数理解析研究所講究録
第565巻 1985年 1-43

２径数の　H^1

東京理科大学　理１　佐藤　　元　（Ｈａｊｉｍｅ　Ｓａｔｏ）

１９７０年代の初めに　Ｃ．Ｆｅｆｆｅｒｍａｎ　と　Ｅ．Ｍ．Ｓｔｅｉｎ　によってH^1－ＢＭＯ双対性の理論が完成したが、１９７０年代も後半となると、多重円板上の多変数のハーディ族をモデルにとった理論で、１変数の場合と類似の結果が得られる様になった。それに対する確率論での自然な対応物は、２径数のマルチンゲールということになる。事実、Ｒ．Ｇｕｎｄｙ　と　Ｅ．Ｍ．Ｓｔｅｉｎは、重円板上のハーディ族の特徴付けを明らかにするにあたり、ブラウン運動を２個、時間もこめて独立にとったものを用い、解析と確率が分ち難く結合した議論を展開しているのである（［６］，［７］）。この様な、直積型の２径数マルチンゲールでのH^1－ＢＭＯ双対性は、先ず離散径数の場合について、Ａ．Ｂｅｒｎａｒｄ（［１］）によって見出され、ついで連続径数の場合に調べられた（［４］，［１０］）。Ｇｕｎｄｙ－Ｓｔｅｉｎの結果の確率論化も試みられて、伊藤の公式の拡張を用いたＪ．Ｂｒｏｓｓａｒｄ　と　Ｌ．Ｃｈｅｖａｌｉｅｒ　により達成された（［２］）。それにともない、Ｇｕｎｄｙ－Ｓｔｅｉｎの結果の高次元化も成功（［１０］，［１１］）し、ついでH^1－ＢＭＯ　の純解析的アプローチも発表された（［３］）。

本稿では、以上の経過で得られた、ごく特別なタイプの２径数マルチンゲールのハーディ族を解説してみようと思う。２径数マルチンゲールの一般論も作られつつある（［９］参照）が、１径数とのつながりの明確さと、解析への応用の重要さとから、本稿の特殊ケースの方が遙かにａｃｃｅｓｓｉｂｌｅであるところを見ていただきたい。

Ⅰ． bi－Brownian martingale

§１．bi－Brownian motion

通常のＢｒｏｗｎ運動を２個、時間も込めて独立に取ったものを考えるという事を表現するために、次の様にする。

ｉ＝１，２につき、確率空間（Ω^i，$\mathcal{F}^i$，P^i）の上に$\mathbb{R}^{d_i}$値のＢｒｏｗｎ運動

$$B^i=(B^i_{t_i}\ ;\ t_i\in\mathbb{R}_+),\quad B^i_{t_i}=(B^{i1}_{t_i},\ \cdots,\ B^{id_i}_{t_i})$$

を取り、（$\mathcal{F}^i_{t_i}$；$t_i\in\mathbb{R}_+$）をB^iにともなうｆｉｌｔｒａｔｉｏｎとし、

$$\mathcal{F}^i=\mathcal{F}^i_\infty=\bigvee_{t_i}\mathcal{F}^i_{t_i}$$

と仮定しておく。特に必要というわけではないが、ついでに、$\mathcal{F}^i$や$\mathcal{F}^i_{t_i}$にはP^iに関しての完備性を仮定しておく。初期分布は任意である。その上で、この２個の空間の直積を作る。

$$\Omega=\Omega^1\times\Omega^2,\ \mathcal{F}=\mathcal{F}^1\otimes\mathcal{F}^2,\ P=P^1\otimes P^2$$

$\mathcal{F}$はＰに関して完備化しておく方が都合が良かろうから、そうしておく。さらに径数$t=(t_1,t_2)\in(\mathbb{R}_+)^2$に対して、$\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$値の確率変数$B_t$を

$$B_t(\omega)=(B^1_{t_1}(\omega_1),\ B^2_{t_2}(\omega_2))\qquad \omega=(\omega_1,\ \omega_2)\in\Omega$$

と置いて、確率過程$B=(B_t\ ;\ t\in(\mathbb{R}_+)^2)$をｂｉ－Ｂｒｏｗｎｉａｎ ｍｏｔｉｏｎと名づけることにする。

$(\mathbb{R}_+)^2\ni s,t$について、$s\leqq t$とは$s_1\leqq t_1$かつ$s_2\leqq t_2$のことと定義すれば、$(\mathbb{R}_+)^2$は順序集合となる。これに基き、Ｂ のｆｉｌｔｒａｔｉｏｎを作ると、

$$\mathcal{F}_t=\mathcal{F}^1_{t_1}\otimes\mathcal{F}^2_{t_2}\qquad\qquad \forall\, t\in(\mathbb{R}_+)^2$$

となり、$\mathcal{F}_t$は（B_s；$s\leqq t$）の生成するσ－加法族と同じである。これらもＰに関して完備化しておくことにして、記号は同じものを流用する。$\mathcal{F}=\bigvee_t\mathcal{F}_t$となることは自明である。（$\mathcal{F}_t$；$t\in(\mathbb{R}_+)^2$）をｂｉ－Ｂｒｏｗｎｉａｎ ｆｉｌｔｒａｔｉｏｎと呼ぶことにしよう。

最後に$(\mathbb{R}_+)^2$の区間を$]s,t]=]s_1,t_1]\times]s_2,t_2]$などと表記することを注意しておく。

§2. bi－Brownian martingale

bi－Brownian filtration $(\mathfrak{F}_t ; t\in(\mathbb{R}_+)^2)$に適合したマルチンゲールを、bi－Brownian martingale と呼ぶ。すなわち$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$上の確率過程 $M=(M_t ; t\in(\mathbb{R}_+)^2)$ が bi－Brownian martingale とは、

(1) $M_t\in L^1(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$ 　　$\forall t\in(\mathbb{R}_+)^2$

(2) $s\leq t$のとき $M_s=E(M_t \mid \mathfrak{F}_s)$ (a. s.)

が満たされることである。

その様なものの具体例としては、§1. の$(\Omega^i, \mathfrak{F}^i, P^i)$上の通常のBrownian martingale M^i $(i=1, 2)$を任意にとってその積を作り

$$M_t(\omega)=M^1_{t_1}(\omega_1)\cdot M^2_{t_2}(\omega_2) \qquad \omega\in\Omega,\ t\in(\mathbb{R}_+)^2$$

としたもの、あるいは、その型のものの線型結合（代数学で言うところのテンソル積）などが容易に考えられよう。

本稿ではマルチンゲールと言えば、bi－BrownianまたはBrownianのものばかりであるから、いちいち断わらずにマルチンゲールと呼ぶことにする。

以下に、通常の1径数の場合と異ならない定義や性質を列挙しよう。

(3) (1)で、L^1 のかわりにL^p $(1\leq p\leq\infty)$としたものを、L^pマルチンゲールと呼ぶ。ある $M_\infty\in L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$によって、任意の$t\in(\mathbb{R}_+)^2$について

$$M_t=E(M_\infty \mid \mathfrak{F}_t) \quad \text{(a. s.)}$$

とあらわされるマルチンゲール M は、M_∞により閉じられる、あるいは、L^p閉であるといわれる。

(4) $p<\infty$ ならば、L^pマルチンゲールはL^p連続である。L^pで閉じたマルチンゲールは、$t\to\infty$で M_∞ にL^p収束する。

(5) $1<p$ ならば、L^p閉なるためには、L^p有界であることが必要十分である。$p=1$ では、一様可積分性が必要十分である。

（６）　$\Omega \ni \omega$　を固定したとき、写像　$(\mathbb{R}_+)^2 \ni t \ \to \ M_t(\omega)$　をマルチンゲールの軌跡という。２径数の軌跡であるから、曲線ではなくて曲面の様なものになる。$1<p$ならば、L^pマルチンゲールの軌跡はａ．ｓ．に連続である。（正確には、その様なｖｅｒｓｉｏｎが存在する、と言うべきだが、いちいち断わらない。）

（６）の最後の主張は、次の命題に含まれる。

【命題１】

$1<p$　では、ｐのみに依存する定数$C>0$があって、任意のL^pマルチンゲール　Ｍ　に対して、

$$E(\sup_t |M_t|^p) \leq C \sup_t E(|M_t|^p)$$

が成り立つ。

（証明）　Ｍ　がL^p閉であると仮定してよい。すると、右辺のｓｕｐは不要となる。さらに、M_∞が　$M^1_\infty(\omega_1)\cdot M^2_\infty(\omega_2)$　$(M^i \in L^p(\Omega^i)\ ;\ i=1,2)$の型の線型結合であると仮定してよい。すると、良く知られた１径数の結果より、Ｍの軌跡は２径数につき連続となり、左辺内の$\sup_t |M_t|$は可測になる。そこで、１径数のｓｕｂｍａｒｔｉｎｇａｌｅ　$\mathbb{R}_+ \ni t_1 \ \to \ \sup_{t_2} |M_{t_1 t_2}|$　に着目して

$$E_1\left(\sup_{t_1}(\sup_{t_2}|M_{t_1t_2}|)^p\right) \leq C E_1\left(\sup_{t_2}|M_{\infty t_2}|^p\right)$$

を得る。E_1　はΩ^1　上でのP^1　に関する平均である。さらに両辺のE_2　をとり、右辺の二重積分を交換し、もう一度１径数での不等式を使えば求める不等式が得られる。一般の場合に移るには、上の型のマルチンゲールのL^p　ｄｅｎｓｉｔｙとＢｏｒｅｌ－Ｃａｎｔｅｌｌｉの補題を使う普通のやり方をすればよい。

要するにこの証明は、１径数で既に良く知られた結果を単に繰り返し使うにすぎない。全てがこの調子ではこべば問題ないのだが、残念ながらそうはゆかない。

命題１も$p=1$で成立しないのは１径数のときと同じである。しかし、１径数では、いわゆ

るweak－type不等式

$$P(\sup_t |M_t| \geq \varepsilon) \leq (C/\varepsilon) \sup_t E(|M_t|) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

さらに、もう少し強いDoobの不等式が成り立って、p＝1の欠落を補っている。ところが2径数では、このweak－type不等式は成立しない。何故ならば、p＞1のときと同様に、p＝1でも軌跡の連続なマルチンゲールはL^1 denseである。その上にweak－type不等式が成り立てば、全てのL^1マルチンゲールの軌跡は連続になるはずである。しかし、まさにその事が、2径数では成り立たない。（付記1参照。）

マルチンゲール M が両軸上0であるとは、

$$M_t = 0 \qquad \forall t \in (\mathbb{R}_+ \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}_+)$$

となることである。任意のマルチンゲール M につき、

$$N_t = M_t - M_{t_1 0} - M_{0 t_2} + M_{00} \qquad (t = (t_1, t_2))$$

として得られるマルチンゲール $N = (N_t)$ は、両軸上0である。その上に

$$M_t = N_t + (M_{t_1 0} - M_{00}) + (M_{0 t_2} - M_{00}) + M_{00}$$

とすれば、右辺第2項と第3項はそれぞれfiltration$(\mathcal{F}^1_{t_1} \otimes \mathcal{F}^2_0 ; t_1 \in \mathbb{R}_+)$と$(\mathcal{F}^1_0 \otimes \mathcal{F}^2_{t_2} ; t_2 \in \mathbb{R}_+)$についての始点0の1径数マルチンゲールであり、第4項は$\mathcal{F}_0$可測であるから定マルチンゲールと見なされる。逆に、その様な分解は必然的に上の形になる。そのことから、bi－Brownian martingale の考察は、本質的には両軸上0の場合に限ってよいことになる。

§3. bi－Brownian motion による確率積分

1径数の確率積分にならって、2径数でも predictableな確率過程をbi－Brownian motionで積分することが定義できる。

まず predictability の定義であるが、これは、$\Omega \times (\mathbb{R}^*_+)^2$ の部分集合で $A \times]s, t]$ $(A \in \mathcal{F}_s, s \leq t)$の形のもの全体で生成されるσ－加法族$\mathcal{P}$のことである。ここで $\mathbb{R}^*_+ = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ としておく。

あるいは、$\Omega\times(\mathbb{R}_+^*)^2=(\Omega^1\times\mathbb{R}_+^*)\times(\Omega^2\times\mathbb{R}_+^*)$の上に、$(\Omega^1\times\mathbb{R}_+^*)$と$(\Omega^2\times\mathbb{R}_+^*)$のｐｒｅｄｉｃｔａｂｌｅｓの族$\mathcal{P}^1$と$\mathcal{P}^2$の直積$\mathcal{P}^1\otimes\mathcal{P}^2$として定義してもよい。

$(\mathbb{R}_+^*)^2$上のＬｅｂｅｓｇｕｅ測度を$dt=dt_1\cdot dt_2$とし、$\mathbb{R}^{d_1d_2}$値$\mathcal{P}$可測かつ$P\otimes dt$につき２乗可積分な関数の空間

$$\Lambda^2=L^2(\Omega\times(\mathbb{R}_+^*)^2,\mathcal{P},\ P\otimes dt\ ;\ \mathbb{R}^{d_1d_2})$$

を作る。$\Lambda^2\ni\Phi=(\Phi_{ij}(\omega,\ t)\ ;\ i=1,\ \cdots,\ d_1\ :\ j=1,\ \cdots,\ d_2)$の絶対値$|\Phi(\omega,\ t)|$を

$$|\Phi(\omega,\ t)|^2=\sum_{ij}|\Phi_{ij}(\omega,\ t)|^2$$

で定義し、Φのノルムを

$$\|\Phi\|_{\Lambda^2}=\left(E\left(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2}|\Phi(\omega,\ t)|^2\ dt\right)\right)^{1/2}<\infty$$

とする。これは、Φを、その軌跡の作るL^2空間　$L^2((\mathbb{R}_+^*)^2\ ;\ \mathbb{R}^{d_1d_2})$を値とするΩ上の$L^2$空間の要素と見なして入れたノルムである。以上の準備の下で、ΦのＢによる確率積分

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2}\Phi(\omega,\ t)\cdot dB_t(\omega)\in L^2(\Omega)$$

が定義され、Λ^2から　$L^2(\Omega)$への線型等距離写像となる。$\Phi(\omega,\ t)\cdot dB_t(\omega)$は

$$\sum_{ij}\Phi_{ij}(\omega,\ t)\,dB^{1i}_{t_1}(\omega_1)\,dB^{2j}_{t_2}(\omega_2)\qquad t=(t_1,\ t_2)$$

の略記である。

具体的には、上述のｐｒｅｄｉｃｔａｂｌｅ　ｓｅｔ　$A\times]s,\ u]$と$\mathbb{R}^{d_1d_2}\ni(G_{ij})$によって$\Phi(\omega,\ t)=(G_{ij}\,\chi_A(\omega)\,\chi_{]s,u]}(t))$とあらわされる単純な場合に、その確率積分を

$$\chi_A(\omega)\sum_{ij}G_{ij}(B^{1i}_{u_1}(\omega_1)-B^{1i}_{s_1}(\omega_1))(B^{2j}_{u_2}(\omega_2)-B^{2j}_{s_2}(\omega_2))$$

と定義し、これを単純なΦの線型結合全体に線型に拡張し、等距離性を確かめた上で、Λ^2全体に連続拡張するのである。

別の言いかたをすれば、次の様にも定義できよう。１径数の確率積分は既知であり、

$$L^2(\Omega^i,\mathcal{P}^i,\ P^i\otimes dt_i;\ \mathbb{R}^{d_i})\to\ L^2(\Omega^i)\qquad i=1,\ 2$$

なる等距離線型写像を与える。この図式の$i=1$と２の代数的テンソル積をとれば、２径数の確率積分は１径数のそれのテンソル積として、Λ^2のｄｅｎｓｅな部分空間から$L^2(\Omega)$への

写像となる。それを連続性によりΛ^2全体に拡張する。但し、位相的テンソル積とL^2の関係はあまり容易ではなく、等距離性の確認が面倒だから、このやり方は乱用しない方が無難である。

同様の考え方で、$0<p<\infty$ につき、Λ^p なる空間をも定義できる。$\Omega\times(\mathbb{R}_+^*)^2$上の$\mathcal{P}$可測$\mathbb{R}^{d_1d_2}$値関数$\Phi$に、$L^2((\mathbb{R}_+^*)^2;\mathbb{R}^{d_1d_2})$値の$\Omega$上の$L^p$関数としての“ノルム”を入れて

$$\|\Phi\|_{\Lambda^p}=[E\{(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2}|\Phi(\omega,t)|^2\,dt)^{p/2}\}]^{1/p}<\infty$$

となるもの全体をΛ^p とするのである。$1\leqq p<\infty$のときは、$\|\Phi\|_{\Lambda^p}$ をノルムとしてバナハ空間になるし、$0<p<1$では、$(\Phi_1,\Phi_2)\to\|\Phi_1-\Phi_2\|_{\Lambda^p}^p$ を距離とした完備距離空間になる。

【命題２】

（１） $A\times]s,t]$ （ $(\mathbb{R}_+^*)^2\ni s,t: s<t: A\in\mathcal{F}_s$ ）の形の集合のｉｎｄｉｃａｔｏｒと$\mathbb{R}^{d_1d_2}$の要素の積の線型結合は、Λ^p で ｄｅｎｓｅ である。

（２） Λ^p は、$0<p<\infty$で、ｐにつき、空間としては単調減少、位相は単調増加する。

証明はいずれも容易である。したがって、Λ^p 上の確率積分は、$2\leqq p<\infty$についてはΛ^2のそれで定義ずみである。$0<p<2$では、ｄｅｎｓｅなΛ^2 上の確率積分を連続性により拡張すればよいのだが、それについては節を改めて説明する。

§４. ｂｉ－Ｂｒｏｗｎｉａｎ ｍａｒｔｉｎｇａｌｅ の、確率積分による表現

$\Phi\in\Lambda^2$ として、任意の$t\in(\mathbb{R}_+)^2$ で ｔｒｏｎｃａｔｅ してやると

$$\chi_{]0,t]}(s)\Phi(\omega,s)\in\Lambda^2$$

であるから、これをＢで確率積分することにより

$$M_t=\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2}\chi_{]0,t]}(s)\Phi(\omega,s)\cdot dB_s(\omega)$$
$$=\int_{]0,t]}\Phi_s\cdot dB_s\in L^2(\Omega)$$

として、確率過程 $M=(M_t)$ が得られる。これがマルチンゲールを表わしていることは１

径数の場合と同じである。

【命題３】

（１）　M　はL^2マルチンゲールである。

（２）　M　は　$M_\infty = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \Phi_s \cdot dB_s$　で閉じられる。

（３）　M　は両軸上０である。

【命題４】

両軸上０であるL^2閉マルチンゲール　M　に対して、一意に$\Phi \in \Lambda^2$が存在して

$$M_t = \int_{]0,t]} \Phi_s \cdot dB_s$$

とあらわされる。（Φの一意性は、$P \otimes dt$について測度０の違いを除いてである。）

証明には、$M_\infty \in L^2(\Omega^1 \times \Omega^2)$を、$L^2(\Omega^1)$と$L^2(\Omega^2)$の積の線型結合で近似してゆけばよい。$\Phi$の一意性は、$\Lambda^2$と$L^2(\Omega)$の等距離性から自明である。

$\Phi \in \Lambda^p$　$(0 < p < 2)$の場合にも確率積分を拡張したいが、そのためには次の命題が成り立てばよい。

【命題５】

任意の$p$$(0 < p \leqq 2)$に対して、$p$にのみ依存する定数$C_p$があって、全ての$\Phi \in \Lambda^2$につき、

$$E\left(\sup_t \left| \int_{]0,t]} \Phi_s \cdot dB_s \right|^p\right) \leqq C_p \|\Phi\|_{\Lambda^p}^p$$

がみたされる。

$p = 2$では、命題１と命題３より容易に得られるから、問題は$0 < p < 2$の場合である。Λ^2上で、

$$\sigma(\Phi)(\omega) = \sup_t \left| \int_{]0,t]} \Phi(\omega, s) \cdot dB_s(\omega) \right|$$

とおいてみると、次の性質をもっている。

（ｉ）　σはΛ^2から$L^2(\Omega)$への写像で、

非負性：　$\sigma(\Phi) \geqq 0$

劣加法性：　$\sigma(\Phi+\Psi) \leqq \sigma(\Phi)+\sigma(\Psi)$

対称性：　$\sigma(-\Phi)=\sigma(\Phi)$

をもつ。（いずれも、ａ．ｓ．）

（ｉｉ）　$\{\omega \in \Omega : \Phi(\omega, t) \equiv 0 \ \ \forall t\}$上で、$\sigma(\Phi)=0$　（ａ．ｓ．）

（ｉｉｉ）ある定数Ｃがあって、全ての$\Phi \in \Lambda^2$につき、

$$E(\sigma(\Phi)^2) \leqq C \|\Phi\|_{\Lambda^2}^2$$

がなりたつ。

（ｉｉｉ）は、Λ^2 と L^2 の等距離性と命題３と命題１より出る。（ｉ）は自明である。（ｉｉ）は１径数の場合同様で、初等的である。

そこで、命題５は、次の命題に帰着されることになる。

【命題６】

一般に、作用素　$\sigma : \Lambda^2 \to L^2(\Omega)$ が上記の（ｉ），（ｉｉ），（ｉｉｉ）をみたすならば、全ての　$0<p<2$につき、ｐにのみ依存する定数C_p があって、

$$E(\sigma(\Phi)^p) \leqq C_p \|\Phi\|_{\Lambda^p}^p$$

が成り立つ。（証明は付記２。）

この命題により、σは　$\Lambda^p \to L^p(\Omega)$　（$0<p<2$）に連続性を使って拡張される。その結果、確率積分はΛ^p に拡げられ、

$$M_t = \int_{]0,t]} \Phi_s \cdot dB_s \in L^p(\Omega)$$

により、軌跡の連続な確率過程　$M=(M_t)$ が得られることになる。$p \geqq 1$では、これはL^p閉な、両軸上０のマルチンゲールである。$0<p<1$であっても、ある意味で局所マルチンゲールである。（［２］）

【定義】

$\Lambda^p \ni \Phi$に上記の様に対応する確率過程　$M=(M_t)$ 全体にΛ^pの位相を入れて、H^p と名づける。

だいぶ導入に手間取ったが、このH^p とくにH^1 が本稿の主題である。次に、いくつかの記号を準備する。

マルチンゲール　M　に対応する　Φ　は、今後　$\nabla M_t = \left(\frac{\partial^2 M_t}{\partial B^{1i}\ \partial B^{2j}}\right)$ と書かれ、Mの　bi-gradient　などと呼ばれる。∇Mの軌跡のL^2 ノルムの２乗は、

$$\langle M\rangle = \int_{(\mathbb{R}_+)^2} |\nabla M_t|^2\, dt$$

L^2 ノルムは、

$$S(M) = \langle M\rangle^{1/2}$$

と記される。したがって、H^p ノルムは

$$\|M\|_{H^p} = \|S(M)\|_{L^p} = E(\langle M\rangle^{p/2})^{1/p}$$

となる。Mの軌跡の　L^∞ ノルムにあたるものは、

$$M^*(\omega) = \sup_t |M_t(\omega)|$$

とする。

以上に関しては、１径数のときと同様に、次の命題が成立する。

【命題７】

（１）　$1<p<\infty$では、$\|M\|_{H^p}$と　$\|M_\infty\|_{L^p}$ は、ノルムとして同値（～で表わす）。

（２）　$p=2$　では、$\|M\|_{H^2}=\|M_\infty\|_{L^2}$ 。

（３）　$0<p<\infty$　で、pのみに依存する定数C_p があって、

$$\|M^*\|_{L^p} \leq C_p\ \|M\|_{H^p}。$$

（４）　$1<p<\infty$　で、

$$\|M\|_{H^p} \sim \|M^*\|_{L^p} \sim \|M_\infty\|_{L^p} = \sup_t \|M_t\|_{L^p}。$$

（証明）　（２）は、確率積分の等距離性である。（３）は$0<p\leq 2$では命題５で

ある。$1<p<\infty$では、（１）が示されさえすれば、命題１から出てくる。

（１）を示すには、１径数の対応する結果を使う。$\omega_2\in\Omega^2$ を固定して、確率過程

$$(\omega_1, t_1) \to (t_2 \to \nabla M_{t_1t_2}(\omega_1, \omega_2))$$

を考えて、これを１径数で $L^2(\mathbb{R}_+^*;\mathbb{R}^{d_2})^{d_1}$ 値の predictableな過程とみなす。必要ならば、∇Mを命題２の（１）の様な単純なものと仮定しておけばよい。すると、$\nabla M_{t_1t_2}\cdot dB_{t_1}^1=(\sum_i \frac{\partial^2 M_{t_1t_2}}{\partial B^{1i}\partial B^{2j}}dB_{t_1}^{1i})$を t_1 について積分して得られる確率過程は、$L^2(\mathbb{R}_+^*;\mathbb{R}^{d_2})$値のマルチンゲールである。１径数での（１）は、可分なヒルベルト空間を値にとる場合に成立するから、pにのみ依存する定数によって、

$$E_1\left[\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty|\nabla M_{t_1t_2}(\omega_1, \omega_2)|^2 dt_2\right)dt_1\right)^{p/2}\right]$$

と

$$E_1\left[\left(\int_0^\infty\left|\int_0^\infty\nabla M_{t_1t_2}(\omega_1, \omega_2)\cdot dB_{t_1}^1(\omega_1)\right|^2 dt_2\right)^{p/2}\right]$$

とは同値である。双方のE_2 をとれば、前者は $\|M\|_{H^p}^p$ である。後者で E_1 と E_2 とを交換してみると、E_1 の被積分関数は、

$$E_2\left[\left(\int_0^\infty\left|\int_0^\infty\nabla M_{t_1t_2}(\omega_1, \omega_2)\cdot dB_{t_1}^1(\omega_1)\right|^2 dt_2\right)^{p/2}\right]$$

となる。今度は、$\omega_1\in\Omega^1$ を固定して、

$$t_2\to\int_0^\infty\nabla M_{t_1t_2}(\omega_1, \omega_2)\cdot dB_{t_1}^1(\omega_1)$$

を、$\mathbb{R}^{d_2}$値の predictableな１径数の過程として、B^2 で確率積分すれば、１径数マルチンゲールとなる。そこで１径数の（１）により、pにのみ依存する定数によって、

$$E_2\left[\left(\int_0^\infty\left|\int_0^\infty\nabla M_{t_1t_2}(\omega_1, \omega_2)\cdot dB_{t_1}^1(\omega_1)\right|^2 dt_2\right)^{p/2}\right]$$

と

$$E_2\left[\left|\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\nabla M_{t_1t_2}(\omega_1, \omega_2)\cdot dB_{t_1}^1(\omega_1)\right)\cdot dB_{t_2}^2(\omega_2)\right|^p\right]$$

とが同値になる。双方の E_1 をとり、後者の内部の

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\nabla M_{t_1t_2}\cdot dB_{t_1}^1\right)\cdot dB_{t_2}^2$$

が

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2}\nabla M_t\cdot dB_t$$

に等しい（Ｆｕｂｉｎｉ型定理…∇Ｍが単純な場合は自明）ことに注意すれば、ノルムの同値性が少なくともH^p の　ｄｅｎｓｅな部分空間で成立する。あとは、極限をとってH^p 全体に同値性をひろげればよい。

（４）を示すには、まだ$\|M^*\|_{L^p}$ と　$\sup_t \|M_t\|_{L^p}$ が残っている。この２つが１＜ｐ＜∞で互に同値であることは、命題１より明らかである（逆向きの不等式は自明）し、後者が$\|M_\infty\|_{L^p}$ に等しいことも、§２の（４）と（５）よりわかる。あとは、$\sup_t \|M_t\|_{L^p} \leq \|M^*\|_{L^p} \leq C_p \|M\|_{H^p} \sim \|M_\infty\|_{L^p}$ で証明が終る。

この証明もまた、１径数の結果を繰り返し使うわけで、命題１の証明に類似している。ただ異っているのは、可分ヒルベルト空間を値とする１径数マルチンゲールを使っている点だけである。暗黙のうちに使っているもう一つの事項は、確率積分についてのＦｕｂｉｎｉ型の定理である。上の証明では、考察の対象をごく単純なものに限って、残ったところはｄｅｎｓｉｔｙで処理する様にして、あからさまにＦｕｂｉｎｉの定理を使わずにすましているが、そのｆｏｒｍｕｌａｔｉｏｎと証明の詳細は、［２］を見ていただきたい。

不等式（３）の逆向きの不等式も成立する。それを証明するには、１径数を２度使用するこれまでのやり方ではもはや対処できず、さらに強力な手段が必要になる。それが、次節で紹介する伊藤型の公式である。

§５．　ｂｉ－Ｂｒｏｗｎｉａｎ　ｍａｒｔｉｎｇａｌｅ　での伊藤の公式

マルチンゲール　Ｍ　を滑らかな関数ｆに合成して得られる確率過程

$$t \to f(M_t)$$

を取扱うにあたって、１径数で用いられる強力な道具の筆頭にあげられるのは、何といっても伊藤の公式である。２径数においても、それを全く形式的に拡張しただけの公式が成り立ち、H^p の研究の不可欠な道具になっている。

２径数での確率微分の規則は、１径数の規則、例えばｃｈａｉｎ　ｌａｗ

$$\frac{\partial f(M_t)}{\partial B^{i}} = f'(M_t)\cdot\frac{\partial M_t}{\partial B^{i}} \qquad \text{etc.}$$

その他と、B^1 とB^2 による微分の交換可能性

$$\frac{\partial^2}{\partial B^{1i}\partial B^{2j}}=\frac{\partial^2}{\partial B^{2j}\partial B^{1i}}$$

だけである。以下に例を示すと、

$$\frac{\partial f(M)}{\partial B^1}=f'(M)\left(\frac{\partial M}{\partial B^{1i}};\ i=1,\cdots,d_1\right)$$

この最後のベクトルを$\nabla_1 M$と書こう。同様に、$\nabla_2 M$も定義しておく。

$$\frac{\partial^2 f(M)}{\partial B^1\partial B^2}=f''(M)(\nabla_1 M\otimes\nabla_2 M)+f'(M)\nabla M$$

$$\frac{\partial^2 f(M)}{(\partial B^1)^2}=f''(M)|\nabla_1 M|^2$$

$$\frac{\partial^4 f(M)}{(\partial B^1)^2(\partial B^2)^2}=2f''(M)|\nabla M|^2+4f^{(3)}(M)\nabla_1 M\cdot\nabla M\cdot\nabla_2 M$$
$$+f^{(4)}(M)|\nabla_1 M|^2|\nabla_2 M|^2$$

但し、$\nabla_1 M\cdot\nabla M\cdot\nabla_2 M=\sum_{ij}\frac{\partial M}{\partial B^{1i}}\frac{\partial^2 M}{\partial B^{1i}\partial B^{2j}}\frac{\partial M}{\partial B^{2j}}$

等となる。

【定理１】（Ｂｒｏｓｓａｒｄ，Ｃｈｅｖａｌｉｅｒ）

　ｆを$\mathbb{R}$上無限回微分可能でｃｏｍｐａｃｔな台をもつ関数とし、$M\in H^p$ とすると、任意の$t\in(\mathbb{R}_+)^2$で

$$f(M_t)-f(0)=\int_{]0,t]}\frac{\partial^2 f(M_s)}{\partial B^1\partial B^2}\cdot dB_s+\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\frac{\partial^2 f(M_{s_1t_2})}{(\partial B^1)^2}ds_1$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{t_2}\frac{\partial^2 f(M_{t_1s_2})}{(\partial B^2)^2}ds_2$$
$$-\frac{1}{4}\int_{]0,t]}\frac{\partial^4 f(M_s)}{(\partial B^1)^2(\partial B^2)^2}ds\qquad(\mathrm{a.s.})$$

が成り立つ。

　証明は［２］を見ていただきたい。形式的には、１径数の伊藤の公式を二重に使った上に、交叉項（$dB^1_{s_1}\ ds_2$ と$ds_1\ dB^2_{s_2}$ の積分項）に１径数の公式を逆用して$dB^1_{s_1}$ や$dB^2_{s_2}$ の積分を除いて得られる公式である。ｆの無限回可微分性は弱められて、せいぜい４階微分までの連続性を仮定すれば足りるし、ｆの台をｃｏｍｐａｃｔとしたのも可積分性を保障したかったためで、実際にはかなり弱められる。例えば、Ｍが命題２の（１）の様な単純なものであれ

ば、fの台には全く制限は要らないし、その上、定理1の証明も形式的議論だけで全く十分なのである。

【例1】

マルチンゲール　M　に対し、M^2 の表現を見てみよう。可積分性に問題がないものとして $f(x)=x^2$ に定理1を適用すると、

$$M_t^2 = N_t - \langle M_t \rangle + \int_0^{t_1} |\nabla_1 M_{s_1 t_2}|^2 d s_1 + \int_0^{t_2} |\nabla_2 M_{t_1 s_2}|^2 d s_2 \qquad (☆)$$

但し N_t は（局所）マルチンゲールで

$$N_t = 2\int_{]0,t]} (M_s \nabla M_s + \nabla_1 M_s \otimes \nabla_2 M_s) \cdot d B_s$$

となる。

ちなみに、1径数の公式を形式的に2度使用した形は、

$$\begin{aligned} M_t^2 = \ & N_t + 2\int\int_{]0,t]} \nabla M_s \cdot \nabla_2 M_s \cdot d B^1_{s_1} d s_2 \\ & + 2\int\int_{]0,t]} \nabla_1 M_s \cdot \nabla M_s \cdot d B^2_{s_2} d s_1 + \langle M_t \rangle \qquad (★) \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\nabla M \cdot \nabla_2 M \cdot d B^1 = \sum_{ij} \frac{\partial^2 M}{\partial B^{1i} \partial B^{2j}} \frac{\partial M}{\partial B^{2j}} d B^{1i}$$

$$\nabla_1 M \cdot \nabla M \cdot d B^2 = \sum_{ij} \frac{\partial^2 M}{\partial B^{1i} \partial B^{2j}} \frac{\partial M}{\partial B^{1i}} d B^{2j} \quad 。$$

1径数の公式

$$|\nabla_2 M_t|^2 = 2\int_0^{t_1} \nabla M_{s_1 t_2} \cdot \nabla_2 M_{s_1 t_2} \cdot d B^1_{s_1} + \int_0^{t_1} |\nabla M_{s_1 t_2}|^2 d s_1$$

によれば、（★）の第2項から B^1 による積分を消去できる。第3項についても同様にして得られるのが、（☆）なのである。

また、1径数の公式

$$\begin{aligned} M_t \nabla_1 M_t = \ & 2\int_0^{t_2} (\nabla_1 M_{t_1 s_2} \otimes \nabla_2 M_{t_1 s_2} + M_{t_1 s_2} \nabla M_{t_1 s_2}) \cdot d B^2_{s_2} \\ & + \int_0^{t_2} \nabla M_{t_1 s_2} \cdot \nabla_2 M_{t_1 s_2} d s_2 \end{aligned}$$

を B^1 で積分して（★）の第2項に代入し、第3項も同様にすれば、

$$\begin{aligned} M_t^2 = \ & \langle M_t \rangle - N_t + \int_0^{t_1} M_{s_1 t_2} \nabla_1 M_{s_1 t_2} \cdot d B^1_{s_1} \\ & + \int_0^{t_2} M_{t_1 s_2} \nabla_2 M_{t_1 s_2} \cdot d B^2_{s_2} \qquad (★★) \end{aligned}$$

とも書ける。（★）も（★★）も、M^2 と $\langle M \rangle$ との間に、両軸上0のマルチンゲールだけではなく、さらに始点0の１径数マルチンゲールが２個はさまっていることを示している。平均をとればこれらのマルチンゲールは消えるので、Λ^2 と $L^2(\Omega)$ の等距離性を再び得るわけである。

【例２】

定理１を $f(x)=x^4$ に適用すれば、M^4 の表現を得る。

$$M_t^4 = N_t + 6\int_0^{t_1} M_{s_1 t_2}^2 |\nabla_1 M_{s_1 t_2}|^2 ds_1 + 6\int_0^{t_2} M_{t_1 s_2}^2 |\nabla_2 M_{t_1 s_2}|^2 ds_2$$
$$-6\int_{]0,t]} \left(|\nabla_1 M_s|^2 |\nabla_2 M_s|^2 + 4M_s \nabla_1 M_s \cdot \nabla M_s \cdot \nabla_2 M_s + 2M_s^2 |\nabla M_s|^2 \right) ds$$

ここで、マルチンゲール項は

$$N_t = \int_{]0,t]} (4M_s^3 \nabla M_s + 12M_s^2 \nabla_1 M_s \otimes \nabla_2 M_s) \cdot dB_s$$

である。

以上に見て来た様な計算は、記号の不備もあって、不必要に繁雑な印象を与えたかもしれないが、この節の内容は、将来２径数のセミ・マルチンゲール論あるいは２径数の確率微分幾何が整備されれば、もう少し透明になろう。

§６．Ｂｕｒｋｈｏｌｄｅｒ－Ｇｕｎｄｙ不等式

表題の名前で呼ばれるのは、§４．の終りに注意した、命題７の（３）の逆向き不等式

$$E(S(M)^p) \leq C_p E(M^{*p}) \qquad 0<p<\infty$$

である。$1<p<\infty$ では既に命題７の（４）で分っているから、問題は $0<p\leq 1$ の場合である。

前節の伊藤型の公式を応用してこれを証明することに成功したのは、ＢｒｏｓｓａｒｄとＣｈｅｖａｌｉｅｒ［２］である。以下に彼等の証明を紹介する。

【定理2】

$0<p\leqq 2$なる任意のpに対し、pにのみ依存する定数$C_p>0$があって、任意の$M\in H^p$について、

$$E(S(M)^p)\leqq C_p E(M^{*p})$$

が成り立つ。

（証明）　∇Mが命題2の様に単純であると仮定して証明できればよい。何故ならばこの定理の意味するのは“ノルム”$\|M\|_{H^p}$と$\|M^*\|_{L^p}$の同値性であり、それはH^pのｄｅｎｓｅな部分空間で示されればよいのだから。以下、その様に仮定しておく。すると、次の確率変数の定義が意味をもつ。

$$T(M)=\left(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2}|\nabla_1 M_s|^2|\nabla_2 M_s|^2\,ds\right)^{1/4}$$

そこで、次の3つの補題を使う。

【補題1】

$0<p\leqq 2$　なる任意のpにつき、pにのみ依存する定数$C_p>0$があって

$$E(S(M)^p)\leqq C_p\{E(M^{*p})+E(T(M)^p)\}$$

が成り立つ。

【補題2】

$0<p\leqq 2$　なる任意のpにつき、pにのみ依存する定数$C_p>0$があって

$$E(T(M)^p)\leqq C_p\{E(M^{*p})+E(M^{*p})^{1/2}E(S(M)^p)^{1/2}\}$$

が成り立つ。

【補題3】

ある定数$C>0$につき不等式　$x^2\leqq C(xy+y^2)$　をみたす　任意の　$x\geqq 0$　と　$y\geqq 0$　は、Cのみに依存するある定数$C'>0$につき、$x\leqq C'y$　をみたす。

補題3は初等的な2次不等式の命題で、簡単に証明できる。補題1と2の証明は後

まわしにすることにして、ひとまずこの２補題の成立を仮定すれば、次の不等式が得られる。

$$E(S(M)^p) \leq C_p \{E(M^{*p}) + E(M^{*p})^{1/2} E(S(M)^p)^{1/2}\}$$

そこで、$x = E(S(M)^p)^{1/2}$、$y = E(M^{*p})^{1/2}$とおけば、補題３によって定理２が示される。

あとは、∇Mが単純であるとの仮定の下で、補題１と２を証明すればよい。

（補題１の証明）前節の例１に見たM　の表現から、

$$S(M)^2 \leq |N_\infty| + \int_0^\infty |\nabla_1 M_{s_1\infty}|^2 ds_1 + \int_0^\infty |\nabla_2 M_{\infty s_2}|^2 ds_2$$

となる。p／２≦１より、両辺のp／２乗をとって

$$S(M)^p \leq |N_\infty|^{p/2} + \left(\int_0^\infty |\nabla_1 M_{s_1\infty}|^2 ds_1\right)^{p/2} + \left(\int_0^\infty |\nabla_2 M_{\infty s_2}|^2 ds_2\right)^{p/2}$$

を得る。次に右辺の各項の平均を評価する。

・第２項：１径数では定理２は既知であるので、それを

$$t_1 \to \int_0^{t_1} \nabla_1 M_{s_1\infty} \cdot dB^1_{s_1}$$

に適用して、

$$E\left[\left(\int_0^\infty |\nabla_1 M_{s_1\infty}|^2 ds_1\right)^{p/2}\right] \leq C_p E(\sup_{s_1} |M_{s_1\infty}|^p) \leq C_p E(M^{*p})$$

を得る。

・第３項：第２項と同様にして、

$$E\left[\left(\int_0^\infty |\nabla_2 M_{\infty s_2}|^2 ds_2\right)\right] \leq C_p E(M^{*p})$$

・第１項：命題７の（３）（あるいは命題５）により、

$$E(|N_\infty|^{p/2}) \leq C_p E(S(N)^{p/2})$$

N　の形を見れば、

$$S(N) \leq 2\left(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} M_s^2 |\nabla M_s|^2 ds\right)^{1/2} + 2\left(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} |\nabla_1 M_s|^2 |\nabla_2 M_s|^2 ds\right)^{1/2}$$

右辺第１項はあきらかに　$M^* S(M)$　でおさえられ、右辺第２項は定義より$T(M)^2$でおさえられる。よってシュヴァルツの不等式により、

$$E(S(N)^{p/2}) \leq C_p \{E(M^{*p})^{1/2} E(S(M)^p)^{1/2} + E(T(M)^p)\}$$

となる。

以上あわせて、不等式

$$E(S(M)^p) \leq C_p \{E(M^{*p})^{1/2} E(S(M)^p)^{1/2} + E(M^{*p}) + E(T(M)^p)\}$$

を得る。ここで

$$x = E(S(M)^p)^{1/2}$$

$$y = \{E(M^{*p}) + E(T(M)^p)\}^{1/2}$$

とおいて補題３を適用すれば、証明が完了する。

（補題２の証明）前節の例２に見たM^4 の表現から、

$$\begin{aligned}
6T(M)^4 \leq & |N_\infty| + 6\int_0^\infty M_{s_1\infty}^2 |\nabla_1 M_{s_1\infty}|^2 ds_1 + 6\int_0^\infty M_{\infty s_2}^2 |\nabla_2 M_{\infty s_2}|^2 ds_2 \\
& + 24\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} |M_s||\nabla_1 M_s \cdot \nabla M_s \cdot \nabla_2 M_s| ds \\
& + 12\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} M_s^2 |\nabla M_s|^2 ds \\
\leq & |N_\infty| + 6M^{*2}\int_0^\infty |\nabla_1 M_{s_1\infty}|^2 ds_1 \\
& + 6M^{*2}\int_0^\infty |\nabla_2 M_{\infty s_2}|^2 ds_2 \\
& + 24M^*\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} |\nabla_1 M_s||\nabla M_s||\nabla_2 M_s| ds \\
& + 12M^{*2}\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} |\nabla M_s|^2 ds \\
\leq & |N_\infty| + 6M^{*2}\int_0^\infty |\nabla_1 M_{s_1\infty}|^2 ds_1 \\
& + 6M^{*2}\int_0^\infty |\nabla_2 M_{\infty s_2}|^2 ds_2 \\
& + 24M^* S(M) T(M)^2 + 12M^{*2} S(M)^2
\end{aligned}$$

と評価される。$p/4 < 1$なので、両辺の$p/4$乗をとると、

$$\begin{aligned}
T(M)^p \leq C_p \{ & |N_\infty|^{p/4} + M^{*p/2}\left(\int_0^\infty |\nabla_1 M_{s_1\infty}|^2 ds_1\right)^{p/4} \\
& + M^{*p/2}\left(\int_0^\infty |\nabla_2 M_{\infty s_2}|^2 ds_2\right)^{p/4} \\
& + M^{*p/4} S(M)^{p/4} T(M)^{p/2} + M^{*p/2} S(M)^{p/2} \}
\end{aligned}$$

となる。そこで両辺の平均をとり、右辺を一つづつ評価してゆく。

・第１項：命題７の（３）により、

$$E(|N_\infty|^{p/4}) \leq C_p\, E(S(N)^{p/4}) 。$$

・第２項：シュヴァルツの不等式により、

$$E(M^{*p})^{1/2} E[(\int_0^\infty |\nabla_1 M_{s_1\infty}|^2 ds_1)^{p/2}]^{1/2}$$

でおさえられる。右側の積分項は、補題１の証明と同様にして、

$$E[(\int_0^\infty |\nabla_1 M_{s_1\infty}|^2 ds_1)^{p/2}] \leq C_p\, E(M^{*p})$$

となるから、結局第２項は　$E(M^{*p})$ でおさえられる。

・第３項：第２項と同じく、$E(M^{*p})$ でおさえられる。

・第４、第５項：シュヴァルツの不等式により、それぞれ

$$[E(M^{*p})E(S(M)^p)]^{1/4} E(T(M)^p)^{1/2}$$

$$[E(M^{*p})E(S(M)^p)]^{1/2}$$

でおさえられる。

以上を合わせると、

$$E(T(M)^p) \leq C_p\{[E(M^{*p})E(S(M)^p)]^{1/4} E(T(M)^p)^{1/2} + [E(M^{*p})E(S(M)^p)]^{1/2} + E(M^{*p}) + E(S(N)^{p/4})\}$$

となる。そこで

$$x = E(T(M)^p)^{1/2}$$

$$y = \{[E(M^{*p})E(S(M)^p)]^{1/2} + E(M^{*p}) + E(S(N)^{p/4})\}^{1/2}$$

とおいて補題３を適用すれば、

$$E(T(M)^p) \leq C_p\{[E(M^{*p})E(S(M)^p)]^{1/2} + E(M^{*p}) + E(S(N)^{p/4})\}$$

を得る。右辺に $S(N)^{p/4}$ の項が出てきたので、次にこれを評価する。例２のＮの表現より、

$$\begin{aligned} S(N) &\leq 4\{\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} M_s^6 |\nabla M_s|^2 ds\}^{1/2} \\ &\quad + 12\{\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} M_s^4 |\nabla_1 M_s \otimes \nabla_2 M_s|^2 ds\}^{1/2} \\ &\leq 4M^{*3} S(M) + 12M^{*2} T(M)^2 \end{aligned}$$

$$\leq 4M^{*4}+4M^{*2}S(M)^2+12M^{*2}T(M)^2$$

両辺のp／4乗をとってから平均をとり、ひとつ上の不等式に代入してシュヴァルツの不等式を使えば、

$$E(T(M)^p)\leq C_p\ \{E(M^{*p})^{1/2}E(T(M)^p)^{1/2}$$
$$+E(M^{*p})+[E(M^{*p})E(S(M)^p)]^{1/2}\}$$

そこで、

$$x = E(T(M)^p)^{1/2}$$
$$y = \{E(M^{*p})+[E(M^{*p})E(S(M)^p)]^{1/2}\}^{1/2}$$

とおいて補題3を適用すれば、補題2は証明される。

以上で定理2の証明が終った。お気付きの様に、伊藤の公式の他に、補題3によって2次不等式を解く議論をしつこく繰り返している。この論法は別段新しいものではなく、1径数でも時折見られるのである。

これまでの結果を要約すると、次の様になる。

【系】

- $0<p<\infty$ で、H^p 上において、

$$E(M^{*p})\sim E(S(M)^p)\equiv\|M\|_{H^p}^p$$

- $1<p<\infty$ では、さらに

$$E(S(M)^p)\sim\|M_\infty\|_{L^p}^p\quad(p=2\ \text{では等号})$$

いずれも、1径数ではよく知られた結果である。

§7. bi－Brownian martingale の「停止」

マルチンゲールを停止時間で自由に止められること、それがあるσ－加法族による条件付平均になっていること等が、1径数では極めて有用な事実であることは周知である。ところが2

径数となると、「時間」径数が全順序をなさないことから、停止時間の概念はその効力を著しく減じてしまう。それどころか、何が良い「停止」の定義なのか、それすらはっきりしていないと言っても、言いすぎではあるまい。一般論については、例えば［９］を見て頂くことにして、ここではｂｉ－Ｂｒｏｗｎｉａｎ　ｍａｒｔｉｎｇａｌｅに的をしぼって、一つの停止概念の拡張を導入する。

ヒントは、確率積分でマルチンゲールを表現するところにある。そこでは、条件付平均

$$M_\infty \to M_t = E(M_\infty \mid \mathcal{F}_t)$$

が、ｂｉ－ｇｒａｄｉｅｎｔ　∇M　を区間］０，ｔ］でｔｒｏｎｃａｔｅすることに対応していた。それならば、ｐｒｅｄｉｃｔａｂｉｌｉｔｙを守りさえすれば、どんな集合を用いてｔｒｏｎｃａｔｅをしても悪くないはずである。そう考えて、次の様な定義を採用する。

【定義】

$\Omega \times (\mathbb{R}_+^*)^2$内の$\mathcal{P}$ 可測集合Ａによって

$$T : \Omega \ni \omega \to \{t \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : A \ni (\omega, t)\}$$

と定義される集合関数を　région　aléatoire　（英語ならば、ｒａｎｄｏｍ　ｒｅｇｉｏｎ　とでもなろうから、ｒ．ｒ．と略する）と呼ぶ。

$(\mathbb{R}_+)^2 \ni t \to \chi_{\{t \in T\}}$ とおいてみれば、ｐｒｅｄｉｃｔａｂｌｅ　ｐｒｏｃｅｓｓで値域が｛０，１｝となるもののことである。定義より、以下の性質は自明である。

（１）　$T(\omega) \equiv \phi$ ，$T(\omega) \equiv (\mathbb{R}_+^*)^2$ はｒ．ｒ．である。

（２）　T がｒ．ｒ．ならば、$T^c(\omega) \equiv (\mathbb{R}_+^*)^2 \setminus T(\omega)$ もｒ．ｒ．

（３）　$\{T_n : n = 1, \cdots\}$ をｒ．ｒ．の列とすれば、

$$\bigcup_n T_n : \omega \to \bigcup_n (T_n(\omega))$$

$$\bigcap_n T_n : \omega \to \bigcap_n (T_n(\omega))$$

もｒ．ｒ．である。

１径数でも同じ概念を考えて良さそうなものだが、似た様なアイデアとしては、確率区間（ｓｔｏｃｈａｓｔｉｃ　ｉｎｔｅｒｖａｌ）がある程度の様である。停止時間が強力で簡単

なためにゝそれ以上凝る必要が無いためであろうか。

ｒ．ｒ．による「停止」は次の様になる。

【定義】

Ｔ をｒ．ｒ．、Ｍ をH^p クラスの（局所）マルチンゲールとする。これについて、確率変数M_Tを、

$$M_T \equiv \int_{(\mathbb{R}_+^2)^2} \chi_{\{t\in T\}} \nabla M_t \cdot dB_t$$
$$= \int_{\{t\in T\}} \nabla M_t \cdot dB_t$$

と定義する。また、$\langle M_T \rangle$を

$$\langle M_T \rangle \equiv \int_{\{t\in T\}} |\nabla M_t|^2 dt$$

と定義する。

次の性質はいずれも簡単に確かめられる。

（４） $t\in(\mathbb{R}_+)^2$について、$T(\omega)\equiv]0,t]$とおけば、$M_T=M_t$ 。

（５） Ｓ，Ｔがｒ．ｒ．ならば、$(M_S)_T=M_{S\cap T}$ 。

（６） $T(\omega)=\phi$ なるωでは、ａ．ｓ．に $M_T(\omega)=0$ 。

（７） $t \to M_{T\cap]0,t]}$は、 M_Tに閉じられた（局所）マルチンゲールで、やはり M_Tと記することにする。これが、Ｍ をＴで「停止」したマルチンゲールである。$\langle M_T\rangle \leq \langle M\rangle$であるから、

$$\| M_T \|_{H^p} \leq \| M \|_{H^p}$$

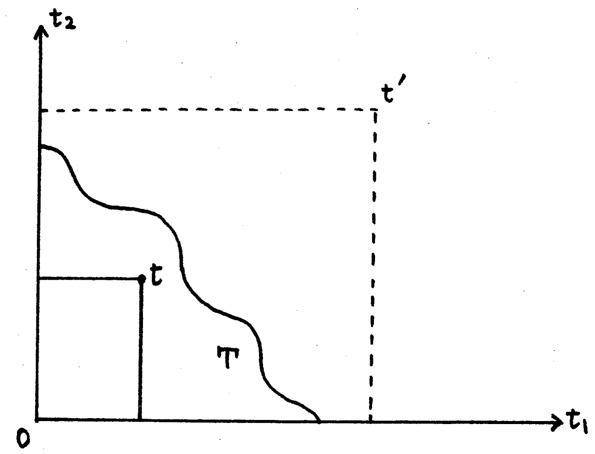
となり、写像 $M \to M_T$は H^p 上連続線型である。

１径数でこの様な操作を確率区間［０，Ｔ］に対して行えば、マルチンゲールは確かに時刻Ｔで正確に停止してくれるが、２径数の「停止」ではそうならない。

ｒ．ｒ．の中でも、比較的確率区間に近い性質

$t\in T(\omega)$ ならば $]0,t]\subset T(\omega)$ （ａ．ｓ．）

を有するものを、ｄｏｍａｉｎｅ ｄ’ａｒｒêｔ （ｓｔｏｐｐｉｎｇ ｄｏｍａｉｎ）と呼ぶことがある（［２］）。ｒ．ｒ．をこの型のものに限ってみても、マルチンゲールの停止



はうまく行かない。停止したはずのマルチンゲール　$(M_T)_t$　が実際に停止するのは、$]0, t]$ がT（または∇Mの台とTの共通部分）を含んでしまった時であって、それまではtがTの外に出ても、減速をすることはあっても、急に停止をしないことは明白である。それどころか、例えば

$$T(\omega) \equiv \{t \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \ : \ 0 < t_1 t_2 \leq 1\}$$

$$\nabla M_t\ (\omega) \equiv 1 / (1 + t_1^2 + t_2^2)$$

としてみれば、M_TはTで「停止」しても決して停止しない。これでも「停止領域」の名に値するであろうか。

それでは、M_T を実限する方法についてはどうか。1径数ならば簡単で、マルチンゲールに停止時間を合成すれば事足りる。2径数では、ｄｏｍａｉｎｅ　ｄ'ａｒｒｅｔ　についてさえ、それ程単純ではない。

M_T は、1径数では、あるσ加法族 $\mathfrak{F}_T$ を構成しておいてから、$E(M_\infty \mid \mathfrak{F}_T)$ としても得られる。2径数では、これも不明である。Tをｄｏｍａｉｎｅ　ｄ'ａｒｒêｔ　に限ってみても、M_T が　M_∞ の条件付平均であるかどうか、そうだとしても、$\mathfrak{F}_T$ の定義はどうなるか、不明確である。

以上の様に、2径数の「停止」は、はなはだ心もとないものではあるが、少くとも次の命題は成り立ち、わずかながら、計算の足しにはなってくれる。

【命題８】

$1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$　とする。任意の　$M \in H^p$、$N \in H^q$　と　r.r.T　について、

$$E(M_\infty N_T) \ = \ E(M_T N_T)$$

が成り立つ。

（証明）　$p = q = 2$　と仮定して良い。$\langle M \rangle$ がMの2次形式であることから、そのｐｏｌａｒｉｚａｔｉｏｎ

$$\langle M, N\rangle \equiv \frac{1}{2}\{\langle M+N\rangle - \langle M\rangle - \langle N\rangle\}$$

をとると、

$$E(M_\infty N_\infty) = E(\langle M, N\rangle)$$

を得る一方、

$$\langle M, N\rangle = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \nabla M_t \cdot \nabla N_t \, dt$$

となる。M_T, N_T の定義を見れば、この命題の成立は明らかである。

Ⅱ. bi-Brownian martingale の H^1 と BMO

§8. Atom

$1<p<\infty$ で、H^p は L^pの両軸上0の部分空間と同型であることを既に見た。$p=1$ では、それが成り立たないことは、1径数の場合から明らかである。（1径数の、両軸上0の L^1マルチンゲールで H^1 に入らないものを2個とって積を作ればわかる。）そこで、1径数の時にならって、H^1 の構造を調べ、その双対空間を決定してみよう。

【定義】

$A\in H^2$ が atom とは、あるr.r.Tがあって、

（1） $A_\infty = A_T$

（2） $\|A_T\|_{L^2}^2 \leq 1/P(T\neq\phi)$

となることである。

【命題9】

A が atom ならば、$\|A\|_{H^1}\leq 1$ である。

（証明） $\|A\|_{H^1} = E(\langle A\rangle^{1/2}) = E(\langle A_T\rangle^{1/2}; T\neq\phi)$

ここで、シュヴァルツの不等式により、

$$\| A \|_{H^1} \leq E(\langle A_T \rangle)^{1/2} P(T \neq \phi)^{1/2} \leq 1。$$

次の定理は、ａｔｏｍ分解と呼ばれる H^1 の構造定理である。

【定理３】

ある定数Ｃ＞０があって、任意の $M \in H^1$ に対して、あるａｔｏｍ列 $\{A^n ; n \in \mathbb{Z}\}$ と ｓｃａｌａｒ列 $\{\lambda_n ; n \in \mathbb{Z}\}$ を、次の（１）、（２）がみたされる様にとることができる。

（１） $\sum_n |\lambda_n| \leq C \| M \|_{H^1}$

（２） $\sum_n \lambda_n A^n = M$ 。

なお、（２）の収束は、$M \in H^2$ のときは H^2 収束（つまり L^2 収束）とできる。

証明は、付記２を見ていただきたい。この定理によれば、H^1 が、ａｔｏｍの全体で生成されていることが分るのみならず、H^1 の双対の形まで決定することができる。１径数の場合は［５］を参照されたい。２径数のこの定理は、まず離散径数の特別な場合に示され（［１］）ついで、ｂｉ－Ｂｒｏｗｎｉａｎ の場合に応用された（［４］，［１０］）。

§９． BMO

定理２が指し示している、H^1 の双対は、１径数の場合に習ってＢＭＯと呼ばれる、次の様な型のマルチンゲールの集合である。

【定義】

$N \in H^2$ がＢＭＯであるとは、ある定数Ｃ＞０があって、任意のｒ．ｒ．Ｔに対して、

$$\| N_T \|_{L^2} \leq C P(T \neq \phi)^{1/2}$$

となることである。任意のＴにつき、この不等式を成り立たせる定数Ｃの下限をＮのＢＭＯノルム $\| N \|_{BMO}$ と定義する。

こうして、BMOはノルム空間になるが、このノルムは次の命題により、ａｔｏｍと結びつく。

【命題１０】

任意のBMOマルチンゲールNについて、

$$\|N\|_{BMO}=\sup\{|E(A_\infty N_\infty)|;\ A\ は全てのatom\}$$

が成り立つ。

（証明）　A　を任意のａｔｏｍ、T　を　$A_\infty=A_T$ なるｒ．ｒ．としよう。

命題８より、

$$E(A_\infty N_\infty)=E(A_T N_T)$$

これにシュヴァルツの不等式を適用して、

$$\begin{aligned}|E(A_\infty N_\infty)| &\leq \|A_T\|_{L^2}\|N_T\|_{L^2}\\ &\leq \|N_T\|_{L^2}/P(T\neq\phi)^{1/2}\\ &\leq \|N\|_{BMO}\end{aligned}$$

を得る。従って、証明すべき式の、左辺≧右辺　が示される。逆向きの不等式を出すには、任意のｒ．ｒ．Tに対し、

$$A_\infty=N_T/\|N_T\|_{L^2}P(T\neq\phi)^{1/2}$$

とおけば、A_∞ で閉じられるマルチンゲール　A　はａｔｏｍであることが、容易に確かめられる。さらに、命題８により、

$$E(A_\infty N_\infty)=E(A_\infty N_T)=\|N_T\|_{L^2}/P(T\neq\phi)^{1/2}$$

となるから、BMOノルムの定義より、

$$\|N\|_{BMO}\leq\sup\{|E(A_\infty N_\infty)|;Aは任意のatom\}。$$

さらに、両軸上０のL^∞ 閉マルチンゲールがBMOに入ることも知られる。

【命題１１】

$N\in H^2$ で、$N_\infty\in L^\infty$ ならば、$N\in BMO$　で、$\|N\|_{BMO}\leq\|N_\infty\|_{L^\infty}$。

（証明） 任意のａｔｏｍ　Ａ　について、そのｒ．ｒ．をＴとすると、

$$|E(A_\infty N_\infty)| = |E(A_T N_\infty)|$$
$$\leq E(|A_T|)\,\|N_\infty\|_{L^\infty}$$

さらに、$E(|A_T|) = E(|A_T|\,;\,T \neq \phi)$ にシュヴァルツの不等式を適用して、$E(|A_T|) \leq 1$ がわかるので、

$$|E(A_\infty N_\infty)| \leq \|N_\infty\|_{L^\infty}。$$

これと、命題１０をあわせて、証明が終る。

§１０． H^1 −ＢＭＯ　双対性

前節で導入したＢＭＯがH^1 の双対であることは、ａｔｏｍ分解から容易に示される。その証明は１径数の場合（例えば、［５］参照）と全く同じであるが、以下に記しておく。

【定理４】

H^1 の双対空間はＢＭＯである。詳しくは、

（１） ある定数Ｃ＞０により、H^2（H^1 の部分空間で　ｄｅｎｓｅ）とＢＭＯの間に不等式

$$|E(M_\infty N_\infty)| \leq C\,\|M\|_{H^1}\,\|N\|_{BMO}$$

が成り立つ。

（２） H^1 の任意の連続線型写像ｆに対し、唯一つ$N \in$ ＢＭＯがあって、H^2 上で $f(M) = E(M_\infty N_\infty)$　となる。

（証明）

（１） Ｍ　を定理３によりａｔｏｍ分解して

$$M = \sum_n \lambda_n A^n$$

とすると、収束がL^2収束であることと、$N \in BMO \subset L^2$ であることから、

$$E(M_\infty N_\infty) = \sum_n \lambda_n E(A^n_\infty N_\infty)$$

となる。両辺の絶対値をとって、命題１０を使えば

$$|E(M_\infty N_\infty)| \leq \sum_n |\lambda_n| \, \|N\|_{BMO}$$

が得られ、定理３の（１）によって証明が終る。

（２）　命題２によれば、H^2 はH^1 の部分空間で、入射は連続であるから、ｆはH^2 の上の連続線型写像である。したがって、よく知られたL^2の性質より、ある$N \in H^2$ により、

$$f(M) = E(M_\infty N_\infty) \qquad {}^\forall M \in H^2$$

となる。そこで、命題９と命題１０を使うと、$N \in BMO$ がわかる。Ｎの唯一性は、H^2 のH^1 でのｄｅｎｓｉｔｙより自明である。

仮定 $M \in H^2$ は、ｃｏｕｐｌｉｎｇ $E(M_\infty N_\infty)$ の可積分性を保障するためで、一般の $M \in H^1$ では、積分 $E(M_\infty N_\infty)$ でｃｏｕｐｌｉｎｇを作れないことがある。

しかし、もとにもどって $M \in H^2$ とすると、

$$E(M_\infty N_\infty) = E(\langle M, N \rangle)$$

であり、しかも、次に見るとおり、後者は $M \in H^1$ であっても可積分なのである。

【命題１２】

ある定数$C>0$により、任意の $M \in H^1$ 、$N \in BMO$ につき

$$E\left(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} |d\langle M, N \rangle|\right) \leq C \|M\|_{H^1} \|N\|_{BMO}$$

が成り立つ。

したがって、H^1 と BMO のｃｏｕｐｌｉｎｇは常に $E(\langle M, N \rangle)$ で作られ、定理４の（１）の不等式は、

$$|E(\langle M, N \rangle)| \leq C \|M\|_{H^1} \|N\|_{BMO}$$

となる。

（証明）　問題の不等式の左辺は、

$$E\left(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} |d\langle M, N \rangle|\right) \equiv E\left(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} |\nabla M_t \cdot \nabla N_t| \, dt\right)$$

である。そこで、定理３のａｔｏｍ分解をＭに適用すると、

$$M = \sum_n \lambda_n A^n$$

で、$H^1 \sim \Lambda^1$ により、

$$\nabla M_t = \sum_n \lambda_n \nabla A_t^n$$

となる。したがって、

$$\nabla M_t \cdot \nabla N_t = \sum_n \lambda_n (\nabla A_t^n \cdot \nabla N_t)$$

$$\therefore |\nabla M_t \cdot \nabla N_t| \leq \sum_n |\lambda_n| |\nabla A_t^n \cdot \nabla N_t|$$

が得られる。両辺のＬｅｂｅｓｇｕｅ積分と平均をとって、Ｆｕｂｉｎｉの定理を使うと、

$$E\left(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} |\nabla M_t \cdot \nabla N_t| \, dt\right) \leq \sum_n |\lambda_n| E\left(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} |\nabla A_t^n \cdot \nabla N_t| \, dt\right)$$

しかも、シュヴァルツの不等式より、

$$\begin{aligned} E\left(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} |\nabla A_t^n \cdot \nabla N_t| \, dt\right) &\leq \| A_\infty^n \|_{L^2} \| N_\infty \|_{L^2} \\ &\leq \| N_\infty \|_{L^2} / P(T_n \neq \phi)^{1/2} \\ &\leq \| N \|_{BMO} \end{aligned}$$

（Ｔ　は、ａｔｏｍ　Ａ　に付随するｒ．ｒ．）

となるから、定理３の（１）と合わせて目的の不等式を得る。命題の後半は明らかである。

この不等式は、１径数では　Ｆｅｆｆｅｒｍａｎ　の不等式と呼ばれているものに他ならない。

§１１．ｍａｒｔｉｎｇａｌｅ変換

解析におけるＨｉｌｂｅｒｔ変換あるいはＲｉｅｓｚ変換に相当するものとして、ある種のマルチンゲール変換を考えることができる。離散１径数の場合、Ｓ．Ｊａｎｓｏｎ（［８］）は、解析のH^1－BMO理論でＲｉｅｓｚ変換のしめる役割を確率論に移しかえることに見事に成功した。その連続径数版は、［５］に見ることができる。この節では、２径数で同じことが可能であることを示す。

まず、$d_1 \times d_1$ 行列 G と、$d_2 \times d_2$ 行列 H をとって、この2つをマルチンゲール $M \in H^p$ のbi-gradient ∇M に作用させる。

$$\nabla M \rightarrow (G \otimes H)\nabla M \equiv G \cdot \nabla M \cdot {}^t H$$
$$= \left(\sum_k \sum_\ell G_{ik} \frac{\partial^2 M}{\partial B^{1k} \partial B^{2\ell}} H_{j\ell}\right)$$

その上で、確率積分によって、新しい（局所）マルチンゲールを作るのである。

$$T_{G\otimes H} M_t \equiv \int_{]0,t]} (G \otimes H)\nabla M_s \cdot dB_s$$

この線型変換 $T_{G\otimes H}$ を、Mの、$G\otimes H$によるマルチンゲール変換と呼ぼう。定義より、

$$|(G\otimes H)\nabla M_t|^2 \leq \|G\otimes H\|^2 |\nabla M_t|^2$$

となるから、

$$\langle T_{G\otimes H} M\rangle \leq \|G \times H\|^2 \langle M\rangle$$

が成り立っていることがただちに分る。これから、次の命題がしたがう。

【命題13】

（1） $M \in H$ $(0<p<\infty)$ ならば、

$$\|T_{G\otimes H} M\|_{H^p} \leq \|G\otimes H\| \, \|M\|_{H^p} 。$$

（2） $N \in BMO$ ならば、

$$\|T_{G\otimes H} N\|_{BMO} \leq \|G\otimes H\| \, \|N\|_{BMO} 。$$

Janson（[8]）と Durrett（[5]）によれば、1径数のH^1 は次の様に特徴付けられる。

【命題14】

$G_1, \cdots, G_m$ を $d\times d$ 行列で、共通（実）固有ベクトルがないとする。このとき、

$$\|M_\infty\|_{L^1} + \sum_{\ell=1}^{m} \|T_{G_\ell} M_\infty\|_{L^1} \sim \|M\|_{H^1}$$

となる。

$T_{G_\ell} M$ の定義は、M の gradient ∇M にG_ℓ を左からかけて、確率積分し

たもの、$\|M\|_{H^1}$ は、$S(M) \equiv (\int_0^\infty |\nabla M_t|^2 dt)^{1/2}$ の平均である。この命題の証明は、［５］を見ていただきたい。

２径数の命題は次の通りである。

【命題１５】

$G_1, \cdots, G_{m_1}$ を $d_1 \times d_1$ 行列で、共通（実）固有ベクトルが無いとする。また、$H_1, \cdots, H_{m_2}$ を $d_2 \times d_2$ 行列で、共通（実）固有ベクトルが無いと仮定する。G_0 を $d_1 \times d_1$ の単位行列、H_0 を $d_2 \times d_2$ の単位行列として、H^1 上で次が成り立つ。

$$\|M\|_{H^1} \sim \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \|T_{G_i \otimes H_j} M_\infty\|_{L^1}$$

（証明）　命題１４を、命題７と同様のアイデアで２径数化すればよい。

まず第一に、命題１４は、実数値に限らず、一般に可分実ヒルベルト空間値で成立することに注意する。その上で、∇M を命題２の（１）の様な単純なものと仮定しておいて上の同値性を示せばよい。

$\omega_2 \in \Omega^2$ を固定して、確率過程

$$(\omega_1, t_1) \rightarrow (t_2 \rightarrow \nabla M_{t_1 t_2}(\omega_1, \omega_2))$$

を考えて、これを１径数で $L^2(\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R}^{d_2})^{d_1}$ 値の ｐｒｅｄｉｃｔａｂｌｅな過程とみなす。すると、$\nabla M_{t_1 t_2} \cdot dB_{t_1}^1$ を t_1 について積分して得られる確率過程は、$L^2(\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R}^{d_2})$ 値のマルチンゲールである。１径数での命題１４を可分実ヒルベルト空間値のこの場合に使って、ｐにのみ依存する定数によって、

$$E_1[(\int_0^\infty (\int_0^\infty |\nabla M_{t_1 t_2}(\omega_1, \omega_2)|^2 dt_2) dt)^{1/2}]$$

と

$$\sum_{i=0}^{m_1} E_1[(\int_0^\infty | \int_0^\infty [G_i \cdot \nabla M_{t_1 t_2}(\omega_1, \omega_2)] \cdot dB_{t_1}^1(\omega_1)|^2 dt_2)^{1/2}]$$

とは同値である。双方のE_2 をとれば、前者は $\|M\|_{H^1}$ である。後者で E_1 と E_2 とを交換してみると、E_1 の被積分関数は、

$$E_2[(\int_0^\infty | \int_0^\infty [G_i \cdot \nabla M_{t_1 t_2}(\omega_1, \omega_2)] \cdot dB_{t_1}^1(\omega_1)|^2 dt_2)^{1/2}]$$

となる。今度は、$\omega_1 \in \Omega^1$ を固定して、

$$t_2 \rightarrow \int_0^\infty [G_i \cdot \nabla M_{t_1 t_2}(\omega_1, \omega_2)] \cdot dB_{t_1}^1(\omega_1)$$

を、$\mathbb{R}^{d_2}$値の　ｐｒｅｄｉｃｔａｂｌｅな１径数の過程として、B^2 で確率積分すれば、１径数マルチンゲールとなる。そこで命題１４により、ｐにのみ依存する定数によって、

$$E_2\left[\left(\int_0^\infty \left|\int_0^\infty [G_i \cdot \nabla M_{t_1 t_2}(\omega_1, \omega_2)] \cdot dB^1_{t_1}(\omega_1)\right|^2 dt_2\right)^{1/2}\right]$$

と

$$\sum_{j=0}^{m_2} E_2\left[\left|\int_0^\infty \left(\int_0^\infty [G_i \cdot \nabla M_{t_1 t_2}(\omega_1, \omega_2) \cdot H_j] \cdot dB^1_{t_1}(\omega_1)\right) \cdot dB^2_{t_2}(\omega_2)\right|\right]$$

とが同値になる。双方の　E_1 をとり、後者の内部の

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty [G_i \cdot \nabla M_{t_1 t_2} \cdot H_j] \cdot dB^1_{t_1}\right) \cdot dB^2_{t_2}$$

が

$$\int_{(\mathbb{R}_+)^2} [G_i \cdot \nabla M_t \cdot H_j] \cdot dB_t$$

に等しい（Ｆｕｂｉｎｉ型定理…∇Mが単純な場合だから自明）ことに注意すれば、後者は

$$\sum_{j=0}^{m_2} \| T_{G_i \otimes H_j} M_\infty \|_{L^1}$$

に等しいことが分る。これと前半を合せれば、ノルムの同値性が少なくともH^1 のｄｅｎｓｅな部分空間で成立する。あとは、極限をとってH^1 全体に同値性をひろげればよい。（付記３に別証明を記す。）

この命題の双対をとって容易に得られるのが、ＢＭＯのＦｅｆｆｅｒｍａｎ－Ｓｔｅｉｎ分解である。

【系】

命題１５の仮定の下で、任意の$N \in BMO$　に対して、$(m_1+1) \times (m_2+1)$ 個の

$$N^{ij} \in L^\infty(\Omega) \qquad (i=0, \cdots, m_1 \ ; \ j=0, \cdots, m_2)$$

（但し、いずれも両軸上０なるマルチンゲールを生成するものとする）があって

$$N = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} T_{{}^tG_i \otimes {}^tH_j} N^{ij}$$

と分解される。

§１２． 付記１

L^1閉であっても、連続な軌跡をもたないマルチンゲールの存在を示したい。正確には、「どのｖｅｒｓｉｏｎをとっても、ａ．ｓ．に軌跡が不連続」である様なマルチンゲールの存在を示すのである。そのためには、径数を有理点にかぎって、有界閉区間［０，ｔ］$\cap \mathbb{Q}^2$ で $|M_s|$ の上限をとって、ａ．ｓ．に＋∞に発散する様にすればよい。

Ｂｒｏｓｓａｒｄ と Ｃｈｅｖａｌｉｅｒ はその実例を与えたのだが、［２］ではそれに言及するにとどめているので、以下に内容を紹介する。

１． 以下の議論では、１次元の B^{11} と B^{21} しか使わないので、$d_1=d_2=1$ と仮定しておく。有理数列 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<1$ を任意にとって固定する。すると、可算個の事象 $A^i_n=\{B^i_{t_n}-B^i_{t_{n-1}}\geq 0\}$ （$i=1,2;n=1,2,3,\cdots$） が定義され、互に独立であり、$P(A^i_n)=1/2$ である。

次に、ある整数 $N>0$ につき、上記有理数列をＮ個づつ仕切る。

$$
\begin{array}{lllll}
0: & 1, & 2, & \cdots\cdots, & N \\
1: & N+1, & N+2, & \cdots\cdots, & N+N \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\
n: & nN+1, & nN+2, & \cdots\cdots, & nN+N \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots & & &
\end{array}
$$

それから、各仕切に対して、次の事象を定義する。

$$C_n\equiv A^1_{nN+1}\cap\cdots\cdots\cap A^1_{nN+N}\cap A^2_{nN+1}\cap\cdots\cdots\cap A^2_{nN+N}$$

$$C^k_n\equiv A^1_{nN+1}\cap\cdots\cdots\cap A^1_{nN+k}\cap A^2_{nN+1}\cap\cdots\cdots\cap A^2_{nN+N-k}\ (k=0,\cdots,N)$$

【補題】

全ての $n=0,1,\cdots$ につき、 $P\left(\bigcup_{k=0}^{N} C^k_n\right)=(N+2)/2^{N+1}$ となる。

（証明） $n=0$ としてよい。簡単な考察により、

$$\bigcup_{k=0}^{N} C^k_0=C^0_0\cup(C^1_0\setminus C^0_0)\cup\cdots\cdots\cup(C^N_0\setminus C^{N-1}_0)\quad（排反和）$$

$$C_0^k \setminus C_0^{k-1} = A_1^1 \cap \cdots \cap A_k^1 \cap A_1^2 \cap \cdots \cap A_{N-k}^2 \cap (A_{N-k+1}^2)^c$$

$$\therefore\ P(\bigcup_{k=0}^{N} C_0^k) = \frac{1}{2^N} + \frac{N}{2^{N+1}} = (N+2)/2^{N+1}$$

２．　次に、C_0 によりマルチンゲール　$t \to E(\chi_{C_0} \mid \mathcal{F}_t)$　を作ってみる。

$t=(t_k, t_{N-k})$ のとき、C_0 のうち C_0^k 以外の因子は $\mathcal{F}_t$ に独立なので、

$$E(\chi_{C_0} \mid \mathcal{F}_t) = \frac{1}{2^N} \chi_{C_0^k}$$

となることが、容易にわかる。そこで、$M_\infty^0 \equiv 2^N \chi_{C_0}$　とおいて、マルチンゲールM_t^0 を作ると、非負で

$$\sup\{M_t^0 ; t \in [0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2\} \geq \chi_{\bigcup_{k=0}^{N} C_0^k}$$

$$\| M_\infty^0 \|_{L^1} = E(M_\infty^0) = 1/2^N$$

となる。これにもとづいて、ｓｕｐ　が１を越えるのに、ノルムの極めて小さいマルチンゲールの構成をもくろむのである。$\bigcup_{k=0}^{N} C_0^k$ 上では一応目的を達したので、$D_1 \equiv \Omega \setminus \bigcup_{k=0}^{N} C_0^k$ に移ることにする。

３．　$D_1 \in \mathcal{F}_{t_N t_N}$ はC_1 やC_1^k と独立であることに、まず注意する。補題により、

$$P(D_1) = 1 - \frac{N+2}{2^{N+1}}$$

となる。$D_1 \cap C_1$ によってマルチンゲールを作ってみると、$t=(t_{N+k}, t_{2N-k})$として

$$E(\chi_{D_1 \cap C_1} \mid \mathcal{F}_t) = \frac{1}{2^N} \chi_{D_1 \cap C_1^k}$$

を得るので、$M_\infty^1 \equiv 2^N \chi_{D_1 \cap C_1}$ が生成するマルチンゲールは、非負で

$$\sup\{M_t^1 ; t \in [0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2\} \geq \chi_{D_1 \cap \bigcup_{k=0}^{N} C_1^k}$$

$$\| M_\infty^1 \|_{L^1} = E(M_\infty^1) = 2^{-N} P(D_1) = 2^{-N}\left[1 - \frac{N+2}{2^{N+1}}\right]$$

となる。　$M_\infty^0 + M_\infty^1$ は、ノルムの小さい、$(\bigcup_k C_0^k) \cup (\bigcup_k C_1^k)$ 上で１を越える非負マルチンゲールを作る。次は、$D_2 \equiv D_1 \setminus \bigcup_k C_1^k$　上に移って、同じ操作を繰り返すと、非負のM_∞^2 が得られて、

$$\sup\{M_t^2 ; t \in [0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2\} \geq \chi_{D_2 \cap \bigcup_k C_2^k}$$

しかも、補題により　$P(D_2) = P(D_1) \cdot \left[1 - \frac{N+2}{2^{N+1}}\right] = \left[1 - \frac{N+2}{2^{N+1}}\right]^2$

となるため、$\| M_\infty^2 \|_{L^1} = 2^{-N} P(D_2) = 2^{-N}[1-\frac{N+2}{2^{N+1}}]^2$ が得られる。

4． 以後各仕切について、同じ操作を順次繰り返してゆけば、非負の M_∞^n （$n=0$，1，…）が得られて、

$$\sup\{M_t^n ; t \in [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2\} \geq \chi_{D_n \setminus D_{n+1}}$$

$$\| M_\infty^n \|_{L^1} = 2^{-N}[1-\frac{N+2}{2^{N+1}}]^n$$

$$P(D_n) = [1-\frac{N+2}{2^{N+1}}]^n$$

が成り立つ。そこで、$M_\infty \equiv \sum_n M_\infty^n$ と定義すれば、

$$\sup\{M_t ; t \in [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2\} \geq 1 \quad a.s. \quad (\because P(D_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0)$$

$$\| M_\infty \|_{L^1} \leq 2/(N+2)$$

が得られ、ノルムはNを大きくとれば、いくらでも小さく押さえられる。

5． 以上をふり返って見ると、軌跡のsupを $[0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ 上でとったが、これは全く便宜上そうしただけで、任意の小さな $[0,\varepsilon]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ で始めてもよいし、あるいは、始点をずらして、

$$(t+[0,\varepsilon]^2) \cap \mathbb{Q}^2 \qquad (t \in (\mathbb{R}_+)^2)$$

の上で同じ議論を行うこともできる。

以上の考察から、次の結論が得られる。

【命題16】

任意の $t \in (\mathbb{R}_+)^2$、任意の $\varepsilon > 0$ につき、ある非負な L^1 閉マルチンゲール M があって、

$$\sup\{M_s ; s \in (t+[0,\varepsilon]^2) \cap \mathbb{Q}^2\} \geq 1 \qquad a.s.$$

が成り立つ。しかも、$\| M_\infty \|$ は任意に小さくとれる。

これから、簡単な細工をほどこして、次が得られる。

【命題１７】

（１） 任意の　$t\in(\mathbb{R}_+)^2$、任意の$\varepsilon>0$に対し、ある非負L^1 閉マルチンゲールMがあって、

$$\sup\{M_s\ ;\ s\in(t+[0,\ \varepsilon]^2)\cap\mathbb{Q}^2\}=+\infty \quad a.s.$$

が成り立つ。しかも、$\|M_\infty\|_{L^1}$ は任意に小さくとれる。

したがって、M　の軌跡は、tにおいて、a．s．に不連続である。

（２） 非負でL^1 閉なマルチンゲール　M　で、どのｖｅｒｓｉｏｎをとっても、a．s．にその軌跡が　$(\mathbb{R}_+)^2$ 上いたる所不連続になる様なものが存在する。

§１３． 付記２

命題６と定理３（ａｔｏｍ分解）の証明を、ここで行うことにする。前者は［２］にあり、後者は［１］の証明のａｄａｐｔａｔｉｏｎで［４］，［１０］に記載されているが、両者共きわめて近いアイデアにもとづいているので、ここに併記するのである。

１． まず、〈M〉（定義は§４．）に関する、次の簡単な考察から始める。

【補題１】

任意の$E\in\mathfrak{F}$ につき、その生成するマルチンゲールを

$$V_t = P(E\mid\mathfrak{F}_t)$$

とすれば、任意の$M\in H^2$ につき、

$$E(\chi_E\langle M\rangle) = E\left(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2}V_t\,|\nabla M_t|^2\,dt\right)$$

が成り立つ。

（証明） 左辺にＦｕｂｉｎｉの定理を使って、

$$E\left(\chi_E\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2}|\nabla M_t|^2\,dt\right) = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2}E(\chi_E\,|\nabla M_t|^2)\,dt$$

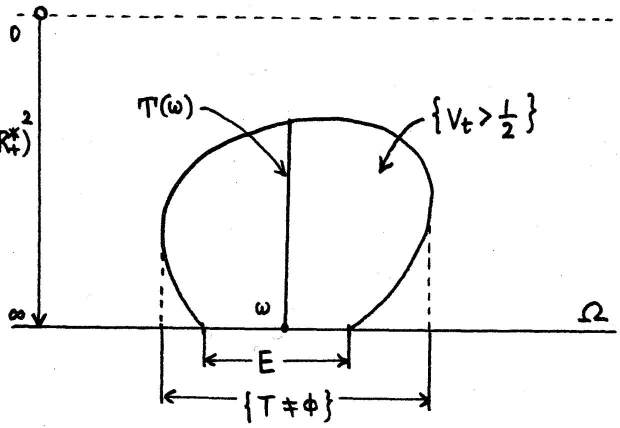
さらに、条件付平均をとって、

$$E(\chi_E\,|\nabla M_t|^2) = E(V_t\,|\nabla M_t|^2)\ 。$$

VはL^2 閉マルチンゲールだから、§２．の（６）により、軌跡は連続として良い。すると確率過程Vは（$\mathfrak{F}_t$ ）－ａｄａｐｔｅｄで軌跡が連続であることから、１径数のときと同様にｐｒｅｄｉｃｔａｂｌｅ（定義は§３．）であることが分る。そこで、

$$T(\omega) \equiv \{ t \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \ ; \ V_t(\omega) > 1/2 \}$$

とおけば、Ｔ は ｒ．ｒ． （定義は§７．）である。



【補題２】

上記のＶとＴにつき、次が成り立つ。

（１） $\frac{1}{2}\chi_{\{t\in T\}} + \frac{1}{2} \geqq V_t$

（２） $1 - V_t \geqq \frac{1}{2}\chi_{\{t \in T^c\}}$

証明はいずれもＴの定義から自明である。

$$V_t \to V_\infty = \chi_E \quad (t \to \infty) \quad \text{a.s.}$$

より、$E \subset \{T \neq \phi\}$ （ａ．ｓ．） となるが、実はこの２つの事象の確率は、次の様に同値になる。

【補題３】

ある定数$C>0$があって、任意の$E \in \mathfrak{F}$ と、それから上記の様に作られたｒ．ｒ．Ｔの間には、

$$P(E) \leqq P(T \neq \phi) \leqq CP(E)$$

が成り立つ。

（証明） 右側の不等式のみを示せばよい。Ｔの定義より、

$$\chi_{\{T\neq\phi\}} \leqq 2\sup V_t = 2V^*$$

となるので、命題１を$p=2$としてＶに適用すれば、

$$P(T \neq \phi) \leqq 4E(V^{*2}) \leqq CE(V_\infty^2) = CP(E) \quad 。$$

2． 命題6の結論は、§4．の記号で言いなおすと

$$E(\sigma(\nabla M)^p) \leq C_p E(S(M)^p)$$

である。これは、次の補題より直ちにしたがう。

【補題4】

ある定数 $C>0$ があって、任意の $M \in H^2$ と $\lambda>0$ につき、

$$P(\sigma(\nabla M)>\lambda) \leq C\{P(S(M)>\lambda)+\frac{1}{\lambda^2}E(S(M)^2 ; S(M)\leq\lambda)\}$$

が成り立つ。

この不等式の両辺に $p\lambda^{p-1}$ をかけ、$0<\lambda<+\infty$ 上でLebesgue積分をすれば、命題6は得られる。

この論法は、ほとんど $p=0$ と $p=2$ の weak-type 不等式から $0<p<2$ での評価を得る interpolation の論法そのものである。

3． 補題4の証明にとりかかる。$E=\{S(M)>\lambda\}$ とおいて、上記の様にVとTを定める。それから、$M = M_T + M_{T^c}$ （定義は§7．） と分解する。bi-gradient をとれば、

$$\nabla M_t = \chi_{\{t\in T\}}\nabla M_t + \chi_{\{t\in T^c\}}\nabla M_t$$

となっているわけである。そこで、命題6の仮定（i）により、

$$\sigma(\nabla M) \leq \sigma(\chi_{\{t\in T\}}\nabla M)+\sigma(\chi_{\{t\in T^c\}}\nabla M)$$

したがって、

$$P(\sigma(\nabla M)>\lambda) \leq P(\sigma(\chi_{\{t\in T\}}\nabla M)>0) + P(\sigma(\chi_{\{t\in T^c\}}\nabla M)>\lambda)$$

右辺第1項については、$\{T=\phi\}$ 上では $\chi_{\{t\in T\}}\nabla M_t \equiv 0$ であるから、命題6の仮定（ii）により、$\sigma(\chi_{\{t\in T\}}\nabla M)=0$ となるはずであるから、

$$P(\sigma(\chi_{\{t\in T\}}\nabla M)>0) \leq P(T\neq\phi) \leq CP(S(M)>\lambda) \quad (\because 補題3)$$

右辺第２項の評価は、

$$\lambda^2 \ P(\sigma(\chi_{\{t\in T^c\}}\nabla M)>\lambda)$$
$$\leqq E(\sigma(\chi_{\{t\in T^c\}}\nabla M)^2)$$
$$\leqq CE(S(M_{T^c})^2) \qquad (\because \text{命題６仮定}(iii))$$

が、まず得られる。ついで、補題２より

$$E(S(M_{T^c})^2)=E(\int \chi_{\{t\in T^c\}}|\nabla M_t|^2\,dt)$$
$$\leqq 2E(\int_{(\mathbb{R}^*_+)^2}(1-V_t)|\nabla M_t|^2\,dt)$$
$$=2E((1-\chi_E)\langle M\rangle) \qquad (\because \text{補題}1)$$
$$=2E(S(M)^2\ ;S(M)\leqq\lambda)$$

合わせて補題４が示され、命題６の証明は完了する。

4． 続いて、ａｔｏｍ分解の証明を行なう。ＭをH^1クラスの任意のマルチンゲールとして任意整数$n\in\mathbb{Z}$に対して、

$$E_n \equiv \{S(M)>2^n\}$$

とおいて、１．でＥ対してＶとＴを作った様に、マルチンゲールV^nとｒ．ｒ．T_nを作る。E_nもV^nもT_nもｎに関して単調減少する。すると、排反なｒ．ｒ．の列

$$T_n \cap T^c_{n+1} \qquad (n\in\mathbb{Z})$$

ができる。そこで、

$$A^n_\infty \equiv M_{T_n\cap T^c_{n+1}}/\lambda_n$$
$$\lambda_n \equiv 2^{n+2}\ P(T_n\neq\phi)$$

とおいて、定理３の成立を確かめて行くことにする。

5． まず、A^n_∞が生成するマルチンゲールA^nがａｔｏｍであることを確かめよう。

$$T_n \cap T^c_{n+1} \subset T_n$$

から、$A^n_\infty = A^n_{T_n}$ は自明（∵§７．の性質（５））である。L^2ノルムについては、

$$\|A^n_{T_n}\|^2_{L^2} = \lambda_n^{-2}\ E(\int \chi_{\{t\in T_n\cap T^c_{n+1}\}}|\nabla M_t|^2\,dt)$$

に補題２を使うと、

$$\chi_{\{t\in T_n\cap T_{n+1}^c\}} \leqq \chi_{\{t\in T_{n+1}^c\}} \leqq 2(1-V_t^{n+1})$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \|A_{T_n}^n\|_{L^2}^2 &\leqq 2\lambda_n^{-2}E(\int \chi_{\{t\in T_n\}}(1-V_t^{n+1})|\nabla M_t|^2 dt) \\
&\leqq 2\lambda_n^{-2}E(\chi_{E_{n+1}^c}\langle M_{T_n}\rangle) \qquad (\because 補題1) \\
&\leqq 2\lambda_n^{-2}E(\chi_{E_{n+1}^c}S(M)^2\chi_{\{T_n\neq\phi\}})
\end{aligned}$$

E_{n+1}の定義により、$\chi_{E_{n+1}^c}S(M)\leqq 2^{n+1}$　であるから、結局

$$\begin{aligned}
\|A_{T_n}^n\|_{L^2}^2 &\leqq 2^{2n+3}\lambda_n^{-2}P(T_n\neq\phi) \\
&\leqq 1/P(T_n\neq\phi)
\end{aligned}$$

となり、A^n は確かに T_n をr．r．とするａｔｏｍである。

６．　補題３により、$P(T_n\neq\phi)\leqq CP(E_n)$ であるから、

$$\begin{aligned}
\sum_n \lambda_n &\leqq C\sum_n 2^{n+2}P(S(M)>2^n) \\
&\leqq 8C\|M\|_{H^1}
\end{aligned}$$

となって、定理３の（１）が示された。

７．　定理３の残りは、次の２事項に帰着する。

(a)　$\|M-M_{T_n}\|_{H^2}\to 0 \quad (n\to-\infty)$

(b)　$S(M)\geqq S(M_{T_n})\to 0 \quad$ a．s．$\quad (n\to+\infty)$

何故ならば、λ_n や A^n の定義より、

$$\sum_{n=k}^{\ell}\lambda_n A^n = M_{T_k}-M_{T_{\ell+1}}$$

であるから。

（ａ）を示すには、$M-M_{T_n}=M_{T_n^c}$ に注意して、上記５．と同様にして

$$\|M_{T_n^c}\|_{H^2}^2 \leqq 2E(\chi_{E_n^c}S(M)^2) \leqq 2\times 2^{2n}$$

となることから知れる。

（ｂ）は、

$$P(E_n)=P(S(M)>2^n)\leqq 2^{-n}\|M\|_{H^1}\to 0 \quad (n\to+\infty)$$

と、補題３より、$P(T_n\neq\phi)\to 0$ となり、単調減少列 $T_n(\omega)$は a．s．にある有限なｎで空になることから示される。

§14. 付記3

命題15の証明中に1径数の命題14が可分実ヒルベルト空間値でも成り立つことを注意したが、その確認のために1径数の証明を初めからやりなおすのは面倒なので、以下にもう少し簡単な別証明を記する。

§16の系によると、$\|M\|_{H^1} \sim \|M^*\|_{L^1}$ であるから、ある定数C＞0とc＞0により、

$$c\|M^*\|_{L^1} \leqq \sum_{i=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{m_2}\|T_{G_i\otimes H_j}M_\infty\|_{L^1} \leqq C\|M\|_{H^1}$$

が成り立つことを示せばよい。右半分は $\|M\|_{H^1} \sim \|M^*\|_{L^1} \geqq \|M_\infty\|_{L^1}$ と命題13より明らかであるから、問題は左半分である。

1. $j=0, \cdots, m_2$ を固定して、m_1+1 個の1径数マルチンゲール

$$t_1 \to (T_{G_0\otimes H_j}M_{t_1t_2}, \cdots, T_{G_{m_1}\otimes H_j}M_{t_1t_2})$$

を考えると、$G_1, \cdots, G_{m_1}$ に共通実固有ベクトルが無いことから、

$$t_1 \to \left(\sum_{i=0}^{m_1}|T_{G_i\otimes H_j}M_{t_1t_2}|^2\right)^{1/2}$$

が劣マルチンゲールであるのみならず、そのあるq（＜1）乗も劣マルチンゲールである。（これが実は命題14の本質。） ここで、さらに t_2 についても sup をとっても、

$$t_1 \to \sup_{t_2}\left(\sum_{i=0}^{m_1}|T_{G_i\otimes H_j}M_{t_1t_2}|^2\right)^{1/2}$$

は劣マルチンゲールである。これに $p\equiv 1/q\ (>1)$ として、Doobの不等式にもとづく1径数の標準的な議論（命題1に相当）により、

$$E_1\left(\sup_{t_1}\sup_{t_2}\left(\sum_{i=0}^{m_1}|T_{G_i\otimes H_j}M_{t_1t_2}|^2\right)^{1/2}\right)$$
$$\leqq CE_1\left(\sup_{t_2}\left(\sum_{i=0}^{m_1}|T_{G_i\otimes H_j}M_{\infty t_2}|^2\right)^{1/2}\right)$$

が得られる。簡単な変形をして、

$$\sum_{i=0}^{m_1}E_1\left(\sup_t|T_{G_i\otimes H_j}M_t|\right) \leqq C\sum_{i=0}^{m_1}E_1\left(\sup_{t_2}|T_{G_i\otimes H_j}M_{\infty t_2}|\right)$$

としてから、$\sum_{j=0}^{m_2}$ と E_2 をとると、

$$\sum_{i=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{m_1}\|(T_{G_i\otimes H_j}M)^*\|_{L^1} \leqq C\sum_{i=0}^{m_1}E_1\left(\sum_{j=0}^{m_2}E_2\left(\sup_{t_2}|T_{G_i\otimes H_j}M_{\infty t_2}|\right)\right)$$

となる。

2. 次に、1. の最後の不等式の右辺の内部

$$\sum_{j=0}^{m_2} E_2 \left(\sup_{t_2} | T_{G_i \otimes H_j} M_{\infty t_2} | \right)$$

を評価する。それには、m_2 +1個の1径数マルチンゲール

$$t_2 \quad \rightarrow \quad (T_{G_i \otimes H_0} M_{\infty t_2} , \ \cdots, \ T_{G_i \otimes H_{m_2}} M_{\infty t_2})$$

に対して、1. と同様の操作をほどこして、

$$E_2 \left(\sup_{t_2} \left(\sum_{j=0}^{m_2} | T_{G_i \otimes H_j} M_{\infty t_2} |^2 \right)^{1/2} \right) \leq C \ E_2 \left(\left(\sum_{j=0}^{m_2} | T_{G_i \otimes H_j} M_{\infty t_2} |^2 \right)^{1/2} \right)$$

を得ればよい。あとは、簡単な変形で

$$\sum_{j=0}^{m_2} E_2 \left(\sup_{t_2} | T_{G_i \otimes H_j} M_{\infty t_2} | \right) \leq C \sum_{j=0}^{m_2} E_2 \left(| T_{G_i \otimes H_j} M_{\infty} | \right)$$

を得るから、これを1. の最後に代入して証明が終る。

REFERENCES

[1] A.BERNARD, Espaces H^1 de martingales à deux indices. Dualité avec les martingales de type "B.M.O." Bull. Sc. math.,2e série,103(1979),297-303.

[2] J.BROSSARD & L.CHEVALIER, Calcul stochastique et inégalités de norme pour les martingales bi-browniennes. Ann. Inst. Fourier, Grenoble,30,4(1980), 97-120.

[3] S.Y.CHANG & R.FEFFERMAN, A continuous version of duality of H^1 and BMO on the bi-disc, Ann, of Math., 112(1980),179-201.

[4] E.DECAMP, Caractérisations des espaces BMO de martingales dyadiques à deux indices, et de fonctions biharmoniques sur $R_+^2 \times R_+^2$. Thèse de 3e cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1979.

[5] R.DURRETT, Brownian motion and martingales in analysis, The Wadsworth Mathematics Series,1984.

[6] R.F.GUNDY,Inégalités pour martingales à un et deux indices: l'espace H^p , Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour VIII 1978, Lecture Notes in Math. 774(1980)

[7] R.F.GUNDY & E.M.STEIN, H^p theory for the poly-disc, Proc.Natl.Acad. Sci.U.S.A., vol.76,N° 3(1979), 1026-1029.

[8] S.JANSON, Characterizations of H^1 by singular integral transforms on martingales and R^n, Math. Scand. 41(1977),140-152.

[9] P.A.MEYER, Théorie élémentaire des processus à deux indices, Lecture Notes in Math.,863(1981),1-39.

[10] H.SATO, Caractérisation par les transformations de Riesz de la classe de Hardy H^1 de fonctions biharmoniques sur $R_+^{m+1} \times R_+^{n+1}$. Thèse de 3e cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1979.

[11] H.SATO, La classe de Hardy H^1 de fonctions biharmoniques sur $R_+^{m+1} \times R_+^{n+1}$; sa caractérisation par les transformations de Riesz. C.R.Acad.Sc. Paris,t.291(15 septembre 1980)