

P_k -因子について

東理大・理 江川 嘉美 (Yoshimi Egawa)

ここでは、有限無向単純グラフのみを考える。

グラフ G の連結成分の個数を $c(G)$ で表す。位数 2 以上の連結グラフ G に対し、 G の極大 *nonseparable* 部分グラフを、 G のブロックと呼ぶ。ここで、位数 2 以上の連結グラフ B が *nonseparable* であるとは、すべての $x \in V(G)$ に対して $B-x$ が連結であることを言う。(ブロックに関する詳細は、たとえば、B. Bollobás [1. §I.1] などを参照されたい。) P_k は長さ $k-1$ の *path*、つまり k 点上の *path* を表す。

H を連結グラフとする時、グラフ G の部分グラフ F が G の H -因子であるとは、 $V(G) = V(F)$ で、 F のすべての連結成分が H に同型であることを言う。我々は [2] で次の定理を証明した。($H = P_2$ の場合は、それ以前に D. P. Sumner [3] により証明されている。)

定理 1. n, k, p を $n > p$ であるような 2 以上の整数とし、 H を位数 k の連結グラフとする。 G を位数 n の連結グラフとし、 $V(G)$ の大きさ p の任意の連結部分集合 X に対して $\langle X \rangle$ は H -因子を持つと仮定する。すると、 G は H -因子を持つ。

この定理は、 $p=1$ とすると一般には成立しないが、次のことは言える。

定理 2. $n \geq 2$ を整数とし、 $H = P_k$, $k \geq 6$ とする。 G を位数 n の連結グラフとし、 $V(G)$ の大きさ k の任意の連結部分集合 X に対して $\langle X \rangle$ は H -因子を持つ、つまり、 $\langle X \rangle$ は H と同型な全域部分グラフを含む、と仮定する。すると、 G は H -因子を持つ。

この定理の証明は、次の 2 つの補題により、かなり容易になされることが判明したので、詳述することは控える。

補題. G を nonseparable なグラフとし、 $a, b \in V(G)$, $a \neq b$ とする。すると、任意の $1 \leq k \leq |G| - 1$ に対し、 a を含み b を含まない $V(G)$ の大きさ k の部分集合 X で、 $\langle X \rangle$, $G - X$ がともに連結であるものが存在する。

補題. G は位数 6 以上の連結グラフで, G のブロックグラフは $path$ でないとする. すると, 任意の $6 \leq k \leq |G|$ に対し, $V(G)$ の大きさ k の部分集合 X で, $\langle X \rangle$ のブロックグラフが $path$ でないものが存在する.

さて, $H = P_k$, $2 \leq k \leq 5$ に対しては, 定理 2 の仮定を満たす G で, 結論が成り立たないようなものを, 簡単に構成できる. 定理 2 が一般の H に対しては必ずしも成立しないことを示す他の例としては,

$$H = K_{1, k-1}, \quad G = K_{1, 2k-1}; \quad k \geq 2$$

などが挙げられる. 大ざっぱに言って, $C(H-X)$ が“大きい”ような $X \in V(G)$ が存在するような H に対しては, 定理 2 は成り立たない. 次の例は, $C(H-X)$ が“小さく”かつ定理 2 が成立しないような H が無限に存在することを示すものである.

例. $l \geq 1$ とし, $4l+2$ 個の頂点 $a_1, \dots, a_{2l+1}, b_1, \dots, b_{2l+1}$ 上のグラフ G_l を,

$$E(G_l) = \{b_i b_j \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq 2l+1\} \cup \{a_i b_i \mid 1 \leq i \leq 2l+1\}$$

により定め, $2l+1$ 個の頂点 $c_1, \dots, c_l, d_1, \dots, d_l, d_{l+1}$ 上のグラフ F_l を,

$$E(F_l) = \{d_i d_j \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq l+1\} \cup \{c_i d_i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

により定める。今、 H を H_k の任意の連結全域部分グラフとし、 $\bar{G} = G_k$ とすると、定理2の仮定は (" $H = P_k, k \geq 6$ " という部分を除いて) 満たされているが、結論は成立していないことがわかる。

注意. 定理2において、条件 " $H = P_k, k \geq 6$ " を弱くして、" H は位数 $k \geq 6$ の連結グラフで、すべての $x \in V(H)$ に対して $c(H-x) \leq 2$ " とした時、定理が成り立たなくなるような H は、上記の "例" に現われるグラフで尽きていると思われるが、現時点では未解決である。なお、そこまでは弱くせず、" H は位数 $k \geq 6$ の連結グラフで、 H のブロックグラフが path" とするのであれば、定理は成立する。そのことは、やはり、上の2つの補題を使って確かめられる。

1. B. Bollobás, "Extremal Graph Theory," Academic Press, London, 1978.
2. Y. Egawa, H. Enomoto and A. Saito, On component factors, *Graphs and Combinatorics*, to appear.
3. D. P. Sumner, Graphs with 1-factors, *Proc. Amer. Math. Soc.* 42(1974), 8-12.