

領域競合をもつ待ち行列の解析

日本電気㈱ C&Cシステム研究所 紀 一誠 (Issei Kino)

I. はじめに

本稿では、コンピュータシステムあるいは通信システムの性能評価を行なう際にしばしば現われる領域競合をもつ待ち行列の解析を行なう。このモデルは、コンピュータシステムにおける主記憶領域の競合モデルとして、あるいは通信システムにおけるバッファ領域の競合モデル等に應用されるものであり、モデルの原型はKnuth(1)によるリロケーションモデルである。待ち行列の問題としてこの問題を最初に解析したのはBettridge(2)であり、文献(2)では、プロセッサシェアリング・サービスと無限待ち行列 (saturated queue)を仮定して解析をおこなっている。

伊沢(3)はプロセッサシェアリング・サービスの仮定を外し、無限待ち行列モデルの解析を行ない、領域使用客数の分布を導いている。また、Bryant, R.M.(4)はこのモデルに関して、要求ユニット数の同時分布が積形式になることを示し、客の退去直後の領域使用客数の分布および任意時点での領域使用中の客数の分布を導き、さらにサービス要求時間の異なる複数の客の存在するモデルへの拡張を試み近似解を得ている。このモデルの自然な拡張として、到着過程を考慮したモデルが考えられる。Bryant(4)はこのモデルの到着率の上限値、即ち定常解の存在条件を導いている。紀(5)は到着過程のある一般の場合を資源切り出し型待ち行列モデルとして解析した。しかし、文献(5)には誤りがあり正しい解を得るには至っていない。本稿では、まず、無限待ち行列を仮定するモデルを再考し、系の状態の lumpability、およびマルコフモデルの等価性に関するいくつかの興味深い性質について考察し、このモデルを解析する際の問題点を整理しておく。次に、到着過程を考慮した場合の小規模なモデルについて、母関数法を用いて解析を行ない、厳密解を導く。さらに、文献(5)に示されている方法について、その近似解法としての意味付けを明らかにする。また、両者の数値実験による精度の比較を行なう。

II. モデル

c 個のユニットから構成される領域と、その領域を管理するアロケータを考える。パラメータ λ のポアソン到着をする客は、領域内のユニットに対して占有要求を発生する。 i 番目の到着客の占有要求ユニット数を、 X_i とする。ただし、 $\{X_i : i=1, 2, \dots\}$ は独立に同一の分布に従い整数値をとる確率変数とし、その分布は次とする。

$$(2.1) \quad P(X_i = n) = \alpha_n, \quad 1 \leq n \leq c .$$

アロケータは、到着客の占有要求を先着順に処理する。領域内に占有要求を満たす空きユニットがある限りアロケータは客にユニットを割り付ける。割り付けはユニットの物理的位置関係には無関係に実行され、要求数を満たす空きユニットが無くなった時点でアロケーションは中止される。アロケーションされなかった客は待ち行列中で次のアロケーションの機会を待つ。領域の占有を許された客はパラメータ μ をもつ指数分布に従う使用時間のあいだ領域を使用した後、占有していたユニットを総て返却して退去する。客の領域使用時間と占有ユニット数とは独立とする。アロケータの起動契機は客の到着時および退去時とし、アロケーション時間はゼロとする。このモデルを Q_c とし、図 1 にモデルの概要を示す。

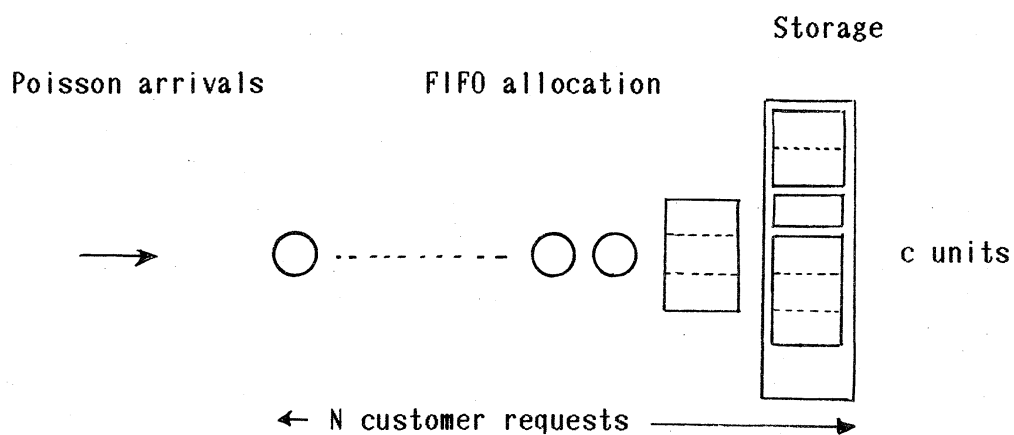


図 1. 領域競合待ち行列モデル Q_c

Ⅲ. 無限待ち行列モデル

$\lambda \rightarrow \infty$ とし、待ち行列長が無限であるような過負荷状況を考える。客の退去直後時点に着目し、 $\{U_i : i=1, 2, \dots, m\}$ をその時点で到着順に客に番号付けをしたときの i 番目の客の要求ユニット数とする。

$S(n) = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $F_n(c) = P(S(n) \leq c)$, $f_n(c) = P(S(n) = c)$ とし、 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_c)$ とする。

〔3.1〕 領域使用状態

このモデルについて既に得られている結果、およびいくつかの補足すべき結果を以下に lemma の形にまとめておく。

Lemma 3.1 (Bryant): $\{U_i : i=1, 2, \dots, m\}$ は互いに独立に同一の分布 $P(U_i = n) = \alpha_n$ にしたがう。また、その同時分布は次ぎのような積形式になる。

$$(3.1) \quad P(U_1 = x_1, U_2 = x_2, \dots, U_m = x_m) = \prod_{i=1}^m \alpha_{x_i} .$$

Lemma 3.2 (Bryant): 客の退去直後時点での領域使用中の客数を $K(+)$ とする。

$$(3.2) \quad P(K(+) = n) = F_n(c) - F_{n+1}(c), \quad 1 \leq n \leq c .$$

Lemma 3.3 : 領域内の使用中のユニットの総数を U とする。

$$(3.3) \quad P(U = k \mid K(+) = n) = f_1(k) f_{n-1}(c-k) / f_n(c) .$$

Lemma 3.4 : 待ち行列の先頭に並ぶ客の要求ユニット数を H とする。

$$(3.4) \quad P(H = h \mid K(+) = n) = f_1(h) \{F_n(c) - F_n(c-n)\} / \{F_n(c) - F_{n+1}(c)\}$$

Lemma 3.5 : 客の退去直前における領域使用中の客数を $K(-)$ とし、

$a(m,n) = P(K(+)=n \mid K(-)=m)$ とする。

$$(3.5a) \quad a(m,n) = \sum_{k=1}^c F_1(c-k) [f_{m-1}(k) \{F_{n-m+1}(c-k) - F_{n-m+2}(c-k)\} - f_m(k) \{F_{n-m}(c-k) - F_{n-m+1}(c-k)\}] / \{F_m(c) - F_{m+1}(c)\}, \quad 2 \leq m,$$

$$(3.5b) \quad a(1,n) = [F_n(c) - F_{n+1}(c) - \sum_{k=1}^c f_1(k) F_1(c-k) \{F_{n-1}(c-k) - F_n(c-k)\}] / \{F_1(c) - F_2(c)\}.$$

Lemma 3.6(伊沢, Bryant): 任意時点での領域使用中の客数を K とする。

$$(3.6) \quad P(K=n) = \{F_n(c) - F_{n+1}(c)\} / n \{F_1(c) - \sum_{k=2}^c F_k(c)/k(k-1)\}.$$

Lemma 3.7(Bryant): Qc が定常解をもつための必要十分条件は次ぎにあたえられる。ただし、 $\rho = \lambda / \mu$ とする。

$$(3.7) \quad 0 < \rho < 1 / [F_1(c) - \sum_{k=2}^c F_k(c)/k(k-1)].$$

[3.2] 1ステップマルコフ連鎖

Lemma 3.5 に与えられる $a(m,n)$ を状態 m から状態 n への推移確率とするマルコフ連鎖 $Q = \{a(m,n)\}$ をかんがえる。 $u = (u_1, u_2, \dots, u_c)$ とする。

$$(3.9) \quad uQ = u, \quad u_1 + u_2 + \dots + u_c = 1.$$

方程式(3.9)の解は(3.2)に一致する。即ち、次ぎがなりたつ。

$$(3.10) \quad u_n = P(K(+)=n), \quad n=1,2,\dots,c.$$

方程式(3.9)は、あたかも $K(+)$ がマルコフ連鎖をなすと考えて構成された方程式のような形をしており、しかもその解は(3.10)に示されるように、lemma 3.2に得られている分布に一致する。しかし、このことは $K(+)$ がマルコフ連鎖をなすということの意味しているわけではない。実際には、 $K(+)$ はマルコフ連鎖にはなっていない。

一般に、状態集合 S をもつマルコフ連鎖について、その状態を $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ と分割し、各 S_i を1つの状態に縮約したlumped processを考える。元のマルコフ連鎖に関する定常ベクトルを s 、 \hat{s} を s について分割された状態に対応する要素の和をとったlumped processに対応するベクトルとする。Lumpability条件が満足されない限り、lumped processは一般にはマルコフ連鎖にはならない。しかし、このマルコフ連鎖が s を初期ベクトルとしたときに限って、 $P_{(1)} = \{p(i, j)\}$ 、 $p(i, j) = P(f(n+1) \in S_j \mid f(n) \in S_i)$ 、はすべての n について一定であり、分割された状態に関してマルコフ連鎖をなしていなくても常に、 $\hat{s} P_{(1)} = \hat{s}$ が成り立つ。この $P_{(1)}$ を1ステップマルコフ連鎖(6)という。

$Q = \{a(m, n)\}$ は元のプロセスに関して、この1ステップマルコフ連鎖を構成している。同じような性質をlemma 3.6についてもみることができる。先に述べたように、客の退去直後時点は、考えている系に関する再生点にはなっていない。しかし、この点をあたかも再生点であるかのごとくにみなし、 K に関する次ぎの量を計算する。

$$(3.11) \quad v_n = (u_n / n \mu) / E(C).$$

ここに、 $E(C)$ はサイクルタイムの期待値で、 $E(C) = \sum_{n=1}^c (u_n / n \mu)$ 。

(3.11)に与えられる $\{v_n\}$ は、任意時点での領域使用客数の分布に一致する。即ち、次ぎがなりたつ。

$$(3.12) \quad v_n = P(K = n), \quad n = 1, 2, \dots, c.$$

しかし、(3.12)は領域使用客数 K がマルコフ過程をなす、ということの意味しているわけではない。実際に、 K はマルコフ過程にはなっていない。上記にみられる

ように、この無限待ち行列モデルにおいては、客の退去直後時点は再生点になりかわる擬再生点とでもよぶべき性質をもっている。このことは、lemma 3.2 に示される客の退去直後時点の領域使用中の客数の分布が客の要求ユニット数に関する情報を含んでおらず、客数のみに関する情報から構成されていることから直観的にはほとんど明らかであるが、(3.12)の成立を直接確かめてみるができる。

〔3.3〕 状態の縮約とマルコフモデルの等価性

客の i 番めの退去直後における系の状態を確率変数ベクトル $U_i(m) = (U_1, U_2, \dots, U_m)$ 、任意時点の系の状態を同様に $U(m)$ と表わす。

前節の lemma 3.1を証明するためにBryantはマルコフ連鎖 $\{U_i(c)\}$ を用いた。一方、伊沢はマルコフ過程 $\{U(2c)\}$ を扱い lemma 3.6 を得ている。これはマルコフ連鎖 $\{U_i(2c)\}$ を扱っていることに等価である。

$I_j = \{1, 2, \dots, c\}$ とし、その m 個の直積集合を、 $I(m) = I_1 \otimes I_2 \otimes \dots \otimes I_m$ とする。 $\{U_i(c)\}$ は状態集合 $I(c)$ 上で定義されるマルコフ連鎖であり、 $\{U_i(2c)\}$ は状態集合 $I(2c)$ 上で定義されるマルコフ連鎖である。両者は状態空間の設定のしかたが異なっており、後者は前者よりも広い状態空間を設定している。この二つのマルコフ連鎖ははたして同じモデルを表わしているのだろうか。

一般に、 $c \leq m$ なる m について次ぎの lemma になるたつ。

Lemma 3.8 : 状態集合 $I(m+1)$ をもつマルコフ連鎖 $\{U_i(m+1)\}$ は状態集合 $I(m)$ に関して lumpable(6) ではない。

Lemma 3.9 : マルコフ連鎖 $\{U_i(m+1)\}$ は状態集合 $I(m)$ に関して weakly lumpable(6) である。

上記の二つの lemma はマルコフモデルの等価性に関して次ぎのような示唆をあたえてくれる。

即ち、マルコフモデルAとBが等価であるということを、AとBの挙動を表現する推移確率行列あるいは無限小生成作用素が同じであること、と定義するなら、上記のlemmaは $\{U_i(m+1)\}$ と $\{U_i(m)\}$ はモデルとして同じものではない、ということの意味している。

一方、weakly lumpable な状態空間をもつモデルをすべて同じモデルとみなすことにするならば、 $\{U_i(m+1)\}$ と $\{U_i(m)\}$ は同じモデルであるということになる。後者の定義を用いる場合には、同じモデルが無限に存在することになる。

マルコフモデルの等価性に関してどちらの定義が適切であるかは議論をまたねばならないが、いずれにせよ、等価であるということの定義をはっきりさせたうえで議論をすすめねばならないことがわかる。

なお、どのモデルを用いても〔3. 1〕に示した結果はすべて成立する。

加えて、lemma 3.8, 3.9 は、与えられた系をマルコフモデルとして表現するために必要十分な状態空間の構成方法について次ぎのような示唆を与えてくれる。

即ち、ある系の挙動をマルコフモデルとして表現する為に必要かつ十分な状態集合を構成するため、適当に広い範囲の状態集合を初めに仮定しておいて、そのlumpabilityを調べることによって次々と状態集合の範囲を狭めて行き、最後に必要十分な範囲の状態集合に到達するという方法は実現不可能である。与えられた系をマルコフモデルとして表現するための必要十分な状態集合は系そのものに関する考

察によってからしか定めることはできない。

$\{U_i(m+1)\}$ と $\{U_i(m)\}$ のモデルとしての相違は次のように考えてみる
ことができる。即ち、 $\{U_i(m+1)\}$ はアロケータが常に到着順に $m+1$ までの客の要
求ユニット数を調べて確定するモデルになっている。即ち、客は到着順位が $m+2$
から $m+1$ に変化する瞬間にアロケータに自分の要求ユニット数を申告し確定する。

一度確定された要求ユニット数はその後は変更されることはない。一方、
 $\{U_i(m)\}$ は、到着順に m までの客についての要求ユニット数を確定するモデル
になっている。図2にこの二つのモデルをしめす。四角形は観測時点で要求ユ
ニット数が確定されている客を表わすものとし、丸印は要求ユニット数が確率的に
しか定まっていない客を表わすものとする。

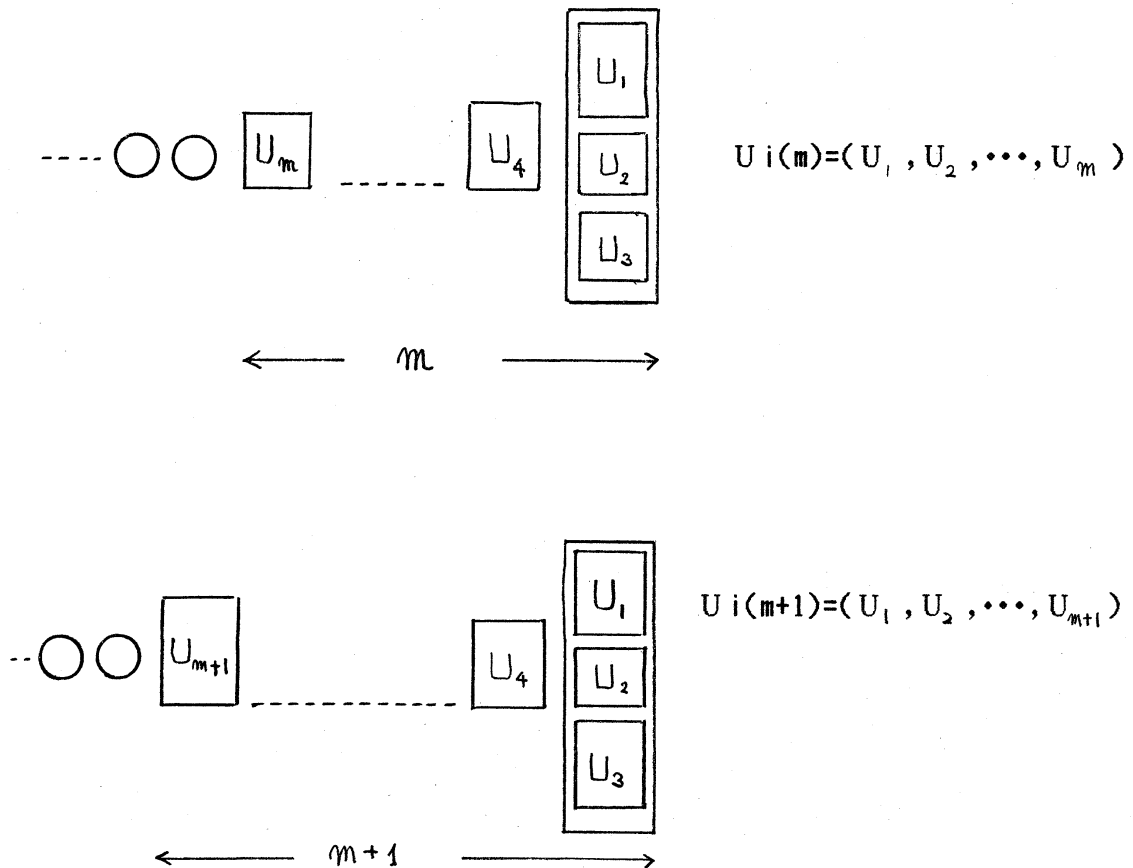


図2. $U_i(m+1)$ および $U_i(m)$ モデル

IV. 到着過程を考えたモデル

本章では、無限待ち行列の仮定を外し、 $\lambda < \infty$ の場合を考える。 $\rho = \lambda / \mu$ とする。

ここでは、 $c = 2$ の場合についての厳密解を母関数法を用いて求める。

改めてマルコフ過程 $W = (Y_1, Y_2, : N)$ を定義する。 Y_1 および Y_2 は夫々使用ユニット数が1および2である客数、 N を系内容数とする。 $Y_1 = 0, 1, 2$, $Y_2 = 0, 1$, $N = 0, 1, 2, \dots$ となる。 Y_1 および Y_2 が与えられると待ち行列の先頭の客の要求ユニット数は一意に定まってしまうので、待ち行列の先頭の客にかんする情報は省略されている。

状態方程式は次のようになる。

$$(4.1a) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (1+\rho)P(0,1:n) = \rho P(0,1:n-1) + \alpha_2 P(0,1:n+1) + P(1,0:n+1) & \text{for } 2 \leq n, \\ (1+\rho)P(1,0:n) = \rho P(1,0:n-1) + \alpha_1 \alpha_2 P(0,1:n+1) + 2\alpha_2 P(2,0:n+1) & \text{for } 3 \leq n, \\ (2+\rho)P(2,0:n) = \rho P(2,0:n-1) + \alpha_1^2 P(0,1:n+1) + 2\alpha_1 P(2,0:n+1) & \text{for } 3 \leq n, \end{array} \right.$$

$$(4.1b) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \rho P(0,0:0) & = P(1,0:1) + P(0,1:1) \\ (1+\rho)P(0,1:1) & = \rho \alpha_2 P(0,0:0) + \alpha_2 P(0,1:2) + P(1,0:2) \\ (1+\rho)P(1,0:1) & = \rho \alpha_1 P(0,0:0) + \alpha_1 P(0,1:2) + 2P(2,0:2). \\ (1+\rho)P(1,0:2) & = \rho \alpha_2 P(1,0:1) + \alpha_1 \alpha_2 P(1,0:3) + 2\alpha_2 P(2,0:3) \\ (2+\rho)P(2,0:2) & = \rho \alpha_1 P(1,0:1) + \alpha_1^2 P(0,1:3) + 2\alpha_1 P(2,0:3). \end{array} \right.$$

$p_0 = P(0,0:0)$, $p_1 = P(1,0:1)$, $p_2 = P(0,1:1)$ とし、母関数を次のように定義する。

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_0(z) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P(0,1:n) z^n, \\ P_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(1,0:n) z^n, \\ P_2(z) = \sum_{n=2}^{\infty} P(2,0:n) z^n, \end{array} \right.$$

$P(z) = (P_0(z), P_1(z), P_2(z))^T$, $p = (p_0, p_1, p_2)^T$ とすると、(4.1) は次ぎのシステムに変換される。

$$(4.4) \quad A(z) P(z) = B(z) p .$$

ここに、 $A(z)$, $B(z)$ は次ぎに定義される行列とする。

$$A(z) = \begin{bmatrix} z\{\rho(1-z)+1\} - a_2 & , & -1 & , & 0 \\ -a_1 a_2 & , & z\{\rho(1-z)+1\} & , & -2a_1 \\ -a_1^2 & , & 0 & , & z\{\rho(1-z)+2\} - 2a_1 \end{bmatrix} ,$$

$$B(z) = \begin{bmatrix} z\{\rho(1-z)+1\} - a_2\{\rho z(1-z)+1\} & , & -(1-a_2)z & , & 0 \\ -a_1 a_2\{\rho z(1-z)+1\} & , & (1-a_2)\{\rho(1-z)+1\}z^2 + a_1 a_2 z & , & 0 \\ -a_1^2\{\rho z(1-z)+1\} & , & -a_1 z^2\{\rho(1-z)+1\} + a_1^2 z & , & 0 \end{bmatrix} .$$

$P_0(z)$ は(4.5) 与えられる。 $P_0(z)$ が単位円内で正則で円周上で連続ならば $P_1(z)$, $P_2(z)$ も同様であることは明らか。

$$(4.5) \quad P_0(z) = \{g_0(z)p_0 + g_1(z)p_1\}/g(z)$$

ここに、 $g(z)$, $g_0(z)$, $g_1(z)$ は次ぎにあたえられる。

$$g(z) = \rho^3 z^4 - 2\rho^2(\rho+2)z^3 + \rho\{\rho^2 + (5+a_1)\rho + 5\}z^2 - \{(1+a_1)\rho^2 + (3+a_1)\rho + 2\}z + \rho a_1(1-a_1) ,$$

$$g_0(z) = a_1 \rho^3 z^4 - \rho^2(2a_1 \rho + 1 + 3a_1)z^3 + \rho\{a_1 \rho^2 + (a_1^2 + 3a_1 + 2)\rho + 2a_1 + 3\}z^2 - \{(1+a_1^2)\rho^2 + (3+a_1)\rho + 2\}z + \rho a_1(1-a_1) ,$$

$$g_1(z) = -\rho a_1(1-a_1)z .$$

$\rho^* = 1 / (2 - \alpha_1^2)$ とすると、以下の lemma がなりたつ。証明略。

Lemma 4.1 : $g(z) = 0$ が $0 < z < 1$ のあいだに唯ひとつの根をもつための必要十分条件は、 $0 < \rho < \rho^*$.

Lemma 4.2 : $g(z) = 0$ が $0 < z < 1$ のあいだに2根をもつための必要十分条件は、 $\rho^* < \rho$.

Lemma 4.3 : $g(z) = 0$ は、 $\rho = \rho^*$ のとき、 $0 < z < 1$ のあいだに1根、および $z = 1$ なる根をもつ。

Lemma 4.4 : Q_2 が定常解をもつための必要十分条件は、 $g(z) = 0$ が $0 < z < 1$ の間に唯ひとつの根をもつことである。

Theorem 4.1 : Q_2 が定常解をもつための必要十分条件は、 $0 < \rho < \rho^*$.

以上より、 $0 < \rho < \rho^*$ なる ρ について、 $g(z) = 0$ の $0 < z < 1$ の間の根 η をもとめ、(4.5) の分子 = 0 なる条件から境界条件 p_0 、 p_1 を定め母関数を決定し、必要な諸量を求めることができる。 p_2 は母関数の決定に関しては冗長な情報となる。

V. 近似解法

前章では $c = 2$ の場合についての厳密解を母関数法を用いて導いたが、ユニット総数が大きい一般の場合には、母関数法の延長上で厳密解が得られる見込みは少ないように思われる。本章では規模の大きなモデルについて、近似解法を示す。

文献(5) に示される方法は本章に述べる近似法に相当している。

〔5.1〕 近似法の考えかた

時刻 0 で待ち行列中に J 人の客が存在し、領域内のユニットはすべて空きであるとする。この状態からアロケーション完了直後の時刻 $t=0(+)$ の状態を考える。 $t=0(+)$ で領域使用中の客数 $M(+)$ は(5.1) に定義される確率変数となり、その J に関する条件付分布と期待値 $u_{\downarrow}(c)$ はそれぞれ、(5.2), (5.3) に与えられる。

$$(5.1) \quad M(+) = \max \{ m \mid S(m) \leq c, 1 \leq m \leq J \} .$$

$$(5.2) \quad P(M(+) = m \mid J = j) = \begin{cases} F_m(c) - F_{m+1}(c) & , 1 \leq m \leq j-1, \\ F_{\downarrow}(c) & , m = j . \end{cases}$$

$$(5.3) \quad u_{\downarrow}(c) = E(M(+) \mid J = j) \\ = F_1(c) + F_2(c) + \dots + F_{\downarrow}(c) .$$

上記(5.3) は、系内客数が j という条件のもとで、アロケーション直後の領域使用客数の期待値が近似的に $u_{\downarrow}(c)$ で与えられることを示唆している。従って、 Q_c に関する簡単な近似モデルとして、系内客数に依存するサービス率をもつ待ち行列モデルが考えられる。

〔5.2〕 近似モデル

系内客数依存サービス率 $u_{\downarrow}(c)$ をもつ $M/M/1$ システム Q_c^* を近似モデルとする。 $[x]$ を x を越えない最大の整数値を表わすものとし、 $m = \max([c/j] | \alpha_{\downarrow} \neq 0, 1 \leq j \leq c)$ とする。パラメータ m は領域内に同時に入り得る最大の客数を意味している。 Q_c^* の定常確率は次ぎに与えられる。

$$(5.4a) \quad p(n) = \begin{cases} \{\rho^n / \prod_{j=1}^n u_j(c)\} p(0) & , \quad 1 \leq n \leq m \quad , \\ \{\rho / u_m(c)\}^{n-m} p(m) & , \quad m \leq n \end{cases}$$

$$(5.4b) \quad p(0) = [1 + \sum_{n=1}^{m-1} \{\rho^n / \prod_{j=1}^n u_j(c)\} + \rho^m u_m(c) / \{(u_m(c) - \rho) \prod_{j=1}^m u_j(c)\}]^{-1} .$$

定常解の存在条件および系内容数の期待値は次ぎに与えられる。

$$(5.5) \quad \rho < u_m(c) .$$

$$(5.6) \quad E(N) = [\sum_{n=1}^m \{n \rho^n / \prod_{j=1}^n u_j(c)\} + \{m \rho / (u_m(c) - \rho) + \rho u_m(c) / (u_m(c) - \rho)^2\} \rho^m / \{\prod_{j=1}^m u_j(c)\}] p(0) .$$

Q_2 システムの定常解の存在条件の上限値 ρ^* と、 Q_2^* システムにおける上限値 ρ^{**} を比較すると、 $\rho^* < \rho^{**}$ であり、この近似モデルが定常解の存在条件に関して過大評価を与えることがわかる。

VI. 数値実験例

表1に Q_2 システムにおいて、 $\alpha_1 = 0.2, 0.4, 0.8$ と変化させた場合の平均系内容数の値を示す。 α_1 の変化に従って Q_2 システムは、 $M/M/1$ と $M/M/2$ の中間的性質を示すことがわかる。また、表2に、 Q_2 および Q_2^* における平均系内容数の比較を示す。さらに、図3にそのグラフを示す。

これらの結果に示されるように、近似解は厳密解にくらべて平均系内容数に関して過小評価を与える。

Table 1. Average number of customer requests in Q_2 vs. traffic intensity ρ . Parameter α_2 implies the probability according to which a customer requests requires one unit of storage. $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $0 < \alpha_1 < 1$. $\rho^* = 2/(2 - \alpha_1^2)$.

$\rho = \lambda/\mu$	E(N)			
	$\alpha_1 = 0.20$	$\alpha_1 = 0.40$	$\alpha_1 = 0.60$	$\alpha_1 = 0.80$
0.10	0.11	0.11	0.11	0.10
0.20	0.25	0.24	0.23	0.22
0.30	0.42	0.41	0.38	0.35
0.40	0.65	0.62	0.56	0.49
0.50	0.97	0.90	0.79	0.67
0.60	1.44	1.30	1.10	0.88
0.70	2.21	1.90	1.52	1.14
0.80	3.67	2.93	2.14	1.47
0.90	7.56	5.05	3.15	1.92
1.00	49.57	12.08	5.08	2.57
ρ^*	1.0050	1.0870	1.2195	1.4706

Table 2. Numerical comparisons of average number of customer requests E(N) between Q_2 and Q_2^* systems.

ρ	E(N)			
	$\alpha_1 = 0.900$		$\alpha_1 = 0.500$	
	Exact	Appr.	Exact	Appr.
0.10	0.102	.101314	0.108	.106564
0.20	0.211	.206374	0.237	.228938
0.30	0.328	.317039	0.395	.372393
0.40	0.456	.435515	0.592	.544662
0.50	0.601	.564524	0.850	.757576
0.60	0.767	.70754	1.202	1.03022
0.70	0.962	.869167	1.713	1.39553
0.80	1.196	1.05571	2.523	1.91571
0.90	1.487	1.27613	4.002	2.72397
1.00	1.859	1.54373	7.557	4.16667
1.10	2.356	1.87917	27.740	7.51367
1.20	3.057	2.3166	-	-
1.30	4.123	2.91682	-	-
1.40	5.947	3.79983	-	-
1.50	9.791	5.24037	-	-
1.60	23.166	8.03631	-	-

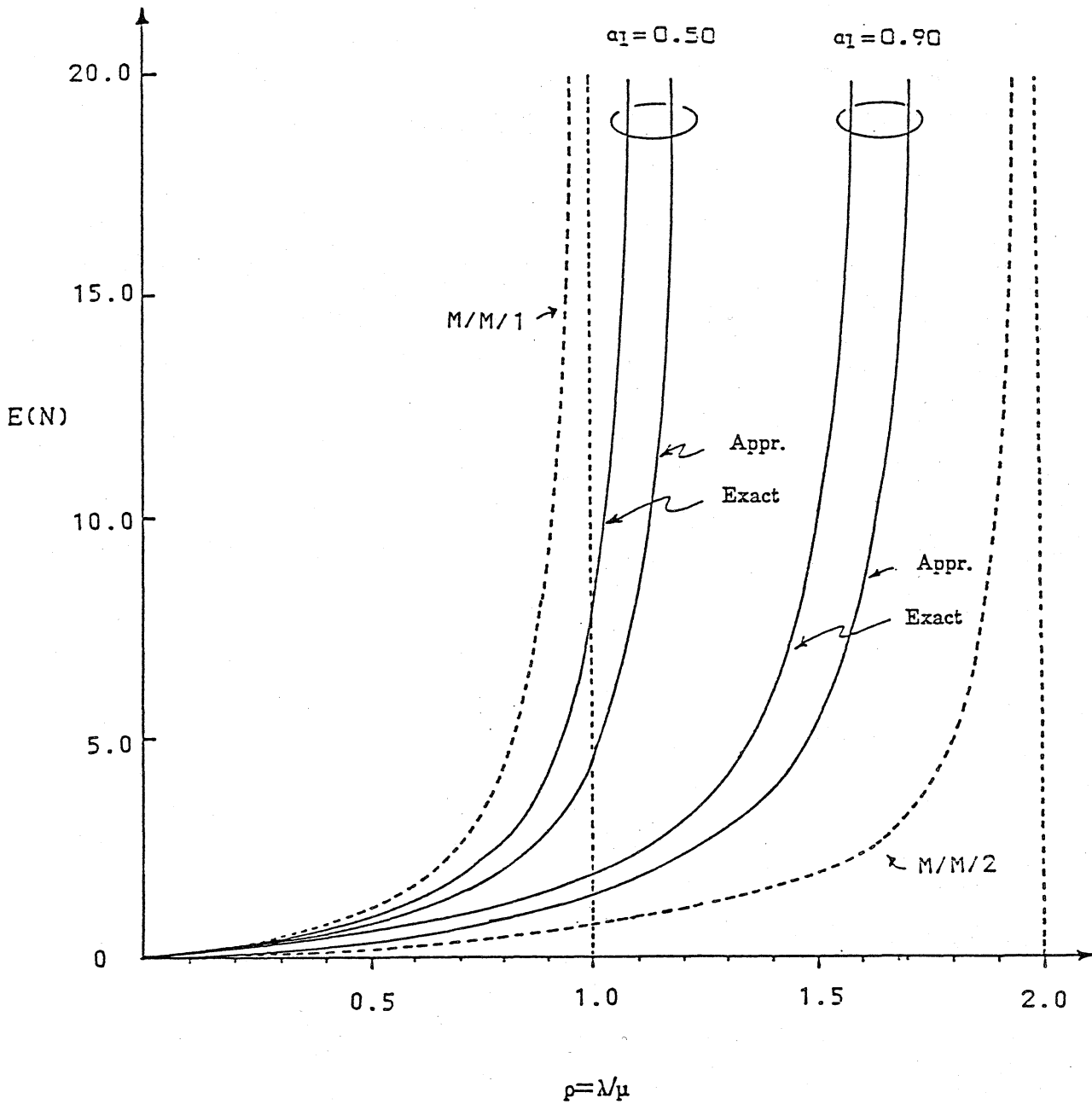


Fig.3. Average number of customer requests $E(N)$ in Q_2 or Q_2^* system vs. traffic intensity ρ .

Parameter α_1 denotes the the probability according to which a customer request requires one unit of storage.

Ⅶ. まとめ

領域競合をもつ待ち行列について、まず無限待ち行列をもつモデルをとりあげ、その状態集合の縮約およびマルコフモデルの等価性にまつわる問題を考察し、つぎに、到着過程のある場合について母関数法による解析をおこない、さらに近似解法について述べた。ユニット総数が多く、到着のあるモデルについては、母関数法による以外にはNeutsによるマトリクスジオメトリクス法を使って直接数値解を得る方法も原理的には可能であるが、大規模な行列演算に対する有効な対応策を持たないかぎり実際の適用は困難と思われる。近似解法についてはさらに改良の余地があると思われる。

本稿のモデルに関して有益な討論を頂いた、防大川島武先生、筑波大逆瀬川浩孝先生、工学院大山崎源治先生、マルコフモデルの等価性に関する有益なコメントを頂いた、東北大高橋幸雄先生、ならびに、文献(4)を教えて頂いた電通大亀田壽夫先生、に感謝いたします。

【参考文献】

- (1) Knuth ,D.E. : The art of computer programming ,Vol.1,Addison Wesley, 1968 .
- (2) Bettridge,T.: Analytic Storage Allocation Model,Acta Informatica,Vol.3 pp.101-122(1974).
- (3) 伊沢 喜美男：動的再配置の解析と最適システムの設計、情報処理学会誌、Vol. 16,No.5(1975) .
- (4) Bryant,R.M.: Maximam Processing Rates of Memory Bound Systems ,J.ACM, Vol.29,No.2,pp.461-477(1982).
- (5) 紀 一誠：資源切り出し型待ち行列の解析、情報処理学会誌、Vol.19,No.2, (1978).
- (6) Kemeny,J. and Snell,J.: Finite Markov Chains,D.Nostrand Co.,1960.