

Graph の bond lattice について

東海大理学部 土屋守正 (Morimasa Tsuchiya)

[5] で、グラフ G より構成される Bond Lattice $\mathcal{L}(G)$ が定義されている。ここでは、 $\mathcal{L}(G)$ がいくつかの束論的性質をみたすために、グラフ G の満たすべき性質について述べる。なお、ここでは単純グラフのみを扱う。

グラフ G の辺集合 $E(G)$ の部分集合 A に対して

$$\bar{A} = \{e \in E(G) \mid e \text{ の両端点は } \langle A \rangle \text{ の } 1 \text{ つの連結成分に属す}\}$$

$\langle A \rangle$: A で生成される辺部分グラフ

で \bar{A} を定義し、 \bar{A} を A の closure といい、 $\bar{A} = A$ のとき A は closed であるという。 $\mathcal{L}(G)$ で $E(G)$ の部分集合で closed であるもの全体を表わす。 $\mathcal{L}(G)$ における 2 つの演算 \vee, \wedge を

$$x \vee y = \overline{(x \cup y)}, \quad x \wedge y = x \cap y$$

で定めると、 $\mathcal{L}(G)$ は演算 \vee, \wedge の下で束になり、この束を

Bond Lattice という。これまでに得られている結果としては、次のようなものがある。

定理1. 次の3つの命題は同値である。

- (1) $\mathcal{L}(G)$ が、ブール束
- (2) $\mathcal{L}(G)$ が、分配束
- (3) G が、forest

定理2. $\mathcal{L}(G)$ がモジュラー束であるための必要十分条件は、 G が長さ4以上のcycleを含まないことである。

これらの結果は、モジュラー束や分配束に対する部分束による特徴付けに基づいて証明したものである。次に $\mathcal{L}(G)$ の要素についての束論的性質について考えたところ、モジュラー束に対して次の結果がえられ、これらの結果の系として、定理1, 2が得られた。

さて、束 \mathcal{L} の2要素 A, B に対して (A, B) がモジュラー対であるのは、

$$C \leq B \Rightarrow C \vee (A \wedge B) = (C \vee A) \wedge B$$

が成立するとき、かつこのときに限る。

定義1. $A, B \in \mathcal{L}(G)$, $K \subseteq E(G)$ に対して、 K が (A, B) に関する M -cycleである。

$\xleftrightarrow{\text{def}}$ $\langle K \rangle$ は $\langle A \vee B \rangle$ に含まれる長さ4以上のcycle
 で、次の(1)~(3)の条件を満たすものである。

但し、 $K(A) := K \cap A$, $K(B) := K \cap B$

$$(1) K(A) \neq K, K(B) \neq K$$

$$(2) K(A) \cup K(B) = K$$

$$(3) \exists e \in K(B) \text{ s.t. } e \notin \overline{(K(B) \setminus \{e\}) \vee (A \wedge B)}$$

定理3. $A, B \in \mathcal{L}(G)$ に対して、 (A, B) がモジュラー対
 であるための必要十分条件は、 (A, B) に関する M -cycle
 が存在しないことである。

東 \mathcal{L} がモジュラー東であるのは、 \mathcal{L} のすべての2要素がモ
 ジュラー対であるとき、かつこのときに限るので、定理3よ
 り定理2が系として得られる。

また、分配3組について同様のことを考えてみた。東 \mathcal{L} の
 3要素 A, B, C について

$$(A, B, C) \in \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{\iff} (A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

が定義されており、これに対して次の結果が得られた。

定義2. $A, B, C \in \mathcal{L}(G)$, $K \subseteq E(G)$ に対して、 K が $(A,$
 $B, C)$ に関する \mathcal{D} -cycle

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\langle K \rangle$ は $\langle A \vee B \rangle$ に含まれる cycle で、次の (1), (2) の条件を満たすものである。

但し、 $K(A) := K \cap A$, $K(B) := K \cap B$, $K(C) := K \cap C$

(1) $K(A) \neq K$, $K(B) \neq K$, $K(C) \neq K$

(2) $\exists e \in K(C)$ s.t. $K(A) \cup K(B) = K \setminus \{e\}$

and $e \notin (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

定理 4. $A, B, C \in \mathcal{L}(G)$ に対して、 $(A, B, C) \in \mathcal{D}$ であるための必要十分条件は、 (A, B, C) に関する \mathcal{D} -cycle が存在しないことである。

束 \mathcal{L} が分配束であるのは、 \mathcal{L} の任意の 3 要素 A, B, C に対して、 $(A, B, C) \in \mathcal{D}$ であるとき、かつこのときに限るので、定理 4 より次の結果がただちに得られる。(この結果は、定理 1 の一部である。)

系 5. $\mathcal{L}(G)$ が分配束であるための必要十分条件は G が forest であることである。

さらにまた、モジュラー対の対称性について考えてみたところ、次の結果が得られた。

定理 6. $A, B \in \mathcal{L}(G)$ に対して, (A, B) がモジュラー対ならば, (B, A) もモジュラー対である。

束 \mathcal{L} の任意の 2 要素 A, B に対して「 (A, B) がモジュラー対ならば, (B, A) もモジュラー対」が成立するとき束 \mathcal{L} は, semi modular であるので, 次の結果が得られる。

系 7. $\mathcal{L}(G)$ は, semi modular である。

[5] において G.-C. Rota は, Bond lattice が exchange property をもつことを示した。このことにより, 系 7 は得られる。

Boole 束が相補的かつ分配的な束であることから, 定理 1 より次の結果が得られる。

系 8. $\mathcal{L}(G)$ は, 相補的である。

References

- [1] C.Berge, Graphs and Hypergraphs (North-Holland, Amsterdam, 1973).
- [2] G.Birkhoff, Lattice Theory (A.M.S. Colloq. Publ., Providence, 1967).
- [3] F. Maeda and S. Maeda, Theory of symmetric lattices (Springer-Verlag, Berlin, 1970).
- [4] S. Maeda, private communication, the 3rd lattice theory symposium (in Tokai University, 1984).
- [5] G.-C. Rota, On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Möbius functions, Z. Wahrsch., 2 (1964) 340-368.
- [6] M. Tsuchiya, On determination of a graph G whose bond lattice $\mathfrak{L}(G)$ is modular, to appear in Discrete Math..
- [7] M. Tsuchiya, On modular pairs of the bond lattice of a graph, to appear.
- [8] D.J.A.Welsh, Matroid Theory (Academic Press, London, 1976).