数理解析研究所講究録
第 568 巻 1985 年 84-93

S^1の同相写像の半共役について

日本大理工 松元重則
(Matsumoto, Shigenori)

§1 半共役と有界コホモロジー

本録を通して次の記号を用いる。

$$G = S^1 上の保向的自己同相のなす群$$

$$\overline{G} = \{ \overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \overline{f} \circ T = T \circ \overline{f} \}$$

ここに、 $T(x) = x + 1$

$\overline{G}$は Gの普遍被覆群であり、その標準射影を $p : \overline{G} \to G$ で表わす。

（定義） $h : S^1 \to S^1$ が、位数1単調写像であるとは $\overline{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して、

1) $\overline{h} \circ T = T \circ \overline{h}$。

2) $\overline{h}$は、hをcoverする。

3) $\overline{h}$ is 単調。

をみたすこととする。

（注） hは不連続でもよく，また広義単調でもよい。従って一般に 1:1 でもなく，また onto でもない。

（定義）離散群 Γ と，順同型 $\phi_1, \phi_2 ; \Gamma \to G$ について
$\phi_1 \sim \phi_2$（半共役）とは，位数1単調写像 h が存在して
$\phi_1(\gamma) \circ h = h \circ \phi_2(\gamma)$ （$\forall \gamma \in \Gamma$）をみたすこととする。

（注）半共役は同値関係である。（証明は難しくない。）

Gのふたつの元の間に，半共役という概念が同様に定義されるが，これは微分可能力学系理論で，同じ名前で呼ばれている概念と一致する。また，よく知られているように，ふたつの同相写像が半共役であることと，それらの回転数（rotation number）が一致することとは同値である。

本録の主たる目的は，一般の離散群に対し，ふたつの表現ϕ_1, ϕ_2がいつ半共役になるか，そのための不変量を与えることである。それは有界コホモロジー群の元としてとらえられる。そこで，しばらくの間有界コホモロジーを復習しよう。

係数Aは$\mathbb{R}$または$\mathbb{Z}$である。Γを群とする。

$$C^n(\Gamma ; A) = \{ u ; \Gamma^n \to A \}$$
$$\delta : C^n \to C^{n+1}$$

δは，例えば，$n=1$のとき

$$\delta(u)(\gamma, \gamma') = u(\gamma') - u(\gamma\gamma') + u(\gamma)$$

いま，　$C_b^n(\Gamma;A)=\{u\in C^n\ ;\ \mathrm{Im}(u)\ ;\ $有界集合$\}$
とおけば，これは $\{C^n, \delta\}$ の subcomplex をなす。
また，C_b^n に norm $\|\cdot\|$ が普通に定義され，Banach 空間となる。この cohomology 群を $H_b^n(\Gamma:A)$ で表わす。

計算例 (1)　$H_b^1(\Gamma;A)=0$　（Γ：任意の群）— 後述

(2) $H_b^n(\Gamma;\mathbb{R})=0$　　Γ：amenable.　　[2]

(3) $H_b^2(\Pi;\mathbb{R})$；∞-生成 Banach space　　[4] 他

Π；hyperbolic surface の基本群

(4) $H_b^2(G;\mathbb{R})\cong H_b^2(PSL_2\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$　　[3]

次に $H_b^2(G;\mathbb{R})$ の生成元（Euler class）について述べよう。写像 $\sigma: G\to\overline{G}$ にて，$p\circ\sigma=\mathrm{Id}$ をみたすものを cross section という。これに対応して 2-cochain $e_\sigma\in C^2(G;\mathbb{R})$ を $e_\sigma(f,g)=\sigma(fg)^{-1}\sigma(f)\sigma(g)$ と定める。ここに右辺は T^n の形なので，これを n と同一視している。いまもし σ が有界（$\sigma(f)(0)$ が f によらず有界）ならば，e_σ は有界 cochain となる。また e_σ が cocycle なること，さらに，e_σ の定める cohomology 類が，σ によらないことがすぐわかる。e_σ の類を，$\chi_{\mathbb{R}}\in H_b^2(G;\mathbb{R})$ で表わす。また，e_σ は整数値なので，整係数類をも表わす。これを $\chi_{\mathbb{Z}}\in H_b^2(G;\mathbb{Z})$ で表わす。

Ghys [1] の主定理は次のとおりである。

定理1 $\phi_1, \phi_2 : \Gamma \to G$ について

$$\phi_1 \sim \phi_2 \iff \phi_1^*(\chi_{\mathbb{Z}}) = \phi_2^*(\chi_{\mathbb{Z}})$$

証明) ⇒) $h\phi_1(\gamma) = \phi_2(\gamma)h$ を $\bar{G}$ に lift して

$$\bar{h} \circ \phi_1(\gamma) = \sigma(\phi_2(\gamma))\bar{h} \circ T^{u(\gamma)} \quad (u : \text{有界})$$

これより、$\phi_1^*(e_\sigma) - \phi_2^*(e_\sigma) = \delta u$ が容易に従う。

⇐) $\phi_1^*(\chi_{\mathbb{Z}}) = \phi_2^*(\chi_{\mathbb{Z}})$ が、$H^2(\Gamma;\mathbb{Z})$ においても成立している。これらは、$K(\Gamma,1)$ 上に、ϕ_1, ϕ_2 のもたらす S^1-束の Euler類であるので、それら S^1-束は一致する。代数的にいえば、中心拡大 $0 \to \mathbb{Z} \to \bar{G} \to G \to 1$ を、ϕ_1, ϕ_2 でひきもどしたものが相等しい。また、cross section σ をひきもどしたものを σ_1, σ_2 と書くとき、次のような図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bar{\Gamma} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\phi}_i"'] & \Gamma \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\sigma_i"] \arrow[d, "\phi_i"] & 1 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \bar{G} \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\sigma"'] & 1
\end{tikzcd}$$

このとき

条件 $\phi_2^*(e_\sigma) - \phi_1^*(e_\sigma) = \delta u$ より、$\sigma_2(\gamma) = \sigma_1(\gamma)T^{u(\gamma)}$ が従う。さらに、$x \in \mathbb{R}$ に対し 集合 $\{\bar{\phi}_1(\alpha)^{-1}\bar{\phi}_2(\alpha)(x) \mid \alpha \in \bar{\Gamma}\}$ は有界であることがわかる。そこで、

$$\bar{h}(x) = \sup_{\alpha \in \bar{\Gamma}} (\bar{\phi}_1(\alpha)^{-1}\bar{\phi}_2(\alpha)(x))$$

とおき、$\bar{h}$ を project down したものを h とすればよい。▨

§2. 数値的不変量

この§では、定理1の類 $\phi^*(\chi_{\mathbb{Z}})$ を、いくつかの数値的不変量のくみあわせに分解する。

まず、係数列 $0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に附随して、次の完全系列が存在する。

$$H_b^1(\Gamma;\mathbb{R})\to H^1(\Gamma;\mathbb{R}/\mathbb{Z})\xrightarrow{\delta_*} H_b^2(\Gamma;\mathbb{Z})\xrightarrow{\iota^*} H_b^2(\Gamma;\mathbb{R})$$

(注意) とくに、$\Gamma=\mathbb{Z}$ の時、前にみたように、上の両端は消え、δ_* は $H_b^2(\Gamma;\mathbb{Z})\cong\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を与える。これにより $\phi^*(\chi_{\mathbb{Z}})$ は、$\phi(1)$ の回転数に一致することがわかっている。([1])

さて、$\{\gamma_i\}$ を群 Γ の生成元、$\varphi_i:\mathbb{Z}\to\Gamma$ を $\varphi_i(1)=\gamma_i$ で定まる写像とする。($\Gamma\to\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ との合成も、同じ文字でかく。)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\Gamma/[\Gamma,\Gamma];\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\oplus_i\varphi_i)^*"'] & H^1(\Gamma;\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\delta_*"] \arrow[d, "\oplus_i\varphi_i^*"] & H_b^2(\Gamma;\mathbb{Z}) \arrow[d, "\oplus_i\varphi_i^*"] \\
\mathrm{Hom}(\oplus_i\mathbb{Z};\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] & \oplus_i H^1(\mathbb{Z};\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] & \oplus_i H_b^2(\mathbb{Z};\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

上の図式にて左垂直矢は injective、よって $\oplus_i\varphi_i^*$ は、$\mathrm{Im}\,\delta_*$ 上 1:1。つまり $a\in H_b^2(\Gamma;\mathbb{Z})$ に対し

$$a=0 \iff {}_i^*(a)=0\ (\forall i)\ \wedge\ \iota^*(a)=0$$

これより

<u>補題2</u> $\phi_1, \phi_2 : \Gamma \to G$ が半共役 $\Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ \rho\,\phi_1(\gamma_i) = \rho\,\phi_2(\gamma_i) & (\rho = \text{回転数}) \\ 2)\ \phi_1^*(\chi_{\mathbb{R}}) = \phi_2^*(\chi_{\mathbb{R}}) \end{cases}$

(注) Γ amenable なら (1)単独と同値。また Γ: 完全群ならば、(2)単独と同値。

次に $\phi^*(\chi_{\mathbb{R}})$ を、「標準 Euler コサイクル」を用いて数値的量に翻訳しよう。そのために、有界コチェインと双対の位置にある ℓ^1 チェインを導入しよう。([2], [3], [4])

Γ の ℓ^1 n-chain c とは、$\sum_{i=1}^{\infty} a_i (\gamma_1^i, \cdots, \gamma_n^i)$ $(a_i \in \mathbb{R})$ にて $\|c\| = \sum |a_i| < \infty$ をみたすものであり、Banach 空間 $C_n^{\ell_1}(\Gamma;\mathbb{R})$ を成す。境界準同型 ∂ は、普通に定義され有界作用素である。　また、$(C_b^n(\Gamma;\mathbb{R}), \delta)$ は、$(C_n^{\ell_1}, \partial)$ の Banach 空間としての双対である。$C_n^{\ell_1}$ の cycle 群, boundary 群を $Z_n^{\ell_1}$, $B_n^{\ell_1}$ で表わす。

さて $\alpha : C_1^{\ell_1} \to C_2^{\ell_1}$ を、次により定義しよう。

$$\alpha(\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} (\gamma^{2^{i-1}}, \gamma^{2^{i-1}})$$

α は有界作用素であり、$\partial \circ \alpha = \mathrm{Id}$ をみたす。(α の存在により計算例(1)の事実が $\mathbb{R}$-係数のとき示されるのである。)

補題3 2-cocycle $u \in C_b^2(\Gamma;\mathbb{R})$ が coboundary
$\iff u|_{Z_2^{\ell^1}} = 0$

証明) ⇒) は自明 ⇐) $v \circ \partial = u$ をみたす $v : C_1^{\ell_1} \to \mathbb{R}$ の存在はすぐわかる。v の有界性には，例えば α の有界性を用いればよい。(開写像定理でもよい。)

次に $\beta = Id - \alpha \circ \partial : C_2^{\ell^1} \longrightarrow C_2^{\ell^1}$ とおけば，これは $Z_2^{\ell^1}$ への retraction であり，従って 有界実 2-cocycle u に対し

(1) $[u] = [u \circ \beta]$
(2) $[u] = 0 \iff u \circ \beta = 0$

つまり，各有界 2-cohomology 類 $[u]$ に対し，それを代表する cocycle $u \circ \beta$ が，ひとつ定まり，類の一致は，その cocycle の一致により判定できるわけである。 これを，標準的 cocycle と呼ぼう。

Euler 類 $\chi_{\mathbb{R}}$ の標準的 cocycle τ は，routine に計算される。それは次のとおりである。

補題4　$\tau(f, g) = \mathrm{rot}(\bar{f}\,\bar{g}) - \mathrm{rot}(\bar{f}) - \mathrm{rot}(\bar{g})$

$\bar{f}, \bar{g}$ は, f, g の $\bar{G}$ への lift であり, rot は回転数であるが, $\bar{G}$ の元に対し実数を対応させるものであり, 前述の ρ と, 記号上区別してある。

以上をまとめると

定理5　$\phi_1, \phi_2 ; \Gamma \longrightarrow G$ が半共役であるのは

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ \rho\,\phi_1(\gamma_i) = \rho\,\phi_2(\gamma_i) & \{\gamma_i\} ; \Gamma \text{の生成元}. \\ 2)\ \tau(\phi_1(\gamma), \phi_1(\gamma')) = \tau(\phi_2(\gamma), \phi_2(\gamma')) & \end{cases}$$

§3 応用

前§にて, χ_Π が, 生成元の回転数と, 標準 Euler cocycle に分解されたが, 後者が消える作用は, 力学的構造が極めて簡単であろうことが想像される。これについて次がなりたつ。

定理6　Γ を有限生成群, $\phi : \Gamma \to G$ を表現とする。このとき, 次は同値。

(1) $\phi^*(\chi_{\mathbb{R}})=0$
(2) ϕ は，回転のなす G の部分群 $(\cong \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ への表現と半共役
(3) ϕ の作用は，極小集合 Ω 上 holonomy がない。
$(\phi(\gamma)(x)=x \quad {}^{\exists}x\in\Omega \Rightarrow \phi(\gamma)|_{\Omega}=\mathrm{Id})$
(4) ϕ の作用は，不変測度をもつ。

さて，[3] にて，$H_b^2(G;\mathbb{R})\cong H_b^2(PSL_2\mathbb{R};\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$ が示されている。このことより直ちに

$$H_b^2(G;\mathbb{Z})\cong H_b^2(PSL_2\mathbb{R},\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$$

がわかる。この群が，(曲面群の場合などと著しく異なり) 極めて小さい群であることは，これらの群から G への表現の少なさを意味する。これを定着させて次の定理を得る。

G で $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ 又は $PSL_2\mathbb{R}$ を表わし，各々に対応して，$\tilde{G}$ で $\mathrm{Homeo}(S^1)$ 又は $PGL_2\mathbb{R}$ を表わす。

定理 7　G の endomorphism は，trivial か，または，$\tilde{G}$ の元による conjugation に限られる。

(注)　$G=PSL_2\mathbb{R}$ の場合，初等的証明がある。(坪井俊氏)

参考文献

[1] E.Ghys, Groupes d,homeomorphismes du cercle et cohomologie bornée, preprint, Université des Sciences et Techniques de Lille I

[2] M.Gromov, Volume and bounded cohomology, Publ. Math. I.H.E.S. 56(1982) 5-100

[3] S.Matsumoto - S.Morita, Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms, to appear in Proc. A.M.S.

[4] Y. Mitsumatsu, Bounded cohomology and ℓ^1-homology of surfaces, Topology 23(1984) 465-472