数理解析研究所講究録
第564巻 1985年 250-262

団子の効果 －待ち時間の比較－

東京理科大 工 石川明彦 (Akihiko Ishikawa)

この小論では、ある待ち行列系が団子現象を起こしたとき、待ち行列内待ち時間がどう変化するのかに注目し、団子現象に似た近似の待ち行列系を想定し、その近似系の平衡時の待ち時間と元の系の待ち時間を比較したものである。

団子現象の例としては、古く寺田寅彦[14]が随筆でふれているように、路面電車や、比較的頻繁に発着する電車の駅で見られる。この場合の団子現象を鳥瞰的視野で見れば、団子状態の部分は、密な縞状に電車がつながっており、その外側（両側）は、粗い縞状になっている。また近年になって見られるようになった団子現象の一つに、中層用の数台のエレヴェータ群がある。これら数台は、一階への到着時刻が同調してしまい、ある一台が一階へ着くと、追うように、つながって到着し、それら一群が一階をはなれるとしばらくどれも到着せず、再び一階へ到着する時刻は、またほぼ同時刻になってしまう現象である。

上の２例のように、数台の乗物が、それぞれ確率的に独立に、発

着すべきものが、団子になり、一塊となってしまう。このことから非常に強引な話であるが、複数窓口単一サービスの基本待ち行列系が、団子状態になった時の近似系として、単一窓口集団サービスの待ち行列系を用い、待ち時間を比較する。

1．近似型（単一窓口集団サービス）

単一窓口集団サービス待ち行列系の中から次の２つの型を選んだ。１つは、最も基本的な系で、サービス時間分布が集団サービスの大きさに無関係な指数分布に従うＢ型、もう１例は、サービス時間分布が集団サービスの大きさにより変化するＣ型である。

● Ｂ型　Ｍ／Ｂ(m)／１

到着　　　　　：１単位の客の到着は、率 λ の Poisson 分布

サービス窓口数　：単一

サービス集団規律：サービス開始時に、

(1) 待ち行列が空であれば、１単位の客の到着を待って、その１単位の客だけをサービスする

(2) 待ち行列内に m単位以下の待ちがあれば、全体の集団サービス

(3) 待ち行列内に(m+1)単位以上の待ちがあれば、先着順に m 単位の集団サービス

サービス時間分布：集団サービス単位数に無関係で、常に率 μ の指数分布

● C型　　M／C(m)／1

到着　　　　　　：1単位の客の到着は、率λの Poisson 分布

サービス窓口数　：単一

サービス集団規律：サービス開始時に、

(1) 待ち行列が空であれば、1単位の客の到着を待って、その1単位の客だけをサービスする

(2) 待ち行列内に m単位以下の待ちがあれば、全体の集団サービス

(3) 待ち行列内に(m+1)単位以上の待ちがあれば、先着順に m単位の集団サービス

サービス時間分布：集団サービス単位数が kの時は,k次の Erlang 分布（各位相は率νの指数分布，m単位のとき$\nu/m=\mu$）

上の近似系と比較する原系として、　M／B(m)／1　に対して M／M／1とM／M／m，　M／C(m)／1に対して M／Em／1 と M／Em／m　を対応させ、客一単位当りの平均（最大）サービス時間を等しくし、待ち時間を比較してある。

この小論は、未だ初歩的段階なので、客一単位当として、一定の客数（例えば　２０人一組とか５人一組）と考えてほしい。

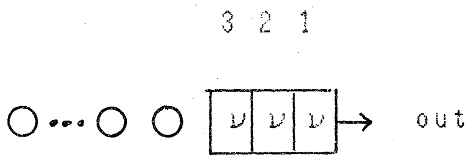
２．解析　M／C(m)／1

B型については、[2],[3]等が解を示しているので、ここでは、C型の解法を示し、最後に数値例を示す。

話を具体的にするため m=3 の場合について説明する。

各位相のサービス時間分布は、率νの指数分布であり、サービス窓口の位相を出口から順に1,2,3 と番号を付ける。

平衡確率 $P_{n;j}$ を



$P_{n;j} = \lim_{t \to \infty} P_{n;j}(t)$ で定める。

ただし　$\rho = \dfrac{3\lambda}{3\nu} = \dfrac{\lambda}{\nu} < 1$　とし、$(\mu = \nu/3)$

n は、時刻 tにおける待ち行列内客単位数

j は、時刻 tにおけるサービス位相位置　　　とする。

平衡方程式：

$$\lambda P_{0;0} = \nu P_{0;1}$$

(2.1)
$$(\lambda+\nu)P_{0;1} = \nu(P_{0;2} + P_{1;1}) + \lambda P_{0;0}$$

$$(\lambda+\nu)P_{0;2} = \nu(P_{0;3} + P_{2;1})$$

$$(\lambda+\nu)P_{0;3} = \nu P_{3;1}$$

$n \geqq 1$ に対し、 $(\lambda+\nu)P_{n;1} = \nu P_{n;2} + \lambda P_{n-1;1}$

(2.2) $\qquad (\lambda+\nu)P_{n;2} = \nu P_{n;3} + \lambda P_{n-1;2}$

$$(\lambda+\nu)P_{n;3} = \nu P_{n+3;1} + \lambda P_{n-1;3}$$

これらの式は、どこで区切っても、式の数より未知変数の数の方が3個以上多く、形式的に不定(または自由度を持った)線形方程式となっている。 ただし、部分和の関係式として

$$\lambda P_{0;0} = \nu P_{0;1}$$

(2.3) $\qquad \lambda P_{0;1} = \nu (P_{0;2} + P_{1;1})$

$$\lambda (P_{0;2} + P_{1;1}) = \nu (P_{0;3} + P_{1;2} + P_{2;1})$$

$$\lambda (P_{n-1;3} + P_{n;2} + P_{n+1;1}) = \nu (P_{n;3} + P_{n+1;2} + P_{n+2;1}) \quad (n \geqq 1)$$

すなわち

$$P_{0;0} = 1-\rho, \quad P_{0;1} = \rho(1-\rho), \quad P_{0;2} + P_{1;1} = \rho^2(1-\rho)$$

$$P_{n-1;3} + P_{n;2} + P_{n+1;1} = \rho^{n+2}(1-\rho) \qquad (n \geqq 1)$$

を得る。 ここで 行列 I を3次元単位行列,

$$B_1 = \lambda I, \quad B_2 = -(\lambda+\nu) I, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \\ \nu & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r_i} = [\, P_{i;3},\ P_{i+2;1},\ P_{i+1;2} \,]'$$

$i=1,2,...$ とすると、

$B_1 \underline{r_i} + B_2 \underline{r_{i+1}} + B_3 \underline{r_{i+2}} = \underline{0}$ $(i=1,2,...)$ が成立し、

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{r}_i \\ \underline{r}_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_3 & 0 \\ B_2 & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{r}_{i+2} \\ \underline{r}_{i+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$ 即ち

(2.4) $$B \begin{bmatrix} \underline{r}_i \\ \underline{r}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}_{i+2} \\ \underline{r}_{i+3} \end{bmatrix}$$ を得る。

ただし $$B = -\begin{bmatrix} B_3 & 0 \\ B_2 & B_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}.$$

行列Bの固有値を絶対値の大きい順に b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 とすると、$b_3=1$, $b_4=\rho^2$ で、b_1, b_2, b_5, b_6 は、

$$x^4+(\rho^2+1)x^3+(2\rho^2+(\rho^2+3\rho+1)^2)x^2-2\rho^2(\rho^2+3\rho+1)x+\rho^4=0$$

の4根として与えられる。

(2.4)式が無限のiに対して成立するとゆうことは、絶対値が1より大きいb_1, b_2, b_3に対応するBの左固有ベクトル $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ が$[\underline{r}_i', \underline{r}_{i+1}']$と直交することであり、$\underline{v}_3' = K[-1,-1,-1,\rho,\rho,\rho]$ と$[\underline{r}_i', \underline{r}_{i+1}']$との直交関係は、(2.3)式と一致し新しい関係式を与えない。 一方 $\underline{v}_1$ の直交関係は、(2.1),(2.2)と独立な新しい関係式を与える。 (b_1とb_2は共役根)

(2.5) $$\mathrm{Re}(\underline{v}_1') \begin{bmatrix} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \mathrm{Im}(\underline{v}_1') \begin{bmatrix} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \end{bmatrix} = 0$$

この(2.5)式と $P_{0;0}=1-\rho$ の3つの関係式を、(2.1),(2.2)の線形方程式に代入し、$P_{0;1}$, $P_{0;2}$, $P_{0;3}$, $P_{1;1}$, ..., $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2$ を解きその後，これらを(2.4)に代入し全ての$P_{n;j}$を得る事が出来る。

この解法は、tandem queue に用いた方法である([15],[16])。

3. 待ち時間分布 $f_q(t)$

到着分布が Poisson なので、連続時の平衡確率と到着時の確率は、等しく、到着した客が実際にサービスを受ける迄の待ち位相回数 h に注目すると、

$$Q_0 = P_{0;0}$$

$$Q_{3h+1} = P_{3h;1} + P_{3h+1;1} + P_{3h+2;1}$$

$$Q_{3h+2} = P_{3h;2} + P_{3h+1;2} + P_{3h+2;2}$$

$$Q_{3h+3} = P_{3h;3} + P_{3h+1;3} + P_{3h+2;3} \qquad (h=0,1,\ldots)$$

これを用いて、待ち行列内待ち時間分布の密度関数 $f_q(t)$ は、

$$f_q(t) = \nu e^{-\nu t} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(\nu t)^{h-1}}{(h-1)!} Q_h$$

$$\Pr(W_q = 0) = Q_0$$

で与えられる。([7])

4. 数値例

M／C(m)／1の結果だけがオリジナルな数字である。

M／C(m)／1の 下段の( )内は、左からそれぞれ

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n;1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} P_{n;2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} P_{n;3}$$ である。

● B型　　M／B(m)／1 の比較　m=2, 3

2 SERVERS EWq, EW	SWq,SW	VWq,VW	Pr(Wq=0)
M/M/1	rho= 0.30,	muu=1/2,	ram= 0.15
0.8571	2.0404	4.1633	0.7000
2.8571	2.8571	8.1633	
M/B2/1	rho= 0.30,	muu=1/4	
2.4786	4.2403	17.9804	0.4907
6.4786	5.8293	33.9804	
M/M/2	rho= 0.30,	muu=1/4	
0.3956	1.4506	2.1041	0.8615
4.3956	4.2549	18.1041	
M/M/1	rho= 0.50,	muu=1/2,	ram= 0.25
2.0000	3.4641	12.0000	0.5000
4.0000	4.0000	16.0000	
M/B2/1	rho= 0.50,	muu=1/4	
4.6833	6.2200	38.6885	0.2764
8.6833	7.3952	54.6885	
M/M/2	rho= 0.50,	muu=1/4	
1.3333	2.9814	8.8889	0.6667
5.3333	4.9889	24.8889	
M/M/1	rho= 0.70,	muu=1/2,	ram= 0.35
4.6667	6.3596	40.4444	0.3000
6.6667	6.6667	44.4444	
M/B2/1	rho= 0.70,	muu=1/4	
9.0150	10.3095	106.2870	0.1334
13.0150	11.0583	122.2870	
M/M/2	rho= 0.70,	muu=1/4	
3.8431	6.0392	36.4721	0.4235
7.8431	7.2438	52.4721	
M/M/1	rho= 0.90,	muu=1/2,	ram= 0.45
18.0000	19.8997	396.0000	0.1000
20.0000	20.0000	400.0000	
M/B2/1	rho= 0.90,	muu=1/4	
29.2448	30.3329	920.0840	0.0365
33.2448	30.5955	936.0840	
M/M/2	rho= 0.90,	muu=1/4	
17.0526	19.7816	391.3130	0.1474
21.0526	20.1820	407.3130	

3 SERVERS EWq, EW	SWq,SW	VWq,VW	Pr(Wq=0)
M/M/1	rho= 0.30,	muu=1/2,	ram= 0.15
0.8571	2.0404	4.1633	0.7000
2.8571	2.8571	8.1633	
M/B3/1	rho= 0.30,	muu=1/6	
4.4719	6.4667	41.8176	0.3530
10.4719	8.8214	77.8176	
M/M/3	rho= 0.30,	muu=1/6	
0.2001	1.0504	1.1033	0.9300
6.2001	6.0913	37.1033	
M/M/1	rho= 0.50,	muu=1/2,	ram= 0.25
2.0000	3.4641	12.0000	0.5000
4.0000	4.0000	16.0000	
M/B3/1	rho= 0.50,	muu=1/6	
7.4332	8.8309	77.9853	0.1706
13.4332	10.6764	113.9850	
M/M/3	rho= 0.50,	muu=1/6	
0.9474	2.5849	6.6814	0.7632
6.9474	6.5331	42.6814	
M/M/1	rho= 0.70,	muu=1/2,	ram= 0.35
4.6667	6.3596	40.4444	0.3000
6.6667	6.6667	44.4444	
M/B3/1	rho= 0.70,	muu=1/6	
13.0983	14.1075	199.0210	0.0741
19.0983	15.3304	235.0210	
M/M/3	rho= 0.70,	muu=1/6	
3.2823	5.7437	32.9905	0.5077
9.2823	8.3061	68.9905	
M/M/1	rho= 0.90,	muu=1/2,	ram= 0.45
18.0000	19.8997	396.0000	0.1000
20.0000	20.0000	400.0000	
M/B3/1	rho= 0.90,	muu=1/6	
39.9426	40.7011	1656.5800	0.0188
45.9426	41.1410	1692.5800	
M/M/3	rho= 0.90,	muu=1/6	
16.3412	19.6625	386.6130	0.1829
22.3412	20.5576	422.6130	

● C型　　M／C(m)／1　の比較　m=2, 3

2 SERVERS EWq, EW	SWq,SW	VWq,VW	Pr(Wq=0)
M/E2/1	rho= 0.30, muu=1/2, ram= 0.15		
0.6428	1.4586	2.1276	0.7000
2.6428	2.0316	4.1276	
M/C2/1	rho= 0.30, muu=1/4		
0.6845	1.7141	2.9381	0.7000
(0.27950)	(0.02050)	(0.00000)	
M/E2/2	rho= 0.30, muu=1/4		
0.3084	1.0830	1.1728	0.8627
4.3084	3.0286	9.1728	
M/E2/1	rho= 0.50, muu=1/2, ram= 0.25		
1.5000	2.5000	6.2500	0.5000
3.5000	2.8722	8.2500	
M/C2/1	rho= 0.50, muu=1/4		
1.5856	3.0463	9.2802	0.5000
(0.41779)	(0.08221)	(0.00000)	
M/E2/2	rho= 0.50, muu=1/4		
1.0226	2.2038	4.8168	0.6692
5.0226	3.5856	12.8168	
M/E2/1	rho= 0.70, muu=1/2, ram= 0.35		
3.5000	4.6458	21.5832	0.3000
5.5000	4.8562	23.5832	
M/C2/1	rho= 0.70, muu=1/4		
3.9877	6.0380	36.4580	0.3000
(0.50017)	(0.19983)	(0.00000)	
M/E2/2	rho= 0.70, muu=1/4		
2.9144	4.4554	19.8504	0.4264
6.9144	5.2774	27.8504	
M/E2/1	rho= 0.90, muu=1/2, ram= 0.45		
13.5000	14.7732	218.2500	0.1000
15.5000	14.8408	220.2500	
M/C2/1	rho= 0.90, muu=1/4		
17.0892	19.7887	391.5940	0.1000
(0.51765)	(0.38235)	(0.00000)	
M/E2/2	rho= 0.90, muu=1/4		
12.8294	14.7054	216.2460	0.1488
16.8294	14.9748	224.2460	

3 SERVERS EWq, EW	SWq,SW	VWq,VW	Pr(Wq=0)
M/E3/1	rho= 0.30,	muu=1/2,	ram= 0.15
0.5714	1.2634	1.5964	0.7000
2.5714	1.7116	2.9296	
M/C3/1	rho= 0.30,	muu=1/6	
0.6771	1.2112	1.4671	0.7000
(0.27549)	(0.02023)	(0.00428)	
M/E3/3	rho= 0.30,	muu=1/6	
0.1468	0.7278	0.5296	0.9314
6.1468	3.5398	12.5296.	
M/E3/1	rho= 0.50,	muu=1/2,	ram= 0.25
1.3334	2.1774	4.7408	0.5000
3.3334	2.4646	6.0740	
M/C3/1	rho= 0.50,	muu=1/6	
1.5003	2.4366	5.9370	0.5000
(0.39703)	(0.07644)	(0.02653)	
M/E3/3	rho= 0.50,	muu=1/6	
0.6678	1.7314	2.9976	0.7679
6.6678	3.9273	14.9976	
M/E3/1	rho= 0.70,	muu=1/2,	ram= 0.35
3.1120	4.0734	16.5928	0.3000
5.1120	4.2340	17.9260	
M/C3/1	rho= 0.70,	muu=1/6	
3.6878	5.4867	30.1041	0.3000
(0.44252)	(0.16807)	(0.08941)	
M/E3/3	rho= 0.70,	muu=1/6	
2.2498	3.7790	14.2804	0.5144
8.2498	5.1264	26.2804	
M/E3/1	rho= 0.90,	muu=1/2,	ram= 0.45
12.0000	13.0640	170.6670	0.1000
14.0000	13.1148	172.0000	
M/C3/1	rho= 0.90,	muu=1/6	
16.3815	19.5175	380.9340	0.1000
(0.39597)	(0.27880)	(0.22523)	
M/E3/3	rho= 0.90,	muu=1/6	
10.9790	12.9572	167.8890	0.1869
16.9790	13.4122	179.8890	

REFERENCES

[1] Arora, K. L. (1964)
Tow-server bulk-service queuing process.
Oper. res. 12, 286-294

[2] Bailey, N. T. J. (1954)
On queueing processes with bulk servive.
Journal of the Royal Statistical Society, B, 16, 80-87

[3] Cromie, M. V. & Chaudhry, M. L. (1976)
Analytically explicit results for the queueing system M/M(x)/c with charts and tables for certain measures of efficiency.
Oper. Res. Quart. 27, 733-745

[4] Downton, F. (1955)
Waiting time in bulk service qeues.
Journal of the Royal Statistical Society, B, 17, 256-261

[5] Downton, F. (1956)
On limiting distributions arising in bulk service queues.
Journal of the Royal Statistical Society, B, 18, 265-274

[6] Ghare, P. M. (1968)
Multichannel queuing system with bulk service.
Oper. Res. 16, 189-192

[7] Ishikawa, A. (1984)
Stationary waiting time distribution in a GI/Ek/m queue.
Jounal of the Operatins Research Society of Japan. 27, 130-150

[8] Jaiswal, N. K. (1960)
Bulk-service queuing problem.
Oper. Res. 8, 139-143

[9] Jaiswal, N. K. (1960)
Time-dependent solution of the bulk-service queuing problem.
Oper. Res. 8, 773-781

[10] Kashyap, B. R. K. (1966)
The doubl-ended queue with bulk service and limited waiting space.
Oper. Res. 14, 822-834

[11] Keilson, J. (1962)
The general bulk queue as a Hilbert problem.
Journal of the Royal Statistical Society, B, 24, 344-358

[12] Milier, R. G. (1959)
A contribution to the theory of bulk queues.
Journal of the Royal Statistical Society, B, 21, 320-337

[13] Neuts, M. F. (1965)
The busy period of a queue with batch service.
Oper. Res. 13, 815-819

[14] 寺田寅彦(1950)
電車の混雑に就いて
寺田寅彦全集 文学篇 第2巻 265-279 (岩波書店)

[15] Tumura, Y. (1966)
On the steady state probabilities concerned with tandem queue.
T. R. U. Math. 2, 1-11

[16] Tumura, Y. & Ishikawa, A. (1978)
Numerical calculation of the tandem queueing system.
T. R. U. Math. 14-1, 57-70