

Fredholm 型 確率積分方程式の解の存在と  
一意性について.

京都工繊大 小川 重義 (OGAWA Shigeyoshi)

§ 1.  $Z(t, \omega)$  ( $0 \leq t \leq 1, \omega \in \Omega$ ) と確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上の実数値乱関数で連続な見本関数をもつものとし,  $f(t, \omega), L(t, s, \omega), K(t, s, \omega)$  ( $0 \leq t, s \leq 1$ ) とそれらに  
適当な乱関数及び random kernels とする. さて, ヒルベルト  
空間  $L^2(0, 1)$  における正規直交基底  $\{e_n\}$  が与えられたと  
して, 次のようなフレドホルム型確率積分方程式を考  
えてみる.

$$(1): \quad x(t) = f(t, \omega) + \alpha \int_0^1 L(t, s, \omega) x(s) ds + \beta \int_0^1 K(t, s, \omega) x(s) d_p Z \\ (0 \leq t \leq 1),$$

ここに  $\alpha, \beta$  は定数であり, 項  $\int d_p Z$  は与えられた  
組  $(Z, \mathcal{F})$  に関する非因果的確率積分 (後述, § 2) を  
表わすものとする.

このような非因果的確率積分方程式は, 項  $\frac{d}{dt} Z(t, \omega)$

を係数とする線形微分方程式の境界値問題に対する一つの自然な解釈を与えるものと期待される(乱関数はブラウン運動のように、連続ではあるが滑らかではない)見本関数を持つ場合を想定している)。本稿では方程式(1)の或る種の解(S-解)の存在と一意性に関する二・三の結果を示し、次いで、この型の確率積分方程式と上に述べた確率微分方程式の境界値問題との関係についても言及する。尚、以下においては、乱関数は全て条件  $P[\int_0^1 |b(t, \omega)|^2 dt < +\infty] = 1$  を満たす可測関数と意味するものとし、その表記においては、可能である場合にはパラメータ  $\omega$  を省くことがある。また、基本的な組  $(Z, \{Y_n\})$  については、名は " $Z(0) = 0$ " なる条件をみたすものとし、c.o.n.s.  $\{Y_n\}$  は各  $n$  毎に積分  $Z(Y_n) = \int_0^{Y_n} \bar{Y}_n(s) dZ(s)$  が  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上の r.v. として意味をそのように与えられているものとする。(本稿に記す内容の詳細については [1] を参照されたい)。

§ 2. 準備.  $\{Z_n^Y\} (n \in \mathbb{N})$  を次で与えられる乱関数の列とする。

$$(2) ; Z_n^\varphi(t) = \sum_{k=1}^n Z(\varphi_k) \int_0^t \varphi_k(s) dS \quad (0 \leq t \leq 1)$$

(各  $Z_n^\varphi$  は微分可能な見本関数を持つことと注意しておく。非因果的積分  $\int d_p Z$  の定義を与える。

定義, (i) 極限,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t, \omega) dZ_n^\varphi(t)$  ( $(a, b) \subset [0, 1]$ )

が確率収束の意味で存在するとき, 乱関数  $f$  は  $(a, b)$  上で  $(Z, \varphi)$  に関して可積分であるといひ, 極限を  $\int_a^b f d_p Z$  と記す。

(ii) 乱関数  $f$  は, (1) 各  $t$  毎に  $(0, t)$  上で  $(Z, \varphi)$ -可積分で  
 (2) 乱関数列  $\tilde{f}_n(t) = \int_0^t f(s, \omega) dZ_n^\varphi(s)$  が  $L^2(0, 1)$  内の列として  $\tilde{f}(t) = \int_0^t f(s, \omega) d_p Z(s)$  に確率収束するとき  
 強い意味で可積分であるといひ, このような  $f$  の全体を  $S$  で表す。

次の方程式の  $S$ -解の存在状況を調べることから始める。

$$(3) : x(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s, \omega) x(s) d_p Z(s)$$

この為, 以下の仮定をおく。まず, 基本的組  $(Z, \mathcal{F})$  について,

$$(H.1): \quad s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n^p(\cdot) = Z(\cdot) \quad (in P).$$

(例1)  $Z$ : Brown 運動.  $\{\varphi_n\}$ : 関数系  $e^{2\pi i n t}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ )

$$\text{但し, } Z_n^p(t) = \sum_{|k| \leq n} Z_k(e^{2\pi i k t}) \int_0^t e^{2\pi i k s} ds$$

乱関数  $f$ ,  $L, K$  については次の仮定,

$$(H.2): \quad (1) \quad f \in S.$$

$$(2) \quad P \left[ \int_0^1 \int_0^1 \{ |L|^2 + |L_t|^2 + |K|^2 + |K_{st}|^2 \} ds dt < +\infty \right] = 1,$$

$$\left( \text{ここに, } L_t = \frac{\partial}{\partial t} L, \quad K_{st} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} K \right).$$

(注) 以下のような記号を扱う.

$$\textcircled{1} \quad f(t), H(t, s) \text{ に対して, } \tilde{f}(t) = \int_0^t f(s) d_p Z(s),$$

$$\tilde{H}(t, s) = \int_0^t H(u, s) d_p Z(u).$$

\textcircled{2} 核  $H(t, s)$ , 乱関数  $x(s)$  に対して, 二様の一変像:

$$(Hx)(t) = \int_0^t H(t, s) x(s) ds$$

$$(Hx)(t) = \int_0^1 H(t,s)x(s) d_p z(s), \quad \delta \text{ あり}$$

③ 任意の乱関数  $x(\cdot)$  に対して,  $(Hx)(t) \in S'$  であるとき, 核 (或いは作用素)  $H$  は  $S$ -級であるといひ

あるとき, 核 (或いは作用素)  $H$  は  $S$ -級であるといひ

$H \in L(S)$  と記す.

補題 核  $H(t,s)$  が条件  $P[\int_0^1 \int_0^1 \{|H|^2 + |H_t|^2\} ds dt$

$<+\infty] = 1$  をみたすとき,  $H \in L(S)$ .

この補題を用いて, 次の結果

命題 1 (H.1), (H.2) の外に,  $P[\tilde{R}(1,1) \neq 1] = 1$  を

仮定する. このとき, 方程式 (3) の  $S$ -解  $x$  と次の通常の

積分方程式 (4) の乱関数解  $y$  とは一対一に対応する.

$$(4) : y(t) = (Af)(t) + (Gy)(t),$$

こゝに,

$$(5) \quad (i) \quad (Af)(t) = \int_0^t (af)(u) d_p z(u)$$

$$(ii) \quad (af)(t) = f(t) - \frac{\tilde{f}(1)k(t,1)}{\tilde{R}(1,1) - 1}$$

$$(5) - (iii) \quad (Gy)(t) = \int_0^1 \tilde{g}(t, s, \omega) y(s) ds$$

$$(iv) \quad g(t, s, \omega) = \frac{k(t, 1) \tilde{K}_s(t, s)}{K(1, 1) - 1} - K_s(t, s)$$

(ii)  $x$  と (3) の  $S$ -解とすれば, 命題の仮定より, 次の等式が得られる.

$$(6) \quad x(t) = (Af)(t) + (g\tilde{x})(t)$$

作用素  $A, g$  は共に  $S$ -級であるから, 両辺を確率

積分すれば,  $\tilde{x}(t)$  が方程式 (4) の解であることが

わかる. このとき, 対応  $x \rightarrow y(t) = \tilde{x}(t)$  が  $\mathcal{B}$ -線形

写像であることは (6) より従う. 逆に, (4) の任意の

解  $y(\cdot)$  が与えられたとき,

$$(7) \quad x(t) = (Af)(t) + (gy)(t) \quad \text{とすれば,}$$

$x(\cdot)$  が  $S$ -級であること, 及び (6) のもとで  $x$  と  $y$  とは

(4) の  $S$ -解であることがわかる. 以上 このときの対応

$$y(\cdot) \rightarrow x(\cdot) = (Af)(\cdot) + (gy)(\cdot) \quad \text{が } \mathcal{B}\text{-線形}$$

ことも明らか。

核  $G(t, s, \omega) = \int_0^t g(u, s, \omega) d_p z(u)$  は  $(t, s)$  に関して連続

であるから、殆んど全ての  $\omega$  に対して  $G(t, s, \omega)$  が  $L^2(\Omega)$

上の作用素  $G$  はコンパクトである。方程式 (4) に古典的交換定理を適用し、命題 1 と組みあわせれば次の定理が得られる。

定理 : (命題 1 と同じ仮定の下で), 方程式 (3) が一意的な  $S$ -解 を持つための必要十分条件は, 方程式

$$(8) \quad x(t) = \int_0^t k(t, s, \omega) x(s) d_p z(s)$$

が自明でない  $S$ -解を持つることである。

### § 3. 一般の場合.

コンパクトな作用素  $G(\omega)$  のスペクトルの集合を  $S_p(\omega)$  で表わす。(8) が nontrivial  $S$ -解 を持つこと

のための必要十分条件は, 方程式  $y(t) = (Gg)(t)$  が

nontrivial solution を持つ事) ことと同値である。

ここで,  $\Sigma(G) \equiv \{a \in \mathbb{C} : P[a \in Sp(\omega)] > 0\}$  とおき,

新しく  $k$  次の仮定をおく。

(H.3): (K)  $1 \notin \Sigma(G)$ , (Q)  $P\{\tilde{K}(1,1) \neq 1\} = 1$

先の定理と方程式

$$(1') \quad x(t) = f(t) + \alpha(Lx)(t) + (Kx)(t)$$

に適用して次の結果を得る。

命題 2 ((H.1)~(H.3)の下で) (1) で  $\beta = 1$  とした方程式 (1') は  
殆んど全ての  $\alpha, k$  に対して一意的な S-解を持つ。

(ii) 実際, (1') の S-解  $x$  が"ある"時, 仮定 (H.3) より,  $x(t)$  は次の方程式を満たすことがわかる。

$$(9) \quad x(t) = (Cf)(t) + \alpha(CBx)(t)$$

ここに,

$$(10) \text{-(i)} \quad (Cf)(t) = f(t) + \{(I-G)^{-1}(af)\tilde{y}\}_{(1)} \cdot k(t,1) \\ - K_3((I-G)^{-1}(af)\tilde{y})(t)$$

$$(10) \text{-(ii)} \quad (CBx)(t) = \int_0^1 B(t,s,\omega) x(s) ds$$



$$(10)-(iii), \quad B(t, s, \omega) = L(t, s, \omega) + \int_0^t \{ \Gamma(t, u, \omega) K(t, s, \omega) \\ - \int_0^u k_s(t, v, \omega) \Gamma(v, u, \omega) dv \} (OL) \tilde{Z}_n^p(u, s, \omega) du$$

但し,  $\Gamma$  は  $(I - G)_\omega^{-1}$  の積分核である。

ところで, 殆んど全ての  $\omega$  に対して, 作用素  $B_\omega$  はコンパクトであるから,  $\alpha$  を固有値の実現可能な値の集合  $\Sigma(B)$   $= \{ a \in \mathbb{C} : P\{ a \in \text{Sp}(B_\omega) \} > 0 \}$  (高々可算集合) の外に  $\alpha$  とし, (9) は  $\omega$  毎に一意的に解くことができて方程式 (1)' の  $S$ -解を与えらるゝことがわかる。

最後に, 積分方程式 (1)' の近似についておいておくことにする。 (1)' において, 乱変数  $\alpha$  と近似列  $Z_n^p$  でおきかえた方程式系を考へる。

$$(11): \quad x_n(t) = f(t) + \alpha(Lx_n)(t) + \int_0^t k(t, s, \omega) x_n(s) d\bar{Z}_n^p(s).$$

次の記号を導入する。

$$\bullet \quad H(t, s, \omega) \text{ に対して } \tilde{H}(t, s, \omega) \equiv \int_0^t H(u, s, \omega) d\bar{Z}_n^p(u).$$

$$\bullet \quad \text{核 } K(t, s) \text{ については, } \tilde{K}(t, s, \omega) = K(t, s) \bar{Z}_n^p(t) - \int_0^t k_t(u, s) \bar{Z}_n^p(u) du$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{K}(t, s, \omega) = \int_0^t k(u, s, \omega) dZ \quad (p-a.s.) \text{ である}$$

$P(\tilde{K}(1,1) \neq 1) = 1$  ならば,  $\omega$  毎  $K$ , 十分大きな  $n$  とし  $\omega$  毎  $K$   
 $\tilde{K}(1,1) \neq 1$  (P-a.s.) とし得る. 同様に  $(G_n f)(t) =$

$$\int_0^1 \tilde{g}(t, s, \omega) y(s) ds \quad \text{とあけは, } 1 \notin \Sigma(G) \quad (\text{CH.3})$$

ならば,  $P[1 \in Sp(G_n(\omega), n: \text{十分大})] = 0$  が成立する。

よって, 以上でと類似の議論に従えば, 各  $\omega$  毎  $K$   
 十分大きな  $n$  とすることにより (11) 式は次の形に  
 直すことができる。

$$(12) \quad x_n(t) = (G_n f)(t) + \alpha (B_n x_n)(t) \quad (\forall n \geq N(\omega))$$

ここに

$$(13) \text{-(i)} \quad (G_n f)(t) = f(t) + \{ (I - G_n)^{-1} (\alpha f)^{\sim}(1) \} K(t, 1) \\ - K_s \{ (I - G_n)^{-1} (\alpha f)^{\sim}(t) \}$$

$$(ii) \quad (B_n x)(t) = \int_0^1 B_n(t, s, \omega) x(s) ds$$

$$(iii) \quad B_n(t, s, \omega) = L(t, s, \omega) + \int_0^1 \{ \Gamma_n(t, u, \omega) K(t, 1, \omega) \\ - \int_0^1 K_s(t, v, \omega) \Gamma_n(v, u, \omega) dv \} (\alpha L)^{\sim}(u, s, \omega) du$$

但し  $\Gamma_n$  は  $(I - G_n)^{-1}$  ( $n \geq N(\omega)$ ) の積分核である。

以上のことと, 作用素  $G, B$  のコンパクト性に留意。

すなはち次の結果に到る.

命題 3. ((H.1)~(H.3)の下で) 方程式 (1) が或る

$\alpha$  に対して S-解  $x^0(\cdot)$  を持つとする。このとき、同じ

$\alpha$  に対応する方程式 (11) が十分大きな  $n$  ( $\geq N(\alpha)$ )

に対して、常に一意的な解  $x_n(\cdot)$  を与え、この解は

$n \rightarrow \infty$  に対して  $x^0(\cdot)$  に強収束する。

#### Reference.

- [1] OGAWA, S : "On a stochastic integral equation of Fredholm type (An application of the alternative theorem)" (1985) in preparation