

Distance degrees of vertex-transitive graphs

上智大・理工 平野照比古 (Teluhiko Hilano)*

1. Introduction

ここで扱うグラフはすべて単純グラフとする。グラフ G の頂点集合を $V(G)$ で表わす。各頂点 u に対し次の集合を定義する。

$$\Gamma_i(u) = \{v \in V(G) ; d(u, v) = i\}$$

$$\tilde{\Gamma}_i(u) = \{v \in V(G) ; d(u, v) \leq i\}$$

グラフ G が distance degree regular であるとは

$$|\Gamma_i(u)| = |\Gamma_i(v)| \quad (1.1)$$

の関係がすべての $u, v \in V(G)$ と自然数 i について成立するときをいう。このとき

$$k_i = |\Gamma_i(u)|$$

とおいて、 i 番目の distance degree といい。

————— < . > —————

*) 1985年4月1日より 幾徳工業大学へ転職。

たとえば vertex-transitive なグラフは distance degree regular である。自明でない、distance degree regular なグラフの distance degree の間の関係としては次の定理が知られている。

Theorem 1. (Hilano-Nomura [3])

G を連結で、distance degree regular なグラフとする。

このとき

$$3k_r \geq 2(1+k_1) \quad (1.2)$$

が $r=1, 2, \dots, d(G)-1$ に対して成立する。

この定理によれば k_r ($r=2, \dots, d(G)-1$) の下限の値は $k_1 \pmod{3}$ の値により少し異なることがわかる。具体的に書くと

$$(i) \quad k_1 = 3n \quad \Rightarrow \quad k_r \geq 2n+1$$

$$(ii) \quad k_1 = 3n+1 \quad \Rightarrow \quad k_r \geq 2n+2$$

$$(iii) \quad k_1 = 3n+2 \quad \Rightarrow \quad k_r \geq 2n+2$$

となる。このうち、(iii) の場合においては k_r の下限を与えるグラフは存在し、かつ特徴づけも済んでいる。([3, Theorem 2]) 残りの場合において k_r の下限の値をとるグラフは一般に存在するかどうかは知られていない。もし vertex-transitive なグラフに限れば (ii) の場合には次のことが示される。

Theorem 2.

G を連結で vertex-transitive なグラフとする。 $k_1 = 3n$, $k_r = 2n+1$ ($2 \leq r < d(G)$) を満たすグラフは $n=1$ i.e. $k_1 = k_r = 3$ に限る。このとき $k_{r+1} = 1$ であり、したがって $d(G) = r+1$ である。

Remark. (1.1) の関係が、すべての $u, v \in V(G)$ と $i=1, 2$ の場合に成立するグラフを考える。このとき $k_1 = 3n$, $k_2 = 2n+1$ を満たす、いくらでも大きい直径をもつグラフは存在する。(Hilano[2])

2. 同値関係

各 $x, y \in V(G)$ に対し

$$x \sim y \iff \widehat{\Gamma}_1(x) = \widehat{\Gamma}_1(y)$$

と定義する。これは同値関係であり、任意の $u \in V(G)$ に対し、 $\widehat{\Gamma}_i(u)$, $i \geq 2$ はこの同値関係による同値類の合併として表わされる。vertex-transitive なグラフにおいては各同値類の元の数は一定の値 m となる。上に述べたことにより、 m は $1+k_1, k_2, \dots, k_{d(G)}$ の公約数である。一方、定理の条件より

$$\begin{aligned} (1+k_1, k_r) &= (3n+1, 2n+1) \\ &= (n, 2n+1) = 1 \end{aligned}$$

であるから、 $m=1$ となる。即ち、次のことが成立する。

Fact 1. 定理2の条件のもとでは、相異なる2つの頂点 $x, y \in V(G)$ に対し、

$$\tilde{P}_1(x) \neq \tilde{P}_1(y)$$

が成立する。

3. 定理の証明

$P_r(u)$ と $P_{r+1}(u)$ の間の edge の数を数えることにより

$$\sum_{x \in P_r(u)} |P_{r+1}(u) \cap P_1(x)| = \sum_{y \in P_{r+1}(u)} |P_r(u) \cap P_1(y)| \quad (3.1)$$

が成立する。

Fact 2. $|P_r(u) \cap P_1(y)| \geq r$

が $y \in P_{r+1}(u)$ に対し成立する。

(proof) (u, v, w, \dots, y) を長さ $r+1$ の path とする。

このとき

$$\tilde{P}_r(w) \supset \tilde{P}_{r-1}(v) \cup \tilde{P}_1(y) \quad (3.2)$$

である。これより

$$k_r \geq 1 + k_1 - |P_{r-1}(v) \cap P_1(y)| \quad (3.3)$$

が成り立つ。一方

$$P_{r-1}(v) \cap P_1(y) \subset P_r(u) \cap P_1(y) \quad (3.4)$$

であるの下主張を得る。 \square

Fact 3. $|P_{r+1}(u) \cap P_1(x)| \leq n$

が $x \in P_r(u)$ に対して成立する。

(proof) (u, v, w, \dots, x) を長さ r の path とする。任意の $y \in P_{r+1}(u) \cap P_1(x)$ に対し、 (u, v, w, \dots, x, y) は長さ $r+1$ の path である。一般に、

$$\tilde{P}_r(v) \supseteq \tilde{P}_{r-1}(u) \cup (P_r(u) \cap P_{r-1}(v)) \cup (P_{r+1}(u) \cap P_r(v))$$

であり、さらに (3.5)

$$P_{r+1}(u) \cap P_r(v) \supset P_{r+1}(u) \cap P_1(x) \quad (3.6)$$

$$P_r(u) \cap P_{r-1}(v) \supset P_{r-1}(v) \cap P_1(y) \quad (3.7)$$

が成立する。したがって (3.3) により

$$|P_r(u) \cap P_{r-1}(v)| \geq n$$

である。==>

$$|P_{r+1}(u) \cap P_1(x)| \geq n+1$$

と仮定すると、(3.5) により

$$|P_r(u) \cap P_{r-1}(v)| = n$$

$$|P_{r+1}(u) \cap P_1(x)| = n+1$$

ではなくてはならぬ。よって (3.2), (3.3), (3.7) より

$$P_r(u) \cap P_{r-1}(v) = P_{r-1}(v) \cap P_1(y) \quad (3.8)$$

$$\tilde{P}_r(w) = \tilde{P}_{r-1}(v) \cup \tilde{P}_1(y) \quad (3.9)$$

が任意の $y \in P_{r+1}(u) \cap P_1(x)$ について成立する。即ち。

$\tilde{P}_1(y)$ は y によらず一定である。 $|P_{r+1}(u) \cap P_1(x)| = n+1 \geq 2$ より Fact 1. と矛盾する。 \square

Fact 2, 3 と (3.1) により

$$k_r \geq k_{r+1}$$

を得る。二二で場合を分ける。

Case 1) $k_r > k_{r+1}$ のとき

よ $k_{r+1} < 2(1+k_1)$ であるので $d(G) = r+1$ である。 Fact 3 と (3.1) により

$$\begin{aligned} n k_r &\geq \sum_{y \in P_{r+1}(u)} |P_r(u) \cap P_1(y)| \\ &= \sum_{y \in P_{r+1}(u)} (k_1 - |P_{r+1}(u) \cap P_1(y)|) \\ &\geq k_{r+1} (k_1 - (k_{r+1} - 1)) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} k_{r+1}^2 - (3n+1)k_{r+1} + n(2n+1) \\ = (k_{r+1} - n)(k_{r+1} - (2n+1)) \geq 0 \end{aligned}$$

である。条件より

$$k_{r+1} \leq n$$

を得る。一方 $y \in P_{r+1}(u)$ に対し

$$\tilde{P}_1(y) \subseteq P_{r+1}(u) \cup P_r(u) \quad (3.10)$$

より

$$k_{r+1} \geq 1 + k_1 - k_r = n$$

を得るので $k_{r+1} = n$ が成立する。これは (3.10) で等式が成立することを意味する。Fact 1. より $n=1$ となる。

Case 2) $k_r = k_{r+1}$ のとき

(3.1). Fact 2 により

$$\sum_{x \in P_r(u)} |P_{r+1}(u) \cap P_1(x)| \geq n k_{r+1} = n k_r$$

であり。Fact 3. によりすべての $x \in P_r(u)$ に対し

$$|P_{r+1}(u) \cap P_1(x)| = n \quad (3.11)$$

が成立する。同様に

$$n k_{r+1} \geq \sum_{y \in P_{r+1}(u)} |P_r(u) \cap P_1(y)|$$

であるから

$$|P_r(u) \cap P_1(y)| = n \quad (3.12)$$

がすべての $y \in P_{r+1}(u)$ に対して成立する。

(u, v, w, \dots, x) を長さ r の path とし $y \in P_{r+1}(u) \cap P_1(x)$ を任意にとる。(3.3), (3.4), (3.12) により

$$|P_{r-1}(v) \cap P_1(y)| = n$$

となり。(3.2) において等式が成立する。

$$\tilde{P}_r(w) = \tilde{P}_{r-1}(v) \cup \tilde{P}_1(y) \quad (3.13)$$

一方. (3.5)-(3.7), (3.11), (3.12) より

$$n+1 \geq |P_r(u) \cap P_{r-1}(v)| \geq n$$

である。 $n \geq 2$ とする。もし、

$$|P_r(u) \cap P_{r-1}(v)| = n$$

であれば

$$P_r(u) \cap P_{r-1}(v) = P_{r-1}(v) \cap P_1(y)$$

が任意の $y \in P_{r+1}(u) \cap P_1(x)$ に対して成立し、(3.13) とあわせて、 $P_1(y)$ は y によらず一定となる。これは Fact 1. に矛盾する。したがって $|P_r(u) \cap P_{r-1}(v)| = n+1$ である。このときには $x^* \in P_r(u) \cap P_{r-1}(v)$ で $y \notin P_1(x^*)$ なるものが存在する。(3.11) より

$$|P_{r+1}(u) \cap P_1(x^*)| = n$$

であるから、 x^* のとり方より

$$|P_{r+1}(u) \cap (P_1(x) \cup P_1(x^*))| \geq n+1$$

である。したがって

$$|P_{r+1}(u) \cap P_r(v)| \geq n+1$$

である。(3.5) の両辺の元の数を数えると矛盾する。ゆえに $n=1$ とする。

仮に、 $d(G) \geq r+2$ とすれば、 $k_{r+2} = 3$ or 1 であり、 $y \in P_{r+1}(u)$ に対し、

$$|P_r(u) \cap P_1(y)| = |P_{r+2}(u) \cap P_1(y)| = 1$$

が成立する。したがって $\langle P_{r+1}(u) \rangle$ は 3 点の 1-regular グラフとなり、矛盾である。したがって $d(G) = r+1$ である。このときは (3.12) より

$$\langle P_{r+1}(u) \rangle = K_3$$

である。 $|P_{r+1}(u) \cap P_r(v)| \geq 2$ とすると (3.11), (3.12) より

$$|P_r(u) \cap P_{r-1}(v)| \geq 2$$

となり、(3.5) に矛盾する。したがって、各 $y \in P_{r+1}(u)$ に対し、 $v \in P_1(u)$ で $d(v, y) = r$ なる元は unique に定まる。また $P_{r+1}(y) \subset P_1(u)$ に注意すれば

$$\langle \tilde{P}_1(u) \rangle = K_4$$

となり、 $P_2(u) = \emptyset$ となる。

References

- [1] Biggs, N. Algebraic graph theory, Cambridge Tracts No 67. 1974
- [2] Hilano, T. Regular graphs with regular squares, (unpublished)
- [3] Hilano, T., Nomura, K. Distance degree regular graphs, JCT(B)

37 (1984) 96-100

- [4] 平野照比古, 斎藤友克 Some problems of distance degrees of symmetric graphs, 「群と組み合わせ論」研究集会, 1984年10月 (於 上越教育大)

追加

榎本彦衛氏(東大理)により次のことが示された。

$C_m[K_{n+1}]$ ($m \geq 8$ なる偶数)より 1-factor をぬいたグラフを考えれば. これは

$$k_1 = 3n+1, k_2 = 2n+3, k_3 = \dots = k_{m/2-1} = 2n+2, k_{m/2} = n+1$$

なる distance degree regular グラフであり. 適当な 1-factor を選べば vertex-transitive なグラフにもできる。

さらに. 適当な 2-factor をぬけば $n \geq 2$ のとき

$$k_1 = 3n, k_2 = 2n+4, k_3 = \dots = k_{m/2-1} = 2n+2, k_{m/2} = n+1$$

なる distance degree regular グラフが得られる。

たとえば $n \geq 2$ に対し

$$C_m[\bar{C}_{n+1}]$$

は条件を満たす vertex transitive なグラフである。