数理解析研究所講究録
第 567 巻 1985 年 59-72

Transfer theorem for SG at odd prime

広島大学理学部　南範彦 (Norihiko Minami)

§0. 主定理の statement 及びその周辺.

Kahn-Priddy theorem の有効性は、西田 nilpotency の proof 等により、今や専門家なら誰の目にも明らかであろう. この Kahn-Priddy theorem は、$Q_0S^0 (\subset \coprod_{i\in\mathbb{Z}} Q_iS^0 = QS^0)$ の infinite loop structure に関するものであった:

<u>Kahn-Priddy theorem ([KP2] 1972)</u>

任意の素数 p に対し、次の合成写像

$$QB\Sigma_p \xrightarrow{Q(B\text{-}K\text{-}P)} QQ_pS^0 \xrightarrow{Q(*[-p])} QQ_0S^0 \xrightarrow{Str.} Q_0S^0$$

は、p で局所化した時、右 homotopy 逆元を持つ. ここで、$B\text{-}K\text{-}P: B\Sigma_n \to Q_nS^0$ は、Barratt-Kahn-Priddy map ([KP1]), $*[-n]$ は $Q_{-n}S^0$ の基点 $[-n]$ との loop 積, str. は、Q_0S^0 の infinite loop structure による巻き戻し. (§.1 も参照して下さい.)

一方、$QS^0 (= \coprod_i Q_iS^0)$ には、Q_0S^0 よりも rich な情報

を含んでいると思われて来た(?)別の infinite loop space SG $(=Q_1S^0)$ が含まれているが、これに対し、Priddyは次のような、SGのinfinite loop structureに関するtransfer theoremを得た。

<u>Priddy の theorem ([P] 1977)</u>

$$QB\Sigma_2\int\Sigma_2 \to QB\Sigma_4 \xrightarrow{Q(B\text{-}K\text{-}P)} QQ_4S^0 \xrightarrow{Q(*[-3])} QSG \xrightarrow{Str.} SG$$

は、2で局所化した時、右ホモトピー逆元を持つ。ここで$Str.$は、SGのinfinite loop structureによる巻き戻し。

このことから次の☆が成り立つと予想することは、自然であろう。

☆ pを任意の奇素数とする時、次の合成写像

$$QB\Sigma_p\int\Sigma_p \to QB\Sigma_{p^2} \xrightarrow{Q(B\text{-}K\text{-}P)} QQ_{p^2}S^0 \xrightarrow{Q(*[1-p^2])} QSG \xrightarrow{Str.} SG$$

は、pで局所化した時、右homotopy逆元を持つか？ ここで$str.$はSGのinfinite loop structureによる巻き戻し。

実際、我々の主定理は、

<u>主定理</u> ☆は正しい。

今年が1985年であるから、Priddyの結果から意外と月日が経ったものである。☆に関して、J.P. MayがL.N.M. 741, p.633において「$H_*(SG)$のDyer-Lashof operationについての土屋の結果には、計算のgapがあるので、Priddyがやったようにhomologyの計算で☆を解くのは、更に一層の困難があるだろう。」と述べているが、我々はこの困難な(というより面倒くさい)計算の方法で解くのである。$p=2$の場合と比べてp:oddの場合は状況がより一層複雑になるので、土屋の結果をよりsharpにした結果が必要となる(§3を見て下さい)。土屋の結果に関しては、土屋先生に会って実際に窺った所、当時、土屋先生の頭の中には、確かに完全な証明が存在していたという事なので、以後、土屋の定理と呼ぶこととする。

§1. QS^0のtopology(復習)

QS^0は$\varinjlim_n \Omega^n S^n$として定義されたから、(sphereからsphereへの写像としての)degree i-componentをQ_iS^0と置けば $QS^0=\coprod_{i\in\mathbb{Z}} Q_iS^0$が成立する。一方、$QS^0$には標準的な積が2つ存在する:即ち loop product $*: QS^0\times QS^0\to QS^0$ と composition product $\circ: QS^0\times QS^0\to QS^0$ とである。各々は、

$*: Q_iS^0\times Q_jS^0\to Q_{i+j}S^0$, $\quad\circ: Q_iS^0\times Q_jS^0\to Q_{ij}S^0$.

を満たし、Q_0S^0, $SG(=Q_1S^0)$ は各々、$*$ と $\circ$ を積とするH空間となる。

ここで、有限群 G の Burnside ring $A(G)$ を思い起こそう。$A(G)$ は finite G-set の圏から構成した Grothendieck ring で、和は disjoint union により、そして積は Cartesian product により誘導された。$A(G)$ は Segal map を通して、QS^0 と関係を持つのである：S を finite G-set とすると、群の準同型 $G \to \Sigma_{|S|}$ が与えられるので、これと Barratt-Kahn-Priddy map を用いて、写像 $\alpha(S): BG \to B\Sigma_{|S|} \xrightarrow{B\text{-}K\text{-}P} Q_{|S|}S^0 \hookrightarrow QS^0$ を得る。この構成を $A(G)$ 全体に拡張した写像 $\alpha: A(G) \to [BG, QS^0]$ が Segal-map である。(α は同型写像 $\hat{\alpha}: \varprojlim_n A(G)/I(G)^n \to [BG, QS^0]$ を誘導するか？というのが Segal 予想であって、Carlsson 等により解かれたが、我々はこの結果は用いない。) 重要なのは、次の可換図式が存在することである：

(図 I)

$$\begin{tikzcd}
BG \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\alpha(S+T)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & BG \times BG \arrow[d, "\alpha(S)\times\alpha(T)"] \\
QS^0 & QS^0 \times QS^0 \arrow[l, "*"]
\end{tikzcd}$$

(図 II)

$$\begin{tikzcd}
BG \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\alpha(S\times T)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & BG \times BG \arrow[d, "\alpha(S)\times\alpha(T)"] \\
QS^0 & QS^0 \times QS^0 \arrow[l, "\circ"]
\end{tikzcd}$$

ここで、Δ は diagonal, S, T は $A(G)^\wedge (= \varprojlim_n A(G)/I(G)^n$, $I(G)$ は $A(G)$ の augmentation ideal) の任意の元であり、$S+T$ と $S\times T$ は各々、

$A(G)^\wedge$ での和と積を表わす．

さて，§.0 で述べたように，我々の証明は homology calculation を用いるものであるから，関連する homology について述べよう(すべての homology は $\mathbb{Z}/p$ coefficient とする)．

e_i : $H_i(B\mathbb{Z}/p) \cong \mathbb{Z}/p$ の生成元．

$x_0=1, x_1, x_2, \cdots\cdots$: $H_*(X)$ の basis

とすると，$H_*(E\mathbb{Z}/p \underset{\mathbb{Z}/p}{\times} X^p)$ の $\mathbb{Z}/p$ basis は，

$$e_i \int x_j = e_i \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_j = e_i \otimes x_j^p \quad (i, j \geqq 0)$$

$$x_{i_1} | \cdots | x_{i_p} = e_0 \otimes x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_p} \quad (i_k \neq i_\ell \text{ for some } k, \ell)$$

$(i_1, \cdots, i_p)$ は巡回置換による各代表類を走る．

によって与えられる． 特に，$X=BH$ とすると，$E\mathbb{Z}/p \underset{\mathbb{Z}/p}{\times} (BH)^p = B(\mathbb{Z}/p \int H)$ となることに注意し，群 $S(p^k, p) = \underbrace{\mathbb{Z}/p \int \cdots \int \mathbb{Z}/p}_{k\text{個}}$ の ホモロジーの元を次のように与える：

非負整数列 $I=(i_1, \cdots, i_k)$ に対し，

$$\hat{e}_I := e_{i_1} \int e_{i_2} \int \cdots \int e_{i_k} \in H_*(BS(p^k, p))$$

ここで，$S(p^k, p)$ は Σ_{p^k} の p-Sylow 部分群であり，$i : BS(p^k, p) \to B\Sigma_{p^k}$ をそれから誘導される写像とし，

$$e_I := i_*(\hat{e}_I) \in H_*(B\Sigma_{p^k})$$

とおく．

今度は Dyer-Lashof operation について，復習しよう．X を infinite loop space とする時，Dyer-Lashof は適当な条

件を満たした写像たち $\theta_n : E\Sigma_n \underset{\Sigma_n}{\times} X^n \longrightarrow X$ を構成し、

$$Q_i(x) = \theta_{p^n}(e_i \int x) \in H_*(X)$$

を考察した。この作用素 Q_i は Dyer-Lashof operation と呼ばれ、$p=2$ の場合の Kudo-Araki operation の p: odd case への拡張となっている。勿論、我々は Q_0S^0 や SG に関する Dyer-Lashof (各々、Q_i, $\widetilde{Q}_i$ と書く) を知りたいのであるが、これらを考える時には全体の QS^0 で考えた方が良い([Ⅱ])。即ち、Dyer-Lashof map を拡張する写像たち

$$\begin{array}{ccc} \theta_n : E\Sigma_n \underset{\Sigma_n}{\times} (QS^0)^n & \longrightarrow & QS^0 \\ \cup & & \cup \\ E\Sigma_n \underset{\Sigma_n}{\times} (Q_iS^0)^n & \longrightarrow & Q_{ni}S^0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widehat{\theta}_n : E\Sigma_n \underset{\Sigma_n}{\times} (QS^0)^n & \longrightarrow & QS^0 \\ \cup & & \cup \\ E\Sigma_n \underset{\Sigma_n}{\times} (Q_iS^0)^n & \longrightarrow & Q_{i^n}S^0 \end{array}$$

が存在し、これによって、Dyer-Lashof operation の定義域も $H_*(QS^0)$ 全体へと拡張される。

定義 非負整数列 $I=(i_1,\cdots,i_k)$ が次の(i)(ii)(iii)を満たす時 admissible, (ii)(iii)を満たす時 weakly admissible と呼ぶ。

(i) $i_j > 0$ $(j=1,2,\cdots,k)$

(ii) $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k$

(iii) (a) $i_t \equiv 0$ or -1 mod $2(p-1)$ if the dimension of $e_{i_{t+1}} \int \cdots \int e_{i_k}$ is even,

(b) $i_t \equiv p-1$ or $p-2$ mod $2(p-1)$ if the dimension of $e_{i_{t+1}} \int \cdots \int e_{i_k}$ is odd.

定義 各元が次数を持った集合 X に対し、X で生成される free commutative ($\mathbb{Z}_p$) algebra AX とは、$p=2$ の時、$P[X]$:

多項式環，$p>2$ の時，$E[X^-]\otimes P[X^+]$，X^+, X^- は各々．X の次数が偶数の部分と，奇数の部分とであり，$E[X^-]$ は外積代数．

$I=(i_1,\cdots,i_k)$ の長さ $l(I)$ を k と置く．すると我々は．$H_*(Q_0S^0)$ と．$H_*(SG)$ の Pontryagin ring structure を書き下せる．

Dyer-Lashof [M]　$I=(i_1,\cdots,i_k)$ に対し，

$e_I = Q_{i_1}Q_{i_2}\cdots Q_{i_k}[1]*[-p^{l(I)}]\in H_*(Q_0S^0)$ と置けば，

$$H_*(Q_0S^0)\cong A\{e_I \mid I:\text{admissible}\}$$

土屋 [Ts]，May [M]　p：奇素数とする．$I=(i_1,\cdots,i_k)$ に対し．

$x_I = Q_{i_1}Q_{i_2}\cdots Q_{i_k}[1]*[1-p^{l(I)}]\in H_*(SG)$ と置けば，

$$H_*(SG)\cong A\{x_I \mid I:\text{admissible}\}$$

§1の終りに，対称群とその部分群の homology に関するいくつかの結果を並べておく．これらは例えば，[KP2] にある．

Adem [ ]　$i: S(p^k;p)\to\Sigma_{p^k}$ を inclusion とすると，任意の非負整数列 J に対し．

$$i_*\hat{e}_J=\sum \lambda_I e_I.$$

ここで $\lambda_I\in\mathbb{Z}/p$ で，I は $l(I)=l(J)$ なる weakly admissible sequence を走る．

補題 [KP1]（これは．well-know でまた，難かしくない！）

i) $j:(\mathbb{Z}/p)^k\to S(p^k;p)$ を（標準的な）inclusion とすると，任意の非負整数列 I に対し，$j_*(x_I)=\hat{e}_I$ なる $x_I\in H_*(B(\mathbb{Z}/p)^k)$ が存在する．

ii) 任意の $x\in H_*(B(\mathbb{Z}/p)^k)$ に対し．$j_*(x)$ は $\hat{e}_I$，$l(I)=k$ 達の線形結合で書ける．

<u>Kahn–Priddy [KP2]</u>　自然な写像 $\Sigma_m \times \Sigma_n \to \Sigma_{m+n}$ から誘導される homology の paring を $*$ で表わす。(これらは Barratt-Kahn-Priddy map を通して QS^0 における loop 積 $*$ と両立する)。すると、任意の $x = e_{i_1} * \cdots * e_{i_u} * e_{I_1} * \cdots * e_{I_v} \in H_*\Sigma_n$, $i_j \geqq 0$, $l(I_j) \geqq 2$ に対し、

(i) $tr_{\Sigma_n \to S(n,p)}(x) = \hat{e}_{i_1} | \cdots | \hat{e}_{i_u} | \hat{e}_{I_1} | \cdots | \hat{e}_{I_v} + \hat{e}_x$

ここで、$\hat{e}_x = \sum \hat{e}_{i_1'} | \cdots | \hat{e}_{i_u'} | \hat{e}_{I_1'} | \cdots | \hat{e}_{I_v'}$ の summation は、$l(I_j') = l(I_j)$ となる示されている type の元及び、それらの置換(|||に関する)の中を走る。

(ii) $i_{S(n,p) \to \Sigma_n}(\hat{e}_x) = (\lambda - 1)x$　ここで $\lambda = [\Sigma_n : S(n,p)]$

ただし、$S(n,p)$ は Σ_n の p-Sylow で、$tr_{\Sigma_n \to S(n,p)}$, $i_{S(n,p) \to \Sigma_n}$ は、各々 transfer と、"包含"写像である。

§2　主定理の証明の方針及び、若干の homology calculation.

我々が、homology calculation で何を示せば良いかと言うと、それは次の目標を示すことである。

<u>目標</u>　stable map の合成写像 $\Sigma^\infty B\Sigma_{p^k} \xrightarrow{\tau} \Sigma^\infty Q B(\Sigma_p \wr \Sigma_p) \xrightarrow{d} \Sigma^\infty SG$ は homology において、k と共に増加するある range で surjective となっていることを示せ! ただし、$\tau = \Sigma^\infty \beta \circ \Sigma^\infty u \circ tr'$, $d = \Sigma^\infty(\mathrm{Str}\circ Q([illegible])\circ BK\text{-}P)$ (つまり主定理の合成写像を stable にしたもの)、で、$tr' : \Sigma^\infty B\Sigma_{p^k} \to \Sigma^\infty BS(p^k, p)$ は transfer, $u : BS(p^k, p) \to B\Sigma_{p^{k-2}} \wr \Sigma_p \wr \Sigma_p$

は inclusion. $\beta : B\Sigma_{p^{k-2}}\int\Sigma_p\int\Sigma_p = E\Sigma_{p^{k-2}} \underset{\Sigma_{p^{k-2}}}{\times} (B\Sigma_p\int\Sigma_p)^{p^{k-2}}$ $\to QB\Sigma_p\int\Sigma_p$ は $QB\Sigma_p\int\Sigma_p$ の Dyer-Lashof map の制限.

何故目標が達成されたら主定理が証明されるかについては、(可成り standard な議論となって来たが), $p=2$ の時の Priddy の論文[P] でも参照して下さい. さて、$I \subset H_*(SG)$ を $H_*(SG)$ の positive dimension の元全体, $B \subset H_*(SG) \cong A\{x_I \mid I:$ admissible$\}$ を $\{x_I \mid I:$ admissible, $l(I) \geqq 2\}$ で生成される ideal. $\xi : H_*(SG) \to H_*(SG)$, $\xi(x) = x^p$ を Frobenius 写像とする.

<u>補題A</u> (i) $2 \leqq a \leqq p$ の時、

$$x_{i_1} * x_{i_2} * \cdots * x_{i_a} * [1-a] \equiv x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_a} + \sum_{l(I)=a} x_I \quad \text{modulo } I \cdot B \cup I^{a+1}.$$

(ii) $\overbrace{x_i * \cdots * x_i}^{p\text{個}} * [1-p] \equiv x_i^p \quad \text{modulo } \xi(B)$

(iii) ((ii)の拡張である) $x_{(\underbrace{0,\cdots,0}_{n\text{個}}, i_1,\cdots,i_k)} \equiv x_{(i_1,\cdots,i_k)}^{p^n} \quad \text{modulo } \xi(B)$

<u>補題B (refined 土屋 theorem)</u> $l(I) \geqq 2$ とすると、

$$\widetilde{Q}_r(x_I) \equiv x_{(r,I)} + \sum_{l(J)=l(I)} a_J x_J \quad \text{modulo } \xi(I) \cup I^{p+1} \cup I \cdot B$$

ここで、$a_J \in \mathbb{Z}_p$.

<u>系</u> $I = (J, K)$ $l(K) = 2$ とすると.

$$\widetilde{Q}_J(x_K) \equiv x_I + \sum_{2 \leqq l(I') < l(I)} b_{I'} x_{I'} \quad \text{modulo } \xi(I) \cup I^{p+1} \cup I \cdot B$$

ここで、$b_{I'} \in \mathbb{Z}_p$

<u>注意</u>. 元来の土屋の定理[土2]では、indeterminacyがI^2となっていた。我々の目的には不十分であるが、土屋先生の本来の目的は、$H_*(SG) \cong A[\{x_I \mid I:\text{admissible}\ \ell(I) \leq 2\} \cup \{\hat{Q}_J(x_K) \mid (J.K):\text{admissible},\ \ell(J) \geq 1,\ \ell(K)=2\}]$ 及び、$H_*(BSG) \cong A[\{\sigma(x_I) \mid I:\text{admissible}, \ell(I) \leq 2\} \cup \{\hat{Q}_J(\sigma x_K) \mid (J.K):\text{admissible}, \ell(J) \geq 1, \ell(K)=2\}]$を示すことであったので、それには全く十分であった[土2]。特にこの最後の$H_*(BSG)$に関する結果は、BSGの(homology)特性類を、BSGのinfinite loop structureに関するDyer-Lashof operation $\hat{Q}_i$を用いて表示してあるということで、大変意義深く、$p=2$の場合のMadsenの定理[ ]に対応するものである。

<u>補題A、補題Bを仮定して目的達成へのあら筋。</u>

最初に$H_*(SG)$にfiltrationを入れよう。$i_1, \cdots, i_a, I_1, \cdots I_n$がすべてadmissibleであるような単項式$x_{i_1} \cdots x_{i_a} x_{I_1} \cdots x_{I_n}$に対し、$f(x_{i_1} \cdots x_{i_a} x_{I_1} \cdots x_{I_n}) = a + pn$と置き、$x = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j x_{i_{j,1}} \cdots x_{i_{j,a_j}} x_{I_{j,1}} \cdots x_{I_{j,n_j}}$に対しては、$f(x) = \operatorname{Min}_j f(x_{i_{j,1}} \cdots x_{i_{j,a_j}} x_{I_{j,1}} \cdots x_{I_{j,n_j}})$としてweightを入れ、このweightに関して、filtration $\{F_\ell\}$、$F_\ell = \{u \in H_*(SG) \mid f(u) \geq \ell\}$を考える。$H_*(SG) = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_\ell \supset \cdots$であり、$\forall n, \exists \ell_n$ s.t. $H_n(SG) \cap F_{\ell_n} = 0$だから、群の準同型$f: G \to H_n(SG)$が全射であることを言うには、$\forall x \in H_n(SG), \exists g \in G$. s.t. $x \equiv f(g)$ modulo $F_{f(x)+1}$を言えばよい。このfiltration

に関して補題A, Bを見直すと、次のようになる.

(イ) $2 \leqq a \leqq p$ の時. $x_{i_1} * x_{i_2} * \cdots * x_{i_a} * [1-a] \equiv x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_a} + \sum_{l(I)=a} x_I$
modulo $F_{f(x_{i_1} \cdots x_{i_a})+1}$. ここで $f(x_{i_1} \cdots x_{i_a}) = a \leq p = f(x_I)$

(ロ) $\overbrace{x_i * \cdots * x_i}^{p} * [1-p] \equiv x_i^p$ modulo F_{p^2}. ここで $f(x_i^p) = p$

(ハ) $x_{(\underbrace{0, \cdots, 0}_{n個}, i_1, \cdots, i_k)} \equiv x_{(i_1, \cdots, i_k)}^{p^n}$ modulo F_{p^2}

(ニ) $I = (J, K)$, $l(K) = 2$ に対して

$\widetilde{Q}_J(x_K) \equiv x_I + \sum_{2 \leq l(I') < l(I)} b_{I'} x_{I'} + \sum c_i x_i^p$ modulo F_{p+1}.

ここで $c_i \in \mathbb{Z}/p$, $f(x_I) = f(x_{I'}) = f(x_i^p) = p$.

さて、例えば $x = x_{i_1} \cdots x_{i_{kp}} x_{I_1} \cdots x_{I_l} x_{I_{l+1}} \cdots x_{I_{l+m}}$ の場合に、どうすればよいか考えてみよう. ここで $l(I_j) = 2$ for $1 \leqq j \leq l$, $l(I_j) > 2$ for $l+1 \leqq j \leq l+m$ である。すると §1の最後の Kahn-Priddy
$(I_{l+q} = (J_q, K_q), l(K_q) = 2$ とおく$)$
の結果を用いることにより.

$$d_* \tau_*(e) = (d \circ \Sigma^\infty \beta \circ \Sigma^\infty \nu)_* h'_*(e)$$

$$= (d \circ \Sigma^\infty \beta \circ \Sigma^\infty \nu)_* (\hat{e}_{i_1} | \cdots | \hat{e}_{i_{kp}} | \hat{e}_{I_1} | \cdots | \hat{e}_{I_l} | \hat{e}_{I_{l+1}} | \cdots | \hat{e}_{I_{l+m}} +$$
$$\sum \hat{e}_{i_1} | \cdots | \hat{e}_{i_{kp}} | \hat{e}_{I'_1} | \cdots | \hat{e}_{I'_l} | \hat{e}_{I'_{l+1}} | \cdots | \hat{e}_{I'_{l+m}})$$
$$= (Q_{i_1}[1] * \cdots * Q_{i_p}[1] * [1-p^2])(Q_{i_{p+1}}[1] * \cdots Q_{i_{2p}}[1] * [1-p^2])$$
$$\cdots (Q_{i_{(k-1)p+1}}[1] * \cdots * Q_{i_{kp}}[1] * [1-p^2]) x_{I_1} \cdots x_{I_l} \widetilde{Q}_{J_1}(x_{K_1}) \cdots \widetilde{Q}_{J_m}(x_{K_m})$$
$$+ \sum (Q_{i_1}[1] * \cdots * Q_{i_p}[1] * [1-p^2]) \cdots (Q_{i_{(k-1)p+1}}[1] * \cdots * Q_{i_{kp}}[1] * [1-p^2])$$
$$x_{I'_1} \cdots x_{I'_l} \widetilde{Q}_{J'_1}(x_{K'_1}) \cdots \widetilde{Q}_{J'_m}(x_{K'_m})$$

を得るが、上の(イ)(ロ)(ニ)を用いれば.

$$d_* \tau_*(e) \equiv x + \sum x_{i_1} \cdots x_{i_{kp}} x_{I'_1} \cdots x_{I'_l} x_{I'_{l+1}} \cdots x_{I'_{l+m}} + \alpha$$
modulo $F_{f(x)+1}$. ここで $f(\alpha) = f(x)$

我々は、$\sum x_{i_1}\cdots x_{i_{kp}} x_{I'_1}\cdots x_{I'_\ell} x_{I'_{\ell+1}}\cdots x_{I'_{\ell+m}}$ が $F_{f(I)+1}$ に入る事を最初に言いたい。そのために、k: even と仮定する。この仮定のもとに、$[\Sigma_{p^k}: S(p^k, p)] \equiv 1 \bmod p$ となり、§1の終りのKahn-Priddyの(ii)により $\sum e_{i_1}\cdots e_{i_{kp}} e_{I'_1}\cdots e_{I'_\ell} e_{I'_{\ell+1}}\cdots e_{I'_{\ell+m}} = 0$ となる。§1より $H_*(Q_0S^0)$ と $H_*(SG)$ とは algebra として同型だったから $F_{f(I)+1}$ に入るどころか、0になることが言えそうであるが、I'_j が admissible になる保証はないのでそう上手くはいかない。それで、§1のAdemにより、weakly admissible の level へ持って行き、(ロ)(い)を用いて $F_{f(I)+1}$ に入ることを示す。後は、x の形を(イ)(ロ)(ニ)を通してよく眺めて、(ほんの少し複雑な)帰納法により x が mod $F_{f(I)+1}$ で $d_*\tau_*$ の像に含まれることが示される。他の形の x についても同様である。

§3. 補題B (reformed 土屋 theorem) の proof の outline)

土屋の argument において、Prop. 4.5 [ ] が first step であったが、証明を見ると実際次を示していることがわかる。

$$◎\ \widetilde{Q}_r(x_I) \equiv \widetilde{Q}_r Q_I[1] * [1-p^{p\ell(I)}] + x(r, I)$$
$$\bmod \mathcal{S}(I) \cup I^{p+1} \cup I\cdot B.$$

それ故、我々は $\widetilde{Q}_r Q_I[1] * [1-p^{p\ell(I)}]$ を調べることとなるのだが、$\widetilde{Q}_r Q_I[1]$ については、general distributive law [土Z] による次の可換図式が有用である。

$$
\begin{array}{ccc}
E\Sigma_p \underset{\Sigma_p}{\times} \left(E\Sigma_{pl(I)} \underset{\Sigma_{pl(I)}}{\times} (Q_1 S^0)^{p^{l(I)}} \right)^p & \xrightarrow{E\Sigma_p \underset{\Sigma_p}{\times} (\theta_{pl(I)})^p} & E\Sigma_p \underset{\Sigma_p}{\times} (Q_{pl(I)} S^0)^p \\
\| & & \Big\downarrow \tilde{\theta}_p \\
E\Sigma_p\textstyle\int\Sigma_{pl(I)} \underset{\Sigma_p\int\Sigma_{pl(I)}}{\times} (Q_1 S^0)^{p^{pl(I)}} & & \\
\longrightarrow E\Sigma_{p^{pl(I)}} \underset{\Sigma_{p^{pl(I)}}}{\times} (Q_1 S^0)^{p^{pl(I)}} & \xrightarrow[\tilde{\theta}_{p^{pl(I)}}]{} & Q_{p^{pl(I)}} S^0
\end{array}
$$

$j : B\Sigma_p\int\Sigma_{pl(I)} \longrightarrow B\Sigma_{p^{pl(I)}} \longrightarrow Q_{p^{pl(I)}} S^0$ を、この図式から得られる写像とすれば、$j_*(e_r\int e_I) = \hat{Q}_r Q_I[1]$ となる。ところが、ここで§1の補題(1)を繰り返し使えば、次の重要な結果が得られる。

命題　$H = (\mathbb{Z}/p)^{l(I)}$ として、$\underbrace{H\times H\times\cdots\times H}_{p個}$ を、$\mathbb{Z}/p\times H$-set と思う。ただし、$\mathbb{Z}/p$ は巡回置換として $\underbrace{H\times\cdots\times H}_{p個}$ に作用し、H は diagonal で作用させる。これを $A(\mathbb{Z}/p\times H)$ の元として $[H^p]$ と書けば、

$$\exists x \in H_*(B\mathbb{Z}/p\times H) \quad s.t.\ \alpha([H^p]+1-p^{pl(I)})_* x = \hat{Q}_r Q_I[1] * [1-p^{pl(I)}]$$

これより、$[H^p]+1-p^{pl(I)} \in A(\mathbb{Z}/p\times H)$ がどういうものか興味が持たれるが、それに関しては次の結果がわかる。

命題　$1+I(\mathbb{Z}/p\times H)^\wedge$ ($A(\mathbb{Z}/p\times H)^\wedge$ の unit group) において

$$[H^p]+1-p^{pl(I)} = \coprod_{|K|=p} \left(\frac{\mathbb{Z}/p\times H}{K} + 1 - p^{l(I)} \right) \times z^p ,$$

K は(重複も含め、適当に走る)　　ここに $z \in 1+I(\mathbb{Z}/p\times H)^\wedge$

§1の $A(G)$ と QS^0 の関係、特に(図II)を思い出せば、我々の証明は完了する。

homologyがdiagonal mapでどうなるか注意して、§1の補題(ii)を使えばよい。

References

[P] S. Priddy Comment. Math. Helv. 53 (1978) 470~484.
[KP1] Kahn-Priddy Bull. Amer. Math. Soc. 78. (1972) 981~987
[KP2] 〃 Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 83 (1978) 91−101
[M] Cohen-Lada-May L.N.M. 533
[土1] 土屋昭博 Nagoya Math. J. 43 (1971) 1~39
[土2] 〃 J. Math. Soc. Japan 25. (1973) 277~316