数理解析研究所講究録
第566巻 1985年 109-116

A composition method of Steiner 2-designs and their automorphisms

東京理科大・理工 神保 雅一
(Masaichi JIMBO)

BIBD (balanced incomplete block design)を構成する際に、その自己同型群の性質を利用することが多い。この報告では、ある種の自己同型群をもつ Steiner 2-design に注目し、それらの design を用いて、別のパラメータをもつ Steiner 2-design を構成する方法を論じる。

Vを有限集合($|V|=v$), $\mathcal{B}$をVのk-部分集合の族とする。Vの各元を点、$\mathcal{B}$の各元をブロックと呼ぶ。今、任意の2点 $a, b \in V$ を同時に含むブロックの数が、a, b の選び方によらず一定 $(=\lambda)$ であるとき、$(V, \mathcal{B})$ を 2-design (BIBD) であるという。特に、$\lambda = 1$ のとき Steiner 2-design であるといい、$S(2, k, v)$と書く。gをV上の置換とする。ブロック $B = \{b_1, \cdots, b_k\}$ に対して、$B^g = \{b_1^g, \cdots, b_k^g\}$ と定義する。V上の置換gが、$(V, \mathcal{B})$の自己同型変換であるとは、$\mathcal{B}$がgに関して不変(すなわち、$\mathcal{B}^g = \{B^g \mid B \in \mathcal{B}\} = \mathcal{B}$)であることである。$G$を$(V, \mathcal{B})$の自己同型群(自己同型変換の全体)又は、その部分群とし、GのV上での orbit を$V_1, \cdots, V_p$とする。今、Gが各V_i上で sharp (すなわち、任意の $a, b \in V_i$ に対して、$a^g = b$ となる $g \in G$ が唯1つ存在する。)であれば、$(V, \mathcal{B})$は、p-orbital であるといい、$(V, \mathcal{B})_G$ と書く。特に、1-orbital

Steiner 2-design を regular Steiner 2-design という（Johnsen and Storer（1974）参照）。regular Steiner 2-design $(V, \mathcal{B})_G$ に於いて、G が巡回群であるとき、cyclic Steiner 2-design といい、G がアーベル群であるとき、Abelian Steiner 2-design という。cyclic Steiner 2-design は、特にその構造が簡単であり応用上も便利であるため、今までに、いろいろな研究がなされてきた。また、素体の拡大体上での射影幾何の点と直線が成す Steiner 2-design 等のように、Abelian Steiner 2-design の構成法もいくつか知られている。

ここでは p-orbital Steiner 2-design の構成法（合成法）を考える。$(V, \mathcal{B})_G$ を、p-orbital Steiner 2-design とする。G の $\mathcal{B}$ 上での orbit を block orbit と呼ぶ。任意のブロック B に対して、$G_B = \{g \in G \mid B^g = B\}$ とおく。今、$G_B = \{1\}$ であれば、B を含む block orbit は full orbit であるといい、$G_B \supsetneqq \{1\}$ であるとき、short orbit であるという。

G を位数 u の群とし、$\Sigma = (\sigma_{ij})$ $(i = 1, \cdots, k;\ j = 1, \cdots, u)$ を G の元を要素にもつ $k \times u$ 配列とする。Σ の任意の異なる 2 行 i と i' について、$\{\sigma_{ij}\sigma_{i'j}^{-1} \mid j = 1, 2, \cdots, u\} = G$ が成立つとき、Σ を (G, k)-row inverse scheme と呼ぶ。regular Steiner 2-design から、(G, k)-row inverse scheme を作ることができることを次の補題が示している。

<u>補題 1</u>　$(V, \mathcal{B})_G$ を short orbit を持たない regular Steiner 2-design $S(2, k, u)$ とし、直交表 $OA(k^2, k+1, k, 2)$ が存在するとすると、(G, k)-row inverse scheme を構成することができる。

<u>証明</u>　$(k+1)\times k^2$ 配列 $A=(a_{ij})$ を $\{1, 2, \cdots, k\}$ の要素を元にもつ直交表 $OA(k^2, k+1, k, 2)$ とする。一般性を失うことなく、

$$a_{k+1,\, k(k-1)+j} = 1 \quad (j=1,2,\cdots,k) \qquad a_{i,\, k(k-1)+j} = j \quad \begin{pmatrix} i=1,\cdots,k \\ j=1,\cdots,k \end{pmatrix}$$

と仮定する。$(V, \mathcal{B})_G$ は、regular Steiner 2-design であるから、V を G と同一視することができ、このとき、任意の $g \in V(=G)$ と任意の $h \in G$ に対して、$g^h = g \cdot h \ (\in V)$ である。また、$\mathcal{B}$ の各ブロックは、G の k-部分集合であると見なせる。$\mathcal{B}$ のある block orbit から任意に一つブロックを選び、それを、$B=\{b_1, \cdots, b_k\}$ とする。また、

$$\Delta B = \{\, b_i b_j^{-1} \mid i \neq j \ ; \ i, j = 1, 2, \cdots, k \}$$

とおく。ここで、$k \times k(k-1)$ 配列 $\Sigma_B = (\sigma_{ij})$ を、

$$\Sigma_B = (\, b_{a_{ij}} b_{a_{ij}}^{-1} \,) \qquad i=1,\cdots,k \ ; \ j=1,\cdots,k(k-1)$$

と定義する。このとき、Σ_B の任意の異なる 2 行 i と i' について、

$$\{ \sigma_{ij} \sigma_{i'j}^{-1} \mid j=1,\cdots,k(k-1)\} = \{ b_{a_{ij}} b_{a_{i'j}}^{-1} \mid j=1,\cdots,k(k-1)\}$$
$$= \Delta B$$

が成立つ。各 block orbit から、一つずつブロックを選び、

それを $B_1, \cdots, B_t$ とする。各 B_i に対して、Σ_{B_i} を作り、

$$\Sigma = [\mathbb{1} : \Sigma_{B_1} : \Sigma_{B_2} : \cdots : \Sigma_{B_t}] \qquad (\mathbb{1} \text{は all-one vector})$$

とおくと、Σ が求める (G, k)-row inverse scheme である。

証明終

特に、G が巡回群であるときには、次の補題も成立つ。

補題2　G を位数 u の巡回群とし、u と $(k-1)!$ が互いに素であるとすると、(G, k)-row inverse scheme が存在する。(Jimbo and Kuriki (1983) 参照)

ここで、次の主定理を示す。

定理1　次の3つが存在するとする。

(i) short orbit をもたない p-orbital Steiner 2-design $S(2, k, v)$ これを $(V, \mathcal{B})_{G_1}$ とする。

(ii) regular Steiner 2-design $S(2, k, u)$。これを $(V', \mathcal{B}')_{G_2}$ とする。

(iii) (G_2, k)-row inverse scheme.

このとき、$G \triangleright G_2$, $G/G_2 \cong G_1$ を満す任意の群 G に対して、G を自己同型群又はその部分群としてもつ p-orbital Steiner 2-design $S(2, k, uv)$ が存在する。

証明　$(V, \mathcal{B})_{G_1}$ の点集合 V を

$$V = \{(g, l) \mid g \in G_1, l = 1, 2, \cdots, p\}$$

と表し、$(g, l)^h = (gh, l)$ と定義しておく。$(V, \mathcal{B})_{G_1}$ の

ある block orbit から任意に1つブロックを選び、それを $B=\{(b_1,l_1),\cdots,(b_k,l_k)\}$ とする。G の G_2 による各剰余類の中から任意に代表元を取り、その集合を $\mathfrak{S}$ とすると G_1 の各元から $\mathfrak{S}$ の各元に、自然に全単射 φ が決まる。$\Sigma=(\sigma_{ij})$ $(i=1,\cdots,k\,;\ j=1,\cdots,u)$ を (G_2,k)-row inverse scheme とする。$\tilde{V}=\{(g,l)\mid g\in G,\ l=1,\cdots,p\}$ とし、

$$B_j=\{(\varphi(b_1)\sigma_{1j},l_1),\cdots,(\varphi(b_k)\sigma_{kj},l_k)\}\quad j=1,\cdots,u$$

$$\mathcal{B}(B)=\{B_j^g\mid g\in G,\ j=1,\cdots,u\}$$

とおく。このとき、$G\triangleright G_2$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
&\bigcup_j\{((\varphi(b_{i'})\sigma_{i'j})(\varphi(b_i)\sigma_{ij})^{-1},\ l_{i'})\}\\
&=\bigcup_j\{(\varphi(b_{i'})\sigma_{i'j}\,\sigma_{ij}^{-1}\varphi(b_i)^{-1}),\ l_{i'})\}\\
&=(\varphi(b_{i'})G_2\varphi(b_i)^{-1},\ l_{i'})\\
&=(\varphi(b_{i'})\varphi(b_i)^{-1}G_2,\ l_{i'})\\
&=(\varphi(b_{i'}b_i^{-1})G_2,\ l_{i'})
\end{aligned}$$

$(V,\mathcal{B})_{G_1}$ の各 block orbit から任意に1つずつブロックを選びそれを $B^{(1)},\cdots,B^{(t)}$ とし $\mathcal{B}(B^{(1)}),\cdots,\mathcal{B}(B^{(t)})$ を作ると $\overline{\mathcal{B}}=\mathcal{B}(B^{(1)})\cup\cdots\cup\mathcal{B}(B^{(t)})$ において、$(1,l)\in\tilde{V}$ は、$(G_2,l)=\{(g,l)\mid g\in G_2\}$ 以外の $\tilde{V}$ の元とちょうど1回ずつ会合することがわかる。

$(V',\mathcal{B}')_{G_2}$ は regular Steiner 2-design であるから、V' を

G_2と同一視することができる。$(V', \mathcal{B}')_{G_2}$ の各 block orbit から任意に一つずつブロックを選び、その各ブロック $B' = \{b_1', \cdots, b_k'\}$ に対して、$B_\ell' = \{(b_1', \ell), \cdots, (b_k', \ell)\}$ $\ell = 1, \cdots p$ を作り、これらを含む block orbits を $\overline{\mathcal{B}}$ に追加し $\widetilde{\mathcal{B}}$ を作ると、$(\widetilde{V}, \widetilde{\mathcal{B}})_G$ が求める p-orbital Steiner 2-design $S(2, k, uv)$ である。

証明終

この定理1と補題1から、次の系を得る。

系1　次の3つが存在するとする。

(i) short orbit を持たない p-orbital Steiner 2-design $S(2, k, v)$
　これを $(V, \mathcal{B})_{G_1}$ とする。

(ii) short orbit を持たない regular Steiner 2-design $S(2, k, u)$.
　これを $(V', \mathcal{B}')_{G_2}$ とする。

(iii) 直交表 $OA(k^2, k+1, k, 2)$ が存在する。

このとき $G \triangleright G_2$, $G/G_2 \cong G_1$ を満す任意の群 G に対して、G を自己同型群又は、その部分群としてもつ p-orbital Steiner 2-design $S(2, k, uv)$ が存在する。

cyclic Steiner 2-designの場合には、定理1，系1が、成立つことが Jimbo and Kuriki (1983) に示されており、また、cyclic Steiner 2-design が short orbit をもつ場合にも、同様の結果が得られている。

今までに、cyclic Steiner 2-design や Abelian Steiner 2-design が、いろいろなパラメータに対して、構成できることが知られており、定理1又は系1を用いると、より多くのパラメータに対して、cyclic Steiner 2-design や Abelian Steiner 2-design が構成できる。一方、cyclic Steiner 2-design から、次のようにして、non-Abelian regular Steiner 2-design を作ることもできる。

系2　vを奇素数とし、cyclic $S(2,k,v)$ が存在するとすると、任意の $m \geqq 3$ に対して、non-Abelian regular $S(2,k,v^m)$ が存在する。

証明　vが素数であるから、補題2より、(C_v, k)-row inverse scheme が存在する。ただし、C_vは位数vの巡回群。従って、定理1において、$G=C_{v^2}$，$G_1=G_2=C_v$ とおくと、cyclic $S(2,k,v^2)$ を構成することができる。（cyclic $S(2,k,v)$ が存在するためには、$v\equiv 1$ 又は $k \pmod{k(k-1)}$ であり、vが素数であるから、$v \equiv 1 \pmod{k(k-1)}$。そしてこのとき、この cyclic design は、short orbit をもたない（Jimbo and Kuriki (1983) 参照)。）また、v^2と$(k-1)!$は互いに素であるから、再び補題2より、(C_{v^2}, k)-row inverse scheme が存在する。C_{v^2}を正規部分群として含み、$G/C_{v^2} \cong C_v$ となる位数v^3の非可換群が存在するから（Hall (1959) 参照）、定理1により、non-Abelian regular $S(2, k, v^2)$ が存在する。従ってこの Steiner 2-design と cyclic $S(2, k, v)$ 及び、(C_v, k)-row inverse scheme をくり返し用いて、任意の $m \geqq 3$ に対して、non-Abelian regular $S(2, k, v^m)$ を構成することができる。 証明終

参考文献

M. Hall Jr. (1959), The Theory of Groups, Macmillan.

M. Jimbo and S. Kuriki (1983), On a composition of cyclic 2-designs, Discrete Mathematics 46, 249-255.

E.C. Johnsen and T. Storer (1974), Combinatorial structures in loops. IV. Steiner triple systems in neofields, Math. Z. 138, 1-14.