数理解析研究所講究録
第 567 巻 1985 年 29-38

Transfer と Steenrod 作用素の非可換性

京大理　亀子正喜 (Masaki Kameko)

1. G を離散群，X を正則 G 複体とする。X の軌道空間 X/G には，軌道写像から誘導される単体構造を与えて単体複体とおもうこととする。H を G の部分群としよう。軌道空間 X/H, X/G の間には自然な射影 $\pi^G_H : X/H \to X/G$ があり，これは単体写像になる。

X の R 係数の単体コチェイン複体を $C^*(X)$，単体コホモロジー群を $H^*(X)$ とかく。G の X への単体的作用は G の $C^*(X)$ への作用を誘導し，$C^*(X/H)$, $C^*(X/G)$ は軌道写像から誘導されるコチェイン複体の同型により $C^*(X)^H$, $C^*(X)^G$ と同一視される。

$|G:H|<+\infty$ のとき，$u\in C^*(X)^H$ に対し $\sum_{g\in G/H} g\cdot u \in C^*(X)^G$ を対応させることにより $(\pi^G_H)^* : H^*(X/G) \to H^*(X/H)$ に随伴した transfer $tr^G_H : H^*(X/H) \to H^*(X/G)$ が定義される。

一方，$R=\mathbb{Z}/p$, p は素数のとき，$H^*(-)$ には Steenrod 作用素が定義されるが，Evens は $\pi^G_H : X/H \to X/G$ が covering のとき transfer と Steenrod 作用素が可換であることを示した。しかしながら，一般の場合 transfer と Steenrod 作

用素は可換ではなく，Kubelka は [1] で $G=\mathbb{Z}/2$，$R=\mathbb{Z}/2$，$H=e$（ここで e は単位元のみからなる群）のときに X の不動点のまわりの主 G 束の特性類を用いてこの非可換性を記述した。

ここでは $G=\mathbb{Z}/p$，$R=\mathbb{Z}/p$，$H=e$，p は素数のときに，非可換性についての式を示し，一般の場合をこの場合に帰着させる式を示す。

2． $G=\mathbb{Z}/p$，$R=\mathbb{Z}/p$，p は素数とする。G の不動点集合を F とおく。X のてきとうな細分をとることにより，次の (1)，(2) をみたす G 不変部分複体 $D\subset X$ が存在する。

(1) $\mathrm{Int}\,D\supset F$

(2) F は D の G 変位レトラクト。

$Y=X-\mathrm{Int}\,D$，$B=D-\mathrm{Int}\,D$ とおく。$Y\to Y/G$，$B\to B/G$ は主 G 束となるので，G の分類空間の1次元コホモロジー群の生成元から誘導される特性類を α'，α　これらの mod p Bockstein 準同型による像を β'，β とおく。

$d: H^*(B/G)\to H^{*+1}(X/G)$ を $(X/G\,;\,Y/G,\,D/G)$ に随伴した Mayer-Vietoris 完全列の連結準同型，$\varphi: H^*(X)\to H^*(B/G)$ を射入と軌道写像から誘導された次の準同型の合成と定義する。$\varphi: H^*(X)\to H^*(F)\xleftarrow{\cong} H^*(F/G)\xleftarrow{\cong} H^*(D/G)\to H^*(B/G)$。

このとき 平方作用素 Sq^i，被約べキ $\mathcal{P}^i$ に関して次の定理が成り立つ。

定理A.

(1) $G=\mathbb{Z}/2$，$R=\mathbb{Z}/2$ のとき $x\in H^*(X)$ に対して

$$(tr_e^G\circ Sq^i+Sq^i\circ tr_e^G)(x)=d\Big(\sum_{j=1}^{i}\alpha^{j-1}\cdot Sq^{i-j}\circ\varphi(x)\Big),$$

(2) $G=\mathbb{Z}/p$，$R=\mathbb{Z}/p$，p は奇素数のとき $x\in H^*(X)$ に対して

$$(tr_e^G\circ\mathcal{P}^i-\mathcal{P}^i\circ tr_e^G)(x)=d\Big(\sum_{j=1}^{i}(-1)^j\alpha\beta^{j(p-1)-1}\cdot\mathcal{P}^{i-j}\circ\varphi(x)\Big)$$

が成り立つ。

(1)は Kubelka の結果であり，(2)と同様の議論により証明される。

注意：$\alpha\beta^{j(p-1)-1}$ は $H^1(BG)$ の生成元のとり方によらない。

3．定理A.の(2)を証明するために[2]の結果をいくつか引用する。$G=\mathbb{Z}/p$，$R=\mathbb{Z}/p$，p は奇素数とする。G の生成元を1つ固定し，それを g とかくことにする。A を X の G 不変部分複体とするとき，

$\sigma: C^*(X,A)\to C^*(X,A)$，$\tau: C^*(X,A)\to C^*(X,A)$ を各々 $\sigma(u)=u+g\cdot u+\cdots+g^{p-1}\cdot u$，$\tau(u)=u-g\cdot u$ $(u\in C^*(X,A))$ と定義する。

補題1.（[2]; (1.2)）

$A \supset F$ のとき $\mathrm{Im}\,\sigma = \mathrm{Ker}\,\tau = C^*(X, A)^G$, $\mathrm{Im}\,\tau = \mathrm{Ker}\,\sigma$ が成り立つ。

このことを用いて，コチェイン複体の短完全列

$0 \to \mathrm{Ker}\,\sigma \to C^*(X, A) \to \mathrm{Im}\,\sigma \to 0$

$0 \to \mathrm{Ker}\,\tau \to C^*(X, A) \to \mathrm{Im}\,\tau \to 0$ に随伴したコホモロジー長完全列の連結準同型を δ_σ, δ_τ とかき，$A \supset F$ のとき

$\mu : H^*(X/G, A/G) \to H^{*+2}(X/G, A/G)$,

$\nu : H^*(X/G, A/G) \to H^{*+1}(X/G, A/G)$ を $\mu = \delta_\tau \circ \delta_\sigma$, $\nu = (\tau^{p-2})_* \circ \delta_\sigma$ と定義することができる。

また，$\phi_0^* : H^*(X) \to H^*(X/G, F/G)$ があって tr_e^G が $H^*(X) \xrightarrow{\phi_0^*} H^*(X/G, F/G) \xrightarrow{j^*} H^*(X/G)$ とかけることは tr_e^G の定義からすぐわかる。ここで j^* は射入から誘導された準同型である。

上の μ, ν, ϕ_0^* と被約べき $\mathcal{P}^i$ の間には次の関係がある。

<u>補題2.</u> ([2]; (4.1), (4.2))

XへのGの作用が自由のとき，$x \in H^*(X/G, A/G)$ に対し $\mu(x) = \mu(1) \cdot x$, $\nu(x) = \nu(1) \cdot x$ が成り立つ。ここで 1 はコホモロジー環 $H^*(X/G)$ の単位元である。

さらに $\mu(1)$ は $\nu(1)$ の mod p Bockstein 準同型による像である。

<u>注意</u>：$\nu(1)$, $\mu(1) \in H^*(BG)$ は 0 ではない。これは

定義から直接計算すればすぐわかる。

補題3. ([2]; (2.19))

$\mu\circ\phi_0^* = -\nu\circ\delta\circ((\pi|_F)^*)^{-1}\circ i^*$ ここで i は F の X への射入, $\pi|_F$ は軌道写像の F への制限, δ は $(X/G, F/G)$ に随伴したコホモロジー長完全列の連結準同型である。

補題4. ([2]; (3.12))

$\phi_0^*\circ\beta^i - \beta^i\circ\phi_0^* = \mu^{p-1}\circ\beta^{i-1}\circ\phi_0^*$ ここで $\mu^{p-1} = \underbrace{\mu\circ\cdots\circ\mu}_{(p-1)コ}$。

(定理A. の(2)の証明) β^i の自然性と補題の3, 4より

$t_e^G\circ\beta^i - \beta^i\circ t_e^G$

$= j^*\circ(\phi_0^*\circ\beta^i - \beta^i\circ\phi_0^*)$

$= j^*\circ(\sum_{j=1}^{i}(-1)^j\mu^{j(p-1)}\circ\phi_0^*\circ\beta^{i-j})$

$= j^*\circ(\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}\mu^{j(p-1)-1}\circ\nu\circ\delta\circ((\pi|_F)^*)^{-1}\circ i^*\circ\beta^{i-j})$

射入から誘導される次の同型の合成 $H^*(Y/G, B/G)\xleftarrow{\cong}H^*(X/G, D/G)\xrightarrow{\cong}H^*(X/G, F/G)$ を ψ, $(Y/G, B/G)$ のコホモロジー長完全列の連結準同型を δ' とかくと, μ, ν の自然性から

$\mu^{j(p-1)-1}\circ\nu\circ\delta\circ((\pi|_F)^*)^{-1}\circ i^* = \psi\circ\mu^{j(p-1)-1}\circ\nu\circ\delta'\circ\varphi$

となり 補題2 とその注意から $x\in H^*(X)$ に対し

$(t_e^G\circ\beta^i - \beta^i\circ t_e^G)(x)$

$= j^*\circ\psi(\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}\alpha'\cdot\beta^{j(p-1)-1}\cdot\delta'\circ\varphi\circ\beta^{i-j}(x))$

$= j^*\circ\psi\circ\delta'(\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j}\alpha\beta^{j(p-1)-1}\cdot\varphi\circ\beta^{i-j}(x))$

となり，dの定義とρ^iの自然性から定理Aの(2)がいえる。

4. $R=\mathbb{Z}/p$，pは素数とする。$|G:H|=r<+\infty$ のとき G/H の完全代表系$\{g_1,\cdots,g_r\}$を1つ固定する。$g_{\rho(g)(i)}H=gg_iH$ となるように $\rho:G\to\Sigma_r$ を定めるとこれは群の準同型になる。ここで$g\in G$，Σ_r は $\{1,\cdots,r\}$ 上の対称群である。

$M=\{(a,i)\in \mathrm{Im}\,\rho\times\{1,\cdots,r\}\ ;\ a(i)\neq i\ ,\ a^p(i)=i\}$

とおく。$(a,i)\sim(a^k,i)$ $(k\not\equiv 0 \bmod p)$ でMに同値関係をいれ，(a,i)の同値類を$\langle a,i\rangle$，$M/\sim$ を N とかく。

$H_{\langle a,i\rangle}=g_iHg_i^{-1}\cap g_{a(i)}Hg_{a(i)}^{-1}\cap\cdots\cap g_{a^{p-1}(i)}Hg_{a^{p-1}(i)}^{-1}$,

$K_{\langle a,i\rangle}$ を $\rho^{-1}(a)$ と $H_{\langle a,i\rangle}$ から生成されるGの部分群とする。

補題5.

$H_{\langle a,i\rangle}$ は $K_{\langle a,i\rangle}$ の指数pの正規部分群である。

(証明) $g\in\rho^{-1}(a)$ とする。$gg_{a^k(i)}H=g_{a^{k+1}(i)}H$ なので $Hg_{a^k(i)}^{-1}g^{-1}=Hg_{a^{k+1}(i)}^{-1}$ で $gg_{a^k(i)}Hg_{a^k(i)}^{-1}g^{-1}=g_{a^{k+1}(i)}Hg_{a^{k+1}(i)}^{-1}$ よって $gH_{\langle a,i\rangle}g^{-1}=H_{\langle a,i\rangle}$ となり正規部分群であることがいえた。さらに $g^kH_{\langle a,i\rangle}=g^lH_{\langle a,i\rangle}$ $(k\not\equiv l\ (\mathrm{mod}\ p))$ ならば $g\in H_{\langle a,i\rangle}<g_iHg_i^{-1}$ で $gg_iH=g_iH$ となり $\rho(g)(i)\neq i$ に矛盾するから $|K_{\langle a,i\rangle}:H_{\langle a,i\rangle}|\geq p$ その上 $\rho^{-1}(a)=g\cdot(g_1Hg_1^{-1}\cap\cdots\cap g_rHg_r^{-1})$ なので $|K_{\langle a,i\rangle}:H_{\langle a,i\rangle}|=p$

がいえる。

この補題5により $X/H_{\langle a,i\rangle}$ は自然に正則 $\mathbb{Z}/p$ 複体となり、$tr^{K_{\langle a,i\rangle}}_{H_{\langle a,i\rangle}}$ は $tr^{\mathbb{Z}/p}_{e}$ とおもえる。したがって

$$C^G_H = \begin{cases} tr^G_H \circ Sq^i + Sq^i \circ tr^G_H & (p=2) \\ tr^G_H \circ P^i - P^i \circ tr^G_H & (p>2) \end{cases}$$

とおくとき、これを $C^{K_n}_{H_n}$ $(n \in N)$ を用いて表わせばよい。

定理B.

$$C^G_H = \sum_{n=\langle a,i\rangle \in N} tr^G_{K_n} \circ C^{K_n}_{H_n} \circ (\pi^{g_iHg_i^{-1}}_{H_n})^* \circ (ad\, g_i)^*$$

が成り立つ。ここで $ad\, g_i$ は $X \xrightarrow[g_i]{} X$ から誘導される単体複体の同型 $X/g_iHg_i^{-1} \to X/H$ である。

5.（定理Bの証明）$\mathbb{Z}/p$ の生成元を ξ とかき、G, $\mathbb{Z}/p$ の $\overset{p}{\otimes} C^*(X)$ への作用を $u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \in \overset{p}{\otimes} C^*(X)$ に対し

$$g \cdot (u_1 \otimes \cdots \otimes u_p) = (g \cdot u_1) \otimes \cdots \otimes (g \cdot u_p)$$

$$\xi \cdot (u_1 \otimes \cdots \otimes u_p) = (-1)^{|u_1||u_2 \otimes \cdots \otimes u_p|} u_2 \otimes \cdots \otimes u_p \otimes u_1$$

と定義する。さて Steenrod 作用素の定義をおもいだそう。u を $C^*(X)^G$ のコサイクルとするとき、$[u]_G$ で u の表わす $C^*(X)^G$ のコホモロジー類を表わす。このとき単体写像に関して自然な次数付ベクトル空間の準同型 $D_A : \overset{p}{\otimes} C^*(X) \to C^*(X)$ があって $Sq^i([u]_G) = [D_{|u|-i}(u \otimes u)]_G$ $(p=2)$, $P^i([u]_G) = [\nu_{|u|,i,p}\, D_{(|u|-2i)(p-1)}(u \otimes \cdots \otimes u)]_G$ $(p>2)$ と定義される

のはよく知られている。ここで $\nu_{|u|,i,p}=(-1)^{\frac{p-1}{2}\left(i+\frac{|u|(|u|-1)}{2}\right)}\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^{2i-|u|}$ である。

注意：Gの作用は単体写像から誘導されているので D_* と可換である。

補題6.

$v\in(\overset{p}{\otimes}C^*(X))^G$ がコサイクルのとき，$D_*(v+\xi\cdot v+\cdots+\xi^{p-1}\cdot v)$ は $C^*(X)^G$ のコバウンダリーである．

（証明）$G=e$ のときは [3] p.105 参照。$\delta(C^*(X)^G)=(\delta C^*(X))^G$ より一般のGについてもいえる．

Σ_r の $\{1,\cdots,r\}^p$ への対角的作用を考えて $\mathrm{Im}\,\rho\backslash\{1,\cdots,r\}^p$ を考える。ここへの $\mathbb{Z}/p$ の作用は $\xi\cdot(i_1,\cdots,i_p)=(i_2,\cdots,i_p,i_1)$ より誘導されるものとする。$u\in C^*(X)^H$ に対し，$\eta_u:\mathrm{Im}\,\rho\backslash\{1,\cdots,r\}^p\longrightarrow(\overset{p}{\otimes}C^*(X))^G$ を $(i_1,\cdots,i_p)$ で表わされる元に対し，$\sum_{g\in G/G(i_1,\cdots,i_p)}g\cdot(g_{i_1}u\otimes\cdots\otimes g_{i_p}u)$ を対応させる写像として定義する。ここで $G(i_1,\cdots,i_p)=\bigcap_{j=1}^{p}g_{i_j}Hg_{i_j}^{-1}$ である。

この η_u は well-defined かつ $\mathbb{Z}/p$ の作用と可換であることは，容易にたしかめられる。m_0 を $(i,\cdots,i)$ で表わされる $\mathrm{Im}\,\rho\backslash\{1,\cdots,r\}^p$ の元とすると，M と $(\mathrm{Im}\,\rho\backslash\{1,\cdots,r\}^p)^{\mathbb{Z}/p}-\{m_0\}$ は (a,i) に $(i,a(i),\cdots,a^{p-1}(i))$ の表わす元を対応させる写像により集合として同型になる。この写像と η_u の合成を $\tilde{\eta}_u:M\longrightarrow(\overset{p}{\otimes}C^*(X))^G$ とおく。

$u \in C^*(X)^H$をコサイクルとするとき，

(1) $\tilde{C}^G_H([u]_H) = [D_s((\Sigma_{i=1}^r g_i u)\otimes\cdots\otimes(\Sigma_{i=1}^r g_i u))]_G$
$- [\Sigma_{i=1}^r g_i D_s(u\otimes\cdots\otimes u)]_G$ とおく。

(2) $m(\ell) = (a^\ell, i) \in M$, $n = \langle a, i\rangle$, $g \in P^{-1}(a)$ とおけば $[D_s(\hat{\eta}_u(m(\ell)))]_G$
$= tr^G_{K_n}([D_s(\Sigma_{k=0}^{p-1} g^k(g_i u\otimes g^\ell g_i u\otimes\cdots\otimes g^{\ell(p-1)} g_i u))]_{K_n})$
で $\sum_{\langle m\rangle = n} [D_s(\hat{\eta}_u(m))]_G$
$= tr^G_{K_n}([D_s(\Sigma_{k=0}^{p-1}\Sigma_{\ell=1}^{p-1} g^k(g_i u\otimes g^\ell g_i u\otimes\cdots\otimes g^{\ell(p-1)} g_i u))]_{K_n})$,

(3) $g_i u \in C^*(X)^{g_i H g_i^{-1}} \subset C^*(X)^{H_n}$ で $\hat{C}^{K_n}_{H_n}([g_i u]_{H_n})$ を補題6を用いて計算すれば
$[D_s(\Sigma_{k=0}^{p-1}\Sigma_{\ell=1}^{p-1} g^k(g_i u\otimes\cdots\otimes g^{\ell(p-1)} g_i u))]_{K_n}$,

(4) $(ad\, g_i)^* : C^*(X)^H \longrightarrow C^*(X)^{g_i H g_i^{-1}}$ とおもえば $(ad\, g_i)^*(u) = g_i u$ である。

以上の(1)～(4)と補題6より

$$\begin{aligned}\hat{C}^G_H([u]_H) &= [\Sigma_{m\in M}\hat{\eta}_u(m)]_G \\ &= \Sigma_{n\in N} tr^G_{K_n}(\hat{C}^{K_n}_{H_n}([g_i u]_{H_n})) \\ &= \Sigma_{n\in N} tr^G_{K_n}\circ\hat{C}^{K_n}_{H_n}\circ(\pi^{g_i H g_i^{-1}}_{H_n})^*\circ(ad\, g_i)^*([u]_H)\end{aligned}$$

で $\hat{C}^G_H$ と C^G_H は定数倍をのぞいて同じなので定理Bがいえる。

文献

[1] R.P.Kubelka, A formula for deviation from commutativity: the transfer and Steenrod squares, Proc. Amer. Math. Soc. 85 (1982), pp.119-124.

[2] M.Nakaoka, Cohomology theory of a complex with a transformation of prime period and its applications, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A.7 (1956), pp.51-102.

[3] N.E.Steenrod-D.B.A.Epstein, "Cohomology Operations", Princeton Univ. Press (1962).