数理解析研究所講究録
第 566 巻 1985 年 29-35

ランダムグラフ内の特定の型の誘導部分グラフの個数

琉球大学　教育　前原　濶 (Hiroshi Maehara)

1 はじめに

ランダムグラフでは辺密度固定モデルと辺数固定モデルの２つがよく考えられている。n 個の頂点 1,2,...,n をもつ完全グラフの各辺を独立に確率 $q=1-p$ $(0<p<1)$ でとり去った残りのグラフが位数 n 辺密度 p のランダムグラフであり G(n,p) で表わされる。これに対し辺数固定モデルでは、はじめに辺数 N を決め、1,2,...,n を頂点とする完全グラフから $\binom{n}{2}-N$ 個の辺を無作為にとり去るのである。残ったグラフは G(n,N) で表わされる。n が大きく $N=\binom{n}{2}p$ なら G(n,p) と G(n,N) の構造に大差はない。

Erdös と Rényi (1960) は N を大きくしていったときの G(n,N)の漸近的$(n\to\infty)$な構造変化 ("evolution") について詳しく調べている。たとえば N=N(n)の order が $n^{(k-2)/(k-1)}$を越えると G(n,N) には位数 k の木が現れるし、また

$$N(n)=(1/2)n\log n + cn \qquad (c:大)$$

だと G(n,N) はたいてい連結になってしまう。

$p=p(n)\to 0$ $(n\to\infty)$ の場合のG(n,p) の種々の部分グラフの個数の漸近的 $(n\to\infty)$ 分布については多くの研究がある。(たとえば Karoński (1982) をみよ。) ここでは p が n に無関係な定数のとき、G(n,p) の誘導部分グラフの個数分布について簡単に得られる結果を述べる。位数 k のグラフのある族 Γ に対して G(n,p) の誘導部分グラフで Γ の元のどれかと同型になるものの個数を $\nu=\nu(\Gamma)$ とする。また α を G(k,p)が Γ のある元と同型になる確率、β を G(k,p) が辺 {1,2} を含むとして Γ のある元と同型になる条件付確率とする。

定理　　$\alpha\neq\beta$ なら $(\nu-\mu)/\sigma$ は漸近的$(n\to\infty)$に標準正規分布をする。ここで

$$\mu=\binom{n}{k}\alpha, \qquad \sigma^2 = \frac{p}{2q}\left[\frac{\alpha-\beta}{(k-2)!}n^{k-1}\right]^2$$

たとえば、p=1/2, Γ を位数 k のすべての木の集合とすると

$$\alpha-\beta=(k-4)k^{k-3}/2^{k(k-1)/2}$$

となる。従って $2\leqq k\neq 4$ なら ν は漸近的に正規分布をする。しかし $k=4$ のときはどうかわからない。

さらに一般に $\nu(\Gamma)$ が漸近的に正規分布をしないような位数 k のグラフの族 Γ があるかどうかも未だわからない。

この定理は Maehara (1980) で得られた補題を用いて簡単に証明できる。

2 補題

自然数全体の集合を N とし r を正整数とする。N のすべての r-subsets A に対して、X(A) をある確率空間上で定義された共通の平均 θ をもつ確率変数とする。これに以下の３つの条件を課す。

(a) どの有限個の r-subsets $A,B,\ldots,D\subset N$ に対しても期待値 $E(X(A)\cdots X(D))$ が存在し、任意の bijection $\pi: N\rightarrow N$ に対して

$$E(X(\pi A)\cdots X(\pi D))=E(X(A)\cdots X(D)).$$

(b) $(A\cup\cdots\cup B)\cap(C\cup\cdots\cup D)=\phi$ ならば

$$E(X(A)\cdots X(D))=E(X(A)\cdots X(B))E(X(C)\cdots X(D)).$$

条件 (a) の下では X(A),X(B) の共分散 Cov(X(A),X(B)) は $|A\cap B|$ の関数となる。$|A\cap B|=m$ のとき $C(m)=Cov(X(A),X(B))$ とおく。$C(m)\neq 0$ なる m の最小値を t とする。

(c) $|A\cap(B\cup\cdots\cup D)|\leqq t$ で、$|A\cap B|<t,\ldots,|A\cap D|<t$ ならば

$$E(X(A)\cdots X(D))=E(X(A))E(X(B)\cdots X(D)).$$

補題　確率変数 X(A) (A は N のすべての r-subsets を動く) について上の(a)(b)(c) がなりたつとする。このとき

$S(n)=\sum X(A)$ (和は $\{1,2,\ldots,n\}$ のすべての r-subsets A について)

とおくと $(S(n)-\mu)/\sigma$ は漸近的に標準正規分布に従う。ここで

$$\mu=\binom{n}{k}\theta,\qquad \sigma^2=[C(t)n^{2r-t}]/\{t![(r-t)!]^2\}.$$

この補題は Moran (1947), Moon (1965) で用いられた議論を一般化したものである。これの証明を5節で与えることにする。

3 定理の証明

自然数全体 N を頂点集合とする 辺密度 p の (無限) ランダムグラフを $G(\infty,p)$ で表わす。(N の 2-subsets の全体は可算集合だから $G(\infty,p)$ は成功の確率が p の無限 Bernoulli 試行の結果と見ることができる。) すると $G(n,p)$ は $\{1,2,...,n\}$ の誘導する $G(\infty,p)$ の部分グラフと同じものである。さて N の r-subset A に対して A の誘導する $G(\infty,p)$ の部分グラフを $G(A,p)$ で表わし、確率変数 $X(A)$ を、もし $G(A,p)$ が Γ の元と同型なら $X(A)=1$ さもなければ $X(A)=0$ なるものとして定義する。すると $X(A)$達は平均αをもつ同一分布に従う確率変数で、明らかに補題の条件(a)(b)を満たす。またさらに $\nu=\nu(\Gamma)$ は

$$\nu=\sum X(A) \quad (\text{和は } \{1,2,...,n\} \text{ のすべての r-subsets A について})$$

と表わされることがわかる。各点対 $\{i,j\}\subset N$ は独立に確率 p で $G(\infty,p)$ の辺となるから $|A\cap B|<2,...,|A\cap D|<2$ なる r-subsets $A,B,...,D\subset N$ について、$X(A)$ と積 $X(B)\cdots X(D)$ は独立となり、

$$E(X(A)X(B)\cdots X(D))=E(X(A))E(X(B)\cdots X(D))$$

となる。よって$|A\cap B|=2$ なる A,B について $\mathrm{Cov}(X(A),X(B))\neq 0$ なら条件(c) もなりたつことになる。

では次に $C(2)=(p/q)(\alpha-\beta)^2$ となることを示そう。A,B を $A\cap B=\{i,j\}$ なる r-subsets の対とする。$\{i,j\}$ が $G(\infty,p)$ の辺であるという条件の下での $X(A)X(B)$ の条件付期待値は明らかに β^2 に等しい。γ を $G(k,p)$ が辺 $\{i,j\}$をもたないとしたとき $G(k,p)$ が Γ の元と同型になる確率とする。このとき $\{i,j\}$ が $G(k,p)$ の辺でないという条件の下での $X(A)X(B)$ の条件付期待値は γ^2 に等しい。 従って、$E(X(A)X(B))=p\beta^2+q\gamma^2$ である。ところが $\alpha=p\beta+q\gamma$ であるから、

$$E(X(A)X(B))=p\beta^2+(\alpha-p\beta)^2/q,$$

従って

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X(A),X(B))&=E(X(A)X(B))-E(X(A))E(X(B))\\&=p\beta^2+(\alpha-p\beta)^2/q-\alpha^2\\&=((1-q)\alpha^2-2p\alpha\beta+p^2\beta^2+pq\beta^2)/q\\&=(p/q)(\alpha-\beta)^2\end{aligned}$$

よって、$\alpha\neq\beta$ なら C(2)≠0 で、また明らかに C(0)=C(1)=0 であるから、補題により定理が得られる。

4 木

Γ が位数 k のすべての木の集合のとき、α と β を求めてみよう。頂点集合 V={1,2,...,k} をもつ完全グラフ K_k の全域木の個数は k^{k-2} であるから明らかに

$$\alpha = k^{k-2}p^{k-1}q^{M-k+1} \qquad (M:=\binom{k}{2})$$

である。また K_k の辺 {1,2} を含む全域木の個数を b とすると

$$\beta = bp^{k-2}q^{M-k+1}$$

となることもすぐわかる。次に b を求めよう。V の部分集合 X で 1 を含み2 を含まないものをとり、X を頂点集合とする木と V−X を頂点集合とする木を辺 {1,2} でつないで、K_k の全域木で辺 {1,2} を含むものをすべて作りあげることができる。|X|=j なる X に対して、ちょうど

$$j^{j-2}(k-j)^{k-j-2} \quad 個$$

の全域木が作れるから、

$$b = \sum_{j=1}^{k-1}\binom{k-2}{j-1} j^{j-2}(k-j)^{k-j-2} = \sum \frac{(k-2)!}{(j-1)!(k-j-1)!} j^{j-2}(k-j)^{k-j-2}$$

$$= \frac{1}{k(k-1)} \sum \frac{k!}{j!(k-j)!} j^{j-1}(k-j)^{k-j-1}.$$

ここで 公式 (Moon 1970 p.15)

$$\frac{1}{s!}\sum\binom{k}{j_1\ldots j_s} j_1^{j_1-1}\ldots j_s^{j_s-1} = \binom{k-1}{s-1}k^{k-s}$$

(和は $j_1+\ldots+j_s=k$ なる正整数の組 $(j_1,\ldots,j_s)$ について) を用いると、今の場合

$s=2$ で

$$b = \frac{2}{k(k-1)}(k-1)k^{k-2} = 2k^{k-3}$$

となる。従って

$$\beta = 2k^{k-3}p^{k-2}q^{M-k+1}, \quad \alpha-\beta=(kp-2)k^{k-3}p^{k-2}q^{M-k+1}.$$

5 補題の証明

$z(n) = (S(n)-\mu)/\sigma$ の分布が標準正規分布 $N(0,1)$ に近ずくことを示すには、$z(n)$ のすべての次数の moments が $N(0,1)$ の moments に収束することを言えばよい。(Kendall and Stuart 1969,p.115 を見よ)

$[1,n]:=\{1,2,\ldots,n\}$ の d 個の r-subsets $A,\ldots,D$ に対し $E((X(A)-\theta)\cdots(X(A)-\theta))$ を簡単に $E(A,\ldots,D)$で表わす。すると $S(n)-\mu$ の d 次の moment $\mu(d)$は

$$\mu(d) = \sum E(A,\ldots,D)$$

(和は$[1,n]$の d個の r-subsets の組 $(A,\ldots,D)$ について) と表わされる。ここで

$$g(d,m) = \sum_{A\cup\ldots\cup D=[1,m]} E(A,\ldots,D)$$

(和は $A\cup\ldots\cup D=[1,m]$ なる d 個の r-subsets の組 $(A,\ldots,D)$について) とおくと、補題の条件(a)により

$$\mu(d) = \sum_{m} \binom{n}{m} g(d,m)$$

となる。従って $\mu(d)$ を n の多項式とみたときの次数は

$$\deg(\mu(d)) = \max\{m : g(d,m)\neq 0\}$$

である。次に、この次数について考える。まず $A,B,\ldots,D$ を和が$[1,m]$で、$E(A,\ldots,D)\neq 0$ なる r-subsets とする。また $A,\ldots,D$ の２つ以上に共通な元を多重元と呼び、ちょうど s $(\geqq 2)$ 個の集合に属する元を s-重元と呼ぶことにしよう。すると補題の条件(c)から、$A,B,\ldots,D$ のどれも t 個以上の多重元を含まなければならない。(さもなければ、$E(A,\ldots,D)=0$ となる。)従って $m\leqq dr-dt/2$ で $\deg(\mu(d))\leqq dr-dt/2$ となることがわかる。等号 $m=dr-dt/2$ が成り立つときは、$A,B,\ldots,D$ はいずれも ちょうど t 個の2重元を含み、3重元、4重元、... 等は含まない。さらに、A

は B,...,D のどれか1つと t 個の元を共有しなければならない。もし $|A\cap B|<t$, ..., $|A\cap D|<t$ なら、条件(c) により $E(A,...,D)=0$ となってしまうからである。同様に B,C,...,D もそれぞれ他の1つの集合と t個の元を共有する。つまり、$m=dr-dt/2$ なら {A,B,...,D} は t 個の元を共有する ”対” のいくつかに分けられる。この場合 d は偶数でなければならない。逆に $d=2h$ で、{A,...,D} が t 個の元を共有するような”対”の h 組に分けられるなら、$m=dr-dt/2=h(2r-t)$ で、また 条件(a)(b)により $E(A,...,D)=C(t)^n$ である。このような {A,B,...,D} の個数は

$$\frac{1}{2^h h!}\prod_{i=1}^{h}\binom{(2r-t)i}{2r-t}\binom{2r-t}{r}\binom{r}{t}=\frac{1}{2^h h!}\ \frac{(h(2r-t))!}{t![(r-t)!]^2}$$

で、従って g(2h,m) は、これに $(2h)!C(t)^h$ を掛けたものとなる。故に (a) から

$$\mu(2h)\ \sim\binom{n}{h(2r-t)}g(2h,h(2r-t))\sim\ \frac{(2h)!}{2^h h!}\left[\frac{C(t)n^{2r-t}}{t![(r-t)!]^2}\right]^h .$$

よって $\qquad \mu(2h)/\sigma^{2h}\longrightarrow(2h)!/(2^h h!)\qquad(n\to\infty)$

で、また d が奇数 2h+1 のときは $\deg(\mu(2h+1))<(2h+1)(2r-t)/2$ であったから

$$\mu(2h+1)/\sigma^{2h+1}\longrightarrow\infty\qquad(n\to\infty)$$

となることがわかる。このように、$z(n)=(S(n)-\mu)/\sigma$ の moments はすべて標準正規分布の moments に収束する。

6 おわりに

Γの元に同型となる G(n,p) の部分グラフの個数の漸近分布についても定理と類似のことが言える。この場合は、αを G(k,p) の部分グラフと同型になるようなΓの元の個数の期待値とし、βを G(k,p) が辺 {1,2} を含むとして、G(k,p) の部分グラフと同型になるようなΓの元の個数の期待値とすればよい。

参考文献

P. Erdős and A. Rényi (1960), On the evolution of random graphs, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 5, 17-61.

M. Karoński (1982), A review of random graphs, J. Graph Theory 6, 349-389.

M. G. Kendall and A. S. Stuart (1969), The Advanced Theory of Statistics, Vol.1, Griffin, London.

H. Maehara (1980), On random simplices in product distributions, J. Appl. Prob. 17, 553-558.

J. W. Moon (1965), On the distribution of crossings in random complete graphs, SIAM J., 13, 506-510.

J. W. Moon (1970), Counting Labeled Trees, Canadian Math. Congress, Montreal

P. A. P. Moran (1947), On the method of paired comparisons, Biometrika, 34 363-365.