. Yokoyama「DS-diagram の基本変形」京都大学数理解析研講究録 524『多様体と Fake surfaces』46−83（1984年5月）

[4] M. Yamashita & K. Yokoyama「DS-diagram の基本変形 II」京都大学数理解析研講究録 542『低次元多様体の幾何構造と位相構造』81−96（1985年1月）

[5] H. Ikeda, M. Yamashita & K. Yokoyama「polygram とその基本変形」（当講究録）