数理解析研究所講究録
第 566 巻 1985 年 145-159

グラフのある多項式不変量（II）

東京工業大学　理学部　　根上生也　（Seiya NEGAMI）

グラフ G（ループ，多重辺を許す）に対し，３変数多項式 $f(G;t,x,y)$ を定義し，それがグラフの同型性の不変量として，どの程度有効かを考察するのが本稿の目的である．数理解析研講究録 No.561「コンピューターを利用した低次元トポロジー」の中に同じ題名のものがあるが，本稿はその続編と思って頂いて差し支えない．$f(G;t,x,y)$ の細かな性質などはそれに委ねることにして，本稿では，以下で述べる予想に向けての試行錯誤を垣間見て頂くことにする．

１．　f(G) の正体

グラフの基本的な変形操作として，辺の除去と縮約（contraction）が挙げられる．前者については言うまでもないが，後者は，辺を除去した後，その辺の両端点を同一視して１つの頂点にする操作である．従って，特にその辺がループのときは，その縮約は除去と同じことである．辺 e の除去，縮約によってグラフ G から得られるグラフをそれぞれ，$G-e$，G/e と記すことにする．
このとき，$f(G;t,x,y)$（以下，t,x,y を省略して， $f(G)$ と書く．）を次のように再帰的に定義する．

(i)　$f(\overline{K_n}) = t^n$.　　$(n \geqq 1)$
(ii)　$f(G) = x\, f(G/e) + y\, f(G-e)$　　$(e \in E(G))$.

ただし， $\overline{K_n}$ は完全グラフ K_n の補グラフ，即ち， n 個の孤立点のみからなるグラフである．辺の除去，縮約を繰り返していけば，いずれ $\overline{K_n}$ に到達するので，上の２つの式によって $f(G)$ を決定することができる．辺 e の取り方に依らずに $f(G)$ が定まることは，簡単な計算で示すことができるので，同型なグラフは

f(G) として同じ多項式を持つ.

この f(G) の計算手順を考えてみると, f(G) が次のように展開できることがわかる.

$$f(G) = \sum_{i,j} b_{ij} t^j x^{q-i} y^i.$$

更に, よーく考えると上の係数 $b_{ij} \geqq 0$ は次のような意味を持つことが示される. それからも f(G) がグラフの不変量になることがわかるだろう.

命題1. (i) b_{ij} = G－Aの連結成分の個数が j になる i 本の辺からなる E(G) の部分集合 A の総数.

(ii) b_{ij} = 連結成分の個数が j で q-i 本の辺を持つGの全域部分グラフの総数.

定義に従って f(G) を計算しようとすると, 構造の簡単なグラフでもかなりの忍耐力が要求されるが, 上の事実に基づけば, 若干の知性だけで f(G) の正体を見極められる例も少なくない. 例えば, n 本の辺を持つ木を T_n, 長さ n のサイクルを C_n とすると,

$$f(T_n) = t(x + ty)^n, \quad f(C_n) = (x + ty)^n + (t-1)x^n.$$

逆に, このような多項式を持つグラフは T_n, C_n に限られる.

問題. $f(K_n)$, $f(K_{n,m})$ を求めよ.

実は, この f(G) は, 最近, 低次元トポロジー界を賑わしている Jones 多項式のまねをして定義したものである. Jones 多項式は結び目, 絡み目の不変量の1

つで，従来知られていた多くの多項式を包含しており，その有効性が高く評価されている．低次元トポロジストたちは，その再起的定義の簡明さとそれにもかかわらずその正体が掴みきれない神秘さに魅了されているのだ．（Jones 多項式については，この講究録の中で小林一章先生が「グラフと絡み輪に関する多項式」と題してグラフ理論的立場から解説されているので，詳しいことはそちらを御参照下さい．）

Jones 多項式と同様に，私が定義した多項式 $f(G)$ も，定義は簡単であるし，グラフの色々な不変量を含んでいる．例えば，x,y に適当な値をほうり込んでやれば，全域林の総数を係数に持つ多項式や，染色多項式，flow 多項式などが導ける．しかし，残念なことに，上のようにあっさりとその正体が暴かれてしまった．これでは興味も半減．その正体を巡って，あれやこれやと模索して楽しもうという私の思惑は断念せざるをえない．おまけに，上で示したように，木の $f(G)$ は辺の本数だけで決まり，その形には依存しない．即ち，いくらでも同じ $f(G)$ を持つ同型でないグラフが存在することになる．これではグラフの同型性判定のための不変量としての役目もたいして果たせそうにない．

2. 予想

・・・とがっかりしているのも束の間．次の H. Whitney の定理を契機に，新しい研究目標を掴んだ．

定理２．（H. Whitney）２つのグラフ G_1，G_2 の辺集合間の１対１対応

$$\theta : E(G_1) \to E(G_2)$$

で両者のサイクル間の１対１対応を誘導するものが存在するならば，G_1 と G_2 は 2-同型である．更に，それらが 3-連結ならば，θ はそれらの間の同型写像を誘導する．

ここで，G_1 と G_2 が **2-同型**であるとは，図１のような三種類の変形を繰り返して，一方から他方へ移れることである．特に，グラフが連結のときには最後の操作は必要ない．また，グラフが 3-連結ならば，どの変形もできないから，それと 2-同型なものはそれ自身だけである．木の場合，そもそもサイクルがないから，辺数が同じ２つの木は 2-同型である．実際，それらは一番目の操作だけで変形して移り合えることは明らかだ．

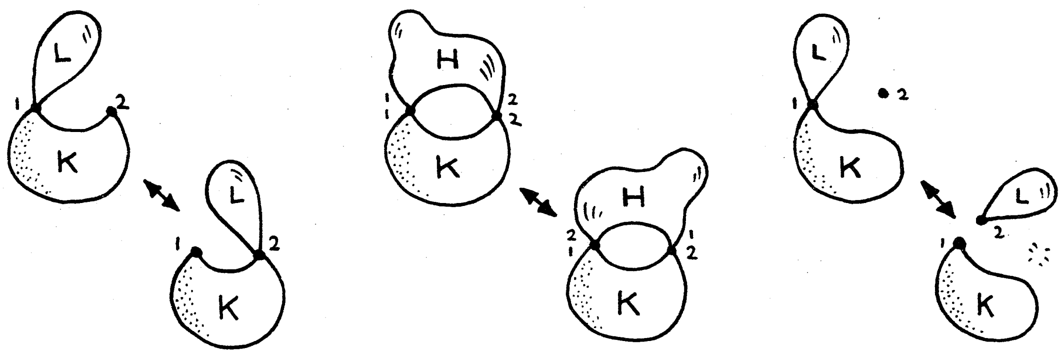

図１． 2-同型なグラフ間の変形

さて，図１のどの変形に対しても，２つのグラフの対応した辺の集合を除去したときの連結成分の個数は等しい．この事実と命題１の(i)を合わせれば，$f(G)$ は同型性の不変量というよりも，2-同型性の不変量になることがわかる．

命題３． 2-同型なグラフは $f(G)$ として同じ多項式を持つ．

$f(G)$ の計算が面倒なこともあって，今のところ，上の逆の命題に対する反例は発見されていない．そこで，次の予想を提起する．

《予想》 ２つのグラフ G_1，G_2 に対して，$f(G_1) = f(G_2)$ であるための必要十分条件はそれらが 2-同型になることであろう．

これを証明する手立てとしては，定理２に訴えるのが賢明だろう．（勿論，これが正しいとしての話だが．）サイクルの議論はマトロイド的なので，双対性により，定理２はサイクルとカットセットを入れ換えて，次のように読み直すこと

ができる．

定理４．　２つのグラフ G_1，G_2 の辺集合間の１対１対応

$$\theta : E(G_1) \to E(G_2)$$

で両者のカットセット間の１対１対応を誘導するものが存在するならば，G_1 と G_2 は 2-同型である．更に，それらが 3-連結ならば，θ はそれらの間の同型写像を誘導する．

もし $f(G_1) = f(G_2)$ ならば，辺集合でそれを除去したときの連結成分の個数が等しくなるものの数が同じになるから，辺集合の冪集合間の１対１対応

$$\Theta : 2^{E(G_1)} \to 2^{E(G_2)}$$

で $G_1 - A$ と $G_2 - \Theta(A)$ の連結成分の個数が等しくなるものが存在する．この Θ を修正して $A \subset B$ のとき $\Theta(A) \subset \Theta(B)$ となるようにできれば，Θ は辺集合間の１対１写像 $\theta : E(G_1) \to E(G_2)$ によって実現される．即ち，

$$A = \{e_1, \ldots, e_n\} \Rightarrow \Theta(A) = \{\theta(e_1), \ldots, \theta(e_n)\}.$$

ところで，グラフ G のカットセットとは，G の辺集合 A で，$\omega(G - A) = 2$ となり，任意の辺 $e \in A$ に対して $\omega(G - (A - \{e\})) = 1$ となるものであった．（ただし，$\omega(G)$ は G の連結成分の個数を表している．） したがって，上のように θ が構成できれば，定理４により G_1 と G_2 は 2-同型になる．が，Θ をどうやって修正したらよいのかわからないのが現状である．

ひとつ注意しておくが，上の《予想》の対象を 3-連結グラフに制限してしまうと，$f(G)$ が等しいグラフは同型だろうという予想になってしまう．これでは少し虫が良すぎる感じがする．

３． 分解公式

ところで，グラフのうまい不変量を探そうという立場にたてば，この f(G) に固執する必要はない．初期値，即ち，$f(\overline{K_n})$ の値をいろいろ変えて，上の予想が成り立つように多項式自身を変更してしまっても良いだろう．実は，当初 $f(\overline{K_n}) = n$ として２変数の f(G) を定義していたのだが，下で示すような分解公式が成立しないので，現在のように３変数にしたのである．ちなみに，旧式の f(G) を f'(G) とすると，f'(G) は現在の f(G) を t で微分した後 t=1 を代入したものと同じである．

$$f'(G) = \left.\frac{df(G)}{dt}\right|_{t=1}$$

命題５．(i) $G = H_1 \cup H_2$, $H_1 \cap H_2 = \phi$ のとき，$f(G) = f(H_1)f(H_2)$.
(ii) $G = H_1 \cup H_2$, $H_1 \cap H_2 = K_1$ のとき，$f(G) = f(H_1)f(H_2)/t$.

これらは，f(G) の係数の意味を考えてもわかるが，定義に従って帰納的に示すことができる．G が辺を持たないときは頂点数だけ数えれば f(G) が求まるので，上の公式は明らかに成立する． G が辺 e を持つとき，$e \in E(H_1)$ と仮定して，(ii) の場合は

$$\begin{aligned} f(G) &= x\, f(G/e) + y\, f(G-e) \\ &= x\, f(H_1/e)f(H_2)/t + x\, f(H_1-e)f(H_2)/t \\ &= (x\, f(H_1/e) + y\, f(H_1-e))f(H_2)/t \\ &= f(H_1)f(H_2)/t \end{aligned}$$

となる．

２つのグラフ H_1, H_2 をどこで付けるかという曖昧さはあるが，(ii) のような分解を持つとき $G = H_1 \cdot H_2$ と書き， H_1 と H_2 の**一点連結** (one-point join) と呼ぶ．上の公式から $f(H_1 \cdot H_2)$ は H_1 と H_2 だけで決まるから f(G) は同じだ

が異なるグラフが構成できることになる．しかし，一点連結の曖昧さは 2-同型の範囲に納まっているので，《予想》の反例にはならない．

便宜的に空グラフ ϕ に対して $f(\phi)=1$ と定めると，上の公式はどちらも

$$f(H_1 \cup H_2) = f(H_1)f(H_2)/f(H_1 \cap H_2)$$

という形をしている． 一般に，このような公式が成立してくれるとありがたいが，残念ながら次の命題が示すように，殆どの場合不可能である．

命題6． グラフ K に対して，

$$G = H_1 \cup H_2,\ H_1 \cap H_2 = K \ \Rightarrow\ f(G) = f(H_1)f(H_2)/f(K)$$

が成立するならば，K は高々１つしか頂点を持たない．

<u>証明</u>．K が異なる２頂点 u,v を持つと仮定する．K外の２頂点 x,y を u,v と結んで得られるグラフを G とする．

$$\begin{aligned} f(G) &= x\, f(G/ux) + y\, f(G\text{-}ux) \\ &= x(x\, f((G/ux)/uy) + y\, f((G/ux)\text{-}uy)) \\ &\qquad + y(x\, f((G\text{-}ux)/uy) + y\, f((G\text{-}ux)\text{-}uy)) \end{aligned}$$

ここで，K に u,v を結ぶ辺を１本，または２本加えたものをそれぞれ $K+e$，$K+2e$ と置くと，

$$\begin{aligned} (G/ux)/uy &\cong K + 2e \\ (G/ux)\text{-}uy &\cong (G\text{-}ux)/uy \cong (K+e)\cdot K_2 \\ (G\text{-}ux)\text{-}uy &\cong K\cdot K_2\cdot K_2. \end{aligned}$$

したがって，

$$f(G) = x^2 f(K + 2e) + 2xy\ f(K + e)f(K_2)/t + y^2 f(K)f(K_2)^2/t^2$$

となる．一方，次の２式も容易に示される．

$$f(K + e) = x\ f((K + e)/e) + y\ f(K),$$
$$\begin{aligned} f(K + 2e) &= x\ f((K + e)/e)f(\mathcal{O})/t + y\ f(K + e) \\ &= x(x + y)f((K + e)/e) + y(x\ f((K + e)/e) + y\ f(K)) \\ &= (x(x + y) + yx)f((K + e)/e) + y^2 f(K). \end{aligned}$$

今，G は２つの同型な部分グラフ $H_1 = \langle K \cup \{x\}\rangle$，$H_2 = \langle K \cup \{y\}\rangle$ に分解され，$H_1 \cap H_2 = K$ となっている．仮定により，$f(G)f(K) = f(H_1)f(H_2)$ が成立しなければならない．

$$\begin{aligned} f(H_1) &= x\ f(H_1/ux) + y\ f(H_1\text{-}ux) \\ &= x\ f(K + e) + y\ f(K)f(K_2)/t \\ &= x\ f(K + e) + y(x+ty)f(K)\ (= f(H_2)) \end{aligned}$$

これらを $f(G)f(K) = f(H_1)^2$ に代入すると

$$\begin{aligned} &\{x^2 f(K + 2e) + 2xy(x+ty)f(K + e) + y^2(x+ty)^2 f(K)\}f(K) \\ &\quad = x^2 f(K + e)^2 + 2xy(x+ty)f(K + e)f(K) + y^2(x+ty)^2 f(K)^2. \end{aligned}$$

$$\therefore\quad f(K + e)^2 = f(K + 2e)f(K).$$
$$\{x\ f((K + e)/e) + y\ f(K)\}^2 = \{x(x+2y)f((K + e)/e) + y^2 f(K)\}f(K)$$

最終的には，$f((K + e)/e) = f(K)$ を得る．ところが，$(K + e)/e$ と K の辺数 $(= q)$は同じだが，頂点数が違う．頂点数は y^q の 係数 t^p の羃 p に等しい．したがって，両者の多項式が等しくなる筈がない．この矛盾の原因は K が２つ以上頂点を持っているとしたところにある．■

4．グラフの展開

命題６が示すように，グラフ G が２頂点で接する２つグラフ H_1，H_2 に分解するときも $f(G)$ は H_1 と H_2 のみで決まるが，一般には簡明な分解公式は成立しない．ただし，H_1 と H_2 の接点を変えてしまうと 2-同型の範疇からはみ出してしまうので，$f(G)$ が変わることがある．３頂点以上で接する部分グラフに分解するときは，更に状況が複雑になる．ここでは，$f(G)$ を計算する手順に従がって自然にできあがる２進木の構造を解析しながら，その事情を考察する．

文字 x,y の有限の並びを(x,y の)**語**(word)と言う．ただし，空語は ϕ で表すことにする．語の集合 W が次の条件 (i),(ii),(iii) を満たすとき， W は**木状**(tree-like)であると言う．

(i) $\phi \in W$

(ii) $\omega x \in W \Rightarrow \omega, \omega y \in W$

(iii) $\omega x \in W \Rightarrow \omega, \omega y \in W$

語 $\omega \in W$，$\omega x \notin W$ のとき ω を W の**端点**と呼び，W の端点全体の集合を $\Omega(W)$ と記すことにする．

グラフ G，木状集合 W に対して，グラフの族

$$\mathcal{R}(G;W) = \{G(\omega) : \omega \in W\}$$

が次の条件 (i),(ii) を満たすとき， $\mathcal{R}(G;W)$ を G の（W に沿った）**展開**(resolution)と呼ぶ．

(i) $G(\phi) = G$.

(ii) ωx, $\omega y \in W$ のとき，$G(\omega)$ のある辺 e に対して，

$$G(\omega x) = G(\omega)/e, \quad G(\omega y) = G(\omega) - e.$$

特に，W が長さ n 以下の語全体からなるとき $\mathcal{R}(G;W)$ を G の**長さ n の展開**と呼び，n が G の辺数と一致するとき $\mathcal{R}(G;W)$ を G の**全展開**と呼ぶ．また，全展開でない展開は**部分展開**と言う．（resolution を直訳すれば「分解」になるが，どちらかというと「展開」のイメージに近いので，このようにした．）

語 ω において x,y の順番を無視したものを [ω] と書くのとにする．例えば，$[xxyxyx] = [xyyxxx] = x^4y^2$ となる．次の公式は明らかだろう．

命題7． グラフ G の展開 $\mathcal{R}(G;W)$ に対して

$$f(G) = \sum_{\omega \in \Omega(\omega)} [\omega]\, f(G(\omega)).$$

今度は G が n 個の頂点 $U = \{u_1,\cdots,u_n\}$ だけで接している２つ部分グラフ K，H に分解しているときの G の展開を考える．

$$G = K \cup H, \quad U = K \cap H = V(K) \cap V(H).$$

U のサイズ $k\ (= |\mathcal{U}|)$ の分割 $\mathcal{U} = \{U_1,\cdots,U_k\}$（即ち，$U = U_1 \cup \cdots \cup U_2$，$U_i \cap U_j = \phi\ (i \neq j)$，$U_i \neq \phi$）に対して，K から U_i ごとにそこに含まれる頂点を１つの頂点に同一視して得られるグラフを $K/\mathcal{U}$ と書くことにする．このとき，f(G)，f(H) は次のように展開される．

命題8． U の各分割 $\mathcal{U}$ に対して，変数 t,x,y を持つ非負整係数多項式 $A(\mathcal{U})$ が存在して，

$$\text{(i)}\quad f(H) = \sum_{\mathcal{U}} A(\mathcal{U})\, t^{|\mathcal{U}|}, \qquad \text{(ii)}\quad f(G) = \sum_{\mathcal{U}} A(\mathcal{U})\, f(K/\mathcal{U}).$$

<u>証明</u>．H の全展開 $\mathcal{R}(H;W) = \{H(\omega) : \omega \in W\}$ を考える．端点 $\omega \in \Omega(W)$ に対して，$H(\omega)$ はいくつかの孤立点だけからなっているので，その個数を p とすると $f(H(\omega)) = t^p$ となっている．U の分割 $\mathcal{U} = \{U_1,\cdots,U_k\}$ に対して，端点 ω

のうち，$H(\omega)$内では U の頂点が U_i ごとに１つの頂点になっているものについて $f(H(\omega))/t^k$ を足し合わせたものを $A(\mathcal{U})$ と置く．すると（i）は明らかに成り立つ．

そこで，G の長さ n の部分展開 $\mathcal{R}(G;W) = \{G(\omega) : \omega \in W\}$（$n = H$ の辺数）を $\mathcal{R}(H;W)$ と平行に考える．各 $G(\omega)$ は $H(\omega)$ に K を追加した形になっている．ただし，K の U 内の頂点に関しては適当に同一視がされている．特に，端点 $\omega \in \Omega(W)$ については，ある U の分割 $\mathcal{U}$ に対して $G(\omega) = H(\omega) \cup K/\mathcal{U}$ は $\mathcal{U}$ に対応した $H(\omega)$ の k 個の頂点を $K/\mathcal{U}$ で置き換えたものになっている．これから，（ii）が成立することがわかるだろう．■

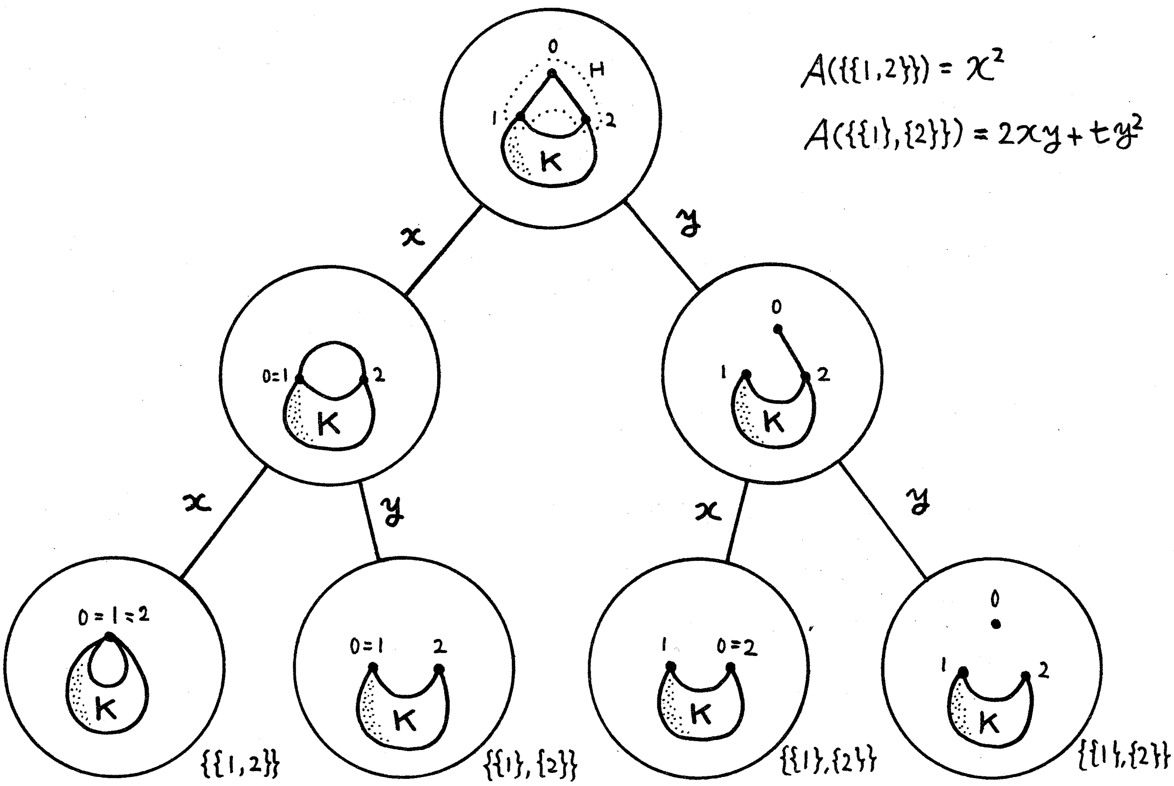

図２．グラフ $G = K \cup H$ の部分展開

さて，K と H の貼り合わせを変えたらどうなるだろうか．そこで，新しいグラフ G’が次のように分解していると仮定する．

(i) $G' = K \cup H'$, $U = K \cap H' = V(K) \cap V(H')$.

(ii) 同型写像 $\sigma : H \to H'$ で $\sigma(U) = U$ となるものが存在する.

つまり, G' は K を止めたままで, 接合部を変えずに, H を σ でずらして付け直したものである.

分割 $\mathcal{U} = \{U_1, \cdots, U_k\}$ に対して, $\sigma(\mathcal{U}) = \{\sigma(U_1), \cdots, \sigma(U_k)\}$ と定義すると,

命題9. U の任意の分割 $\mathcal{U}$ に対して $f(K/\mathcal{U}) = f(K/\sigma(\mathcal{U}))$ ならば, $f(G)$ と $f(G')$ は等しい.

<u>証明</u>. 同型写像 $\sigma : H \to H'$ を経由して $\mathcal{R}(G;W)$ をなぞって G' の長さ n の部分展開 $\mathcal{R}(G';W) = \{G'(\omega) : \omega \in W\}$ を構成すると, 各端点 $\omega \in \Omega(W)$ では $G'(\omega) = H(\omega) \cup K/\sigma(\mathcal{U})$ となっているから, $f(G')$ は

$$f(G') = \sum_{\mathcal{U}} A(\mathcal{U})\, f(K/\sigma(\mathcal{U})).$$

と表される. したがって,

$$f(G) - f(G') = \sum_{\mathcal{U}} A(\mathcal{U})(f(K/\mathcal{U}) - f(K/\sigma(\mathcal{U}))).$$

これから結論を得る. ■

$U = \{u_1, u_2\}$ のときは分割は $\{\{u_1, u_2\}\}$ と $\{\{u_1\},\{u_2\}\}$ の2つしかない. どちらの分割 $\mathcal{U}$ に対しても $\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ となっているので, 上の命題により, このときはいつでも $f(G) = f(G')$ である. H を u_1 を含むグラフ L と孤立点 u_2 からなると考えると, G から G' への変形は K と H の接触点を u_1 から u_2 に変えることに対応する. 更に, K も u_2 を孤立点として含んでいれば, その変形は G から L の部分を切り放して孤立点 u_2 を除去するのと同じことである. したがって, この場合は 2-同型の変形が $f(G)$ を変えないという事実に対応している.

命題10.　K，H が２つの頂点 $U = \{u_1, u_2\}$ で接しているとき，

$$f(G) = \{(t\, f(H/\{U\}) - f(H))f(K/\{U\}) + (f(H) - f(H/\{U\}))f(K)\}/t(t-1).$$

<u>証明</u>．H と $H/\{U\}$ の全展開の端点の差を考えれば，命題８の(i)により，$f(H)$ と $f(H/\{U\})$ は次のように展開することがわかる．

$$f(H) = A(\{\{u_1\},\{u_2\}\})t^2 + A(\{U\})t, \quad f(H/\{U\}) = A(\{\{u_1\},\{u_2\}\})t + A(\{U\})t.$$

これらを $A(\{\{u_1\},\{u_2\}\})$，$A(\{U\})$ について解いて，命題８の(ii)に代入すれば目的の式が得られる．■

今度は $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ とし，以下のように分割に名前を付けておく．

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_0 &= \{\{u_1, u_2, u_3\}\} \\
\mathcal{U}_1 &= \{\{u_1\}, \{u_2, u_3\}\} \\
\mathcal{U}_2 &= \{\{u_2\}, \{u_1, u_3\}\} \\
\mathcal{U}_3 &= \{\{u_3\}, \{u_1, u_2\}\} \\
\mathcal{U}_4 &= \{\{u_1\}, \{u_2\}, \{u_3\}\}
\end{aligned}$$

命題11.　$U = \{u_1, u_2, u_3\}$，$\sigma(u_3) = u_3$ ならば

$$f(G) - f(G') = (f(H/\mathcal{U}_1) - f(H/\mathcal{U}_2))(f(K/\mathcal{U}_1) - f(K/\mathcal{U}_2))/t(t-1).$$

<u>証明</u>．$\sigma(\mathcal{U}_1) = \mathcal{U}_2$，$\sigma(\mathcal{U}_2) = \mathcal{U}_1$，$\sigma(\mathcal{U}_i) = \mathcal{U}_i$ $(i \neq 1,2)$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}
f(G) - f(G') &= A(\mathcal{U}_1)(f(K/\mathcal{U}_1) - f(K/\sigma(\mathcal{U}_1)) \\
&\qquad + A(\mathcal{U}_2)(f(K/\mathcal{U}_2) - f(K/\sigma(\mathcal{U}_2)) \\
&= (A(\mathcal{U}_1) - A(\mathcal{U}_2))(f(K/\mathcal{U}_1) - f(K/\mathcal{U}_2)).
\end{aligned}$$

ここで，全展開を比較しながら，$f(H)$，$f(H/\mathcal{U}_1)$，$f(H/\mathcal{U}_2)$ を求めると，

$$f(H) = A(\mathcal{U}_0)t + A(\mathcal{U}_1)t^2 + A(\mathcal{U}_2)t^2 + A(\mathcal{U}_3)t^2 + A(\mathcal{U}_4)t^3$$
$$f(H/\mathcal{U}_1) = A(\mathcal{U}_0)t + A(\mathcal{U}_1)t^2 + A(\mathcal{U}_2)t + A(\mathcal{U}_3)t + A(\mathcal{U}_4)t^2$$
$$f(H/\mathcal{U}_2) = A(\mathcal{U}_0)t + A(\mathcal{U}_1)t + A(\mathcal{U}_2)t^2 + A(\mathcal{U}_3)t + A(\mathcal{U}_4)t^2.$$

$$\therefore \quad f(H/\mathcal{U}_1) - f(H/\mathcal{U}_2) = (A(\mathcal{U}_1) - A(\mathcal{U}_2))(t^2 - t).$$

これを最初の式に代入すれば，目的の式がえられる．■

H を u_1, u_3 を含む部分グラフ L と孤立点 u_2 からなるグラフ，H’を u_2，u_3 を含む L と同型な部分グラフと孤立点 u_1 からなるグラフとすると，G から G’への変形は K と L の接続部の２頂点の一方 u_1 を u_2 に変更することと同じである．$H/\mathcal{U}_1$ は L と同型であるが，$H/\mathcal{U}_2$ は $L/\{\{u_1, u_3\}\}$ と孤立点 u_2 からなる非連結グラフである．グラフの連結成分の個数は $f(G)$ の x^q (q = 辺数)の係数 t^r の羃 r に等しいので，$f(H/\mathcal{U}_1) \neq f(H/\mathcal{U}_2)$ である．したがって，$f(G) = f(G')$ となるための必要十分条件は $f(K/\mathcal{U}_1) = f(K/\mathcal{U}_2)$ である．これから，２頂点で接触している部分グラフに分解するグラフ G の $f(G)$ は接触の場所を変えてしまうと，つまり，2-同型でない変形をしてしまうと変化する場合があることがわかる．

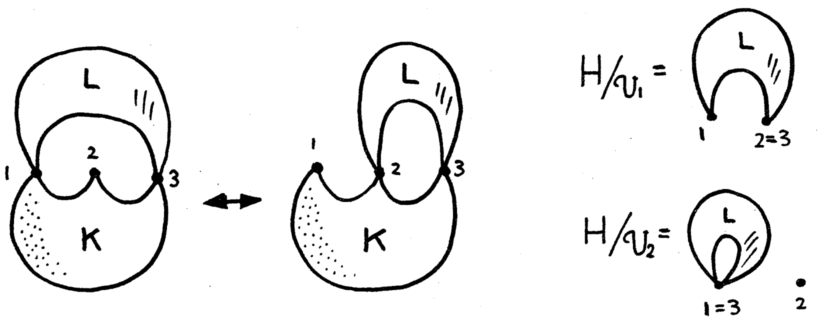

図３．　2-同型でない変形

一般に K と H が n 頂点で接触しているときも，命題10 と 11 の証明に習って，$A(\mathcal{U})$ を $f(H/\mathcal{U})$ で表せば，$f(G)$ は $f(H/\mathcal{U})$ と $f(K/\mathcal{U})$ だけで書き下すことができる．したがって，$f(G)$ は K と H とそれらがどこで接触しているかにのみ依存して決まることになる．

そこで，《予想》の反例を構成しようと試みるならば，次のようなグラフを発見すればよいだろう．

問題． 3頂点 $u_1, u_2, u_3 \in V(K)$ に対して，$f(K/\{u_1, u_3\}) = f(K/\{u_2, u_3\})$ だが，$\sigma(u_1) = u_2$，$\sigma(u_2) = u_1$，$\sigma(u_3) = u_3$ となる自己同型写像を持たないグラフ K が存在するか？ ただし，$K/\{u_i, u_j\}$ は K から u_i と u_j を同一視して得られるグラフを表している．