数理解析研究所講究録
第568巻1985年109-127

Riemann 多様体の崩壊

東京大学、数学教室、深谷賢治
(Fukaya Kenji)

＊ 0 ＊

この講究録の題は「Hyperbolic geometry と3次元多様体」ということで、Thurston の orbifold uniformization Theorem の相馬・大鹿両氏による解説が中心になっています。そこでは Hyperbolic cone manifold の geometric limit の概念が大事な役目をはたしていて、特にそれが退化するようすを調べることが証明の key point になっていました。ここでは少し扱うものを変えて、必ずしも定曲率ではない(そのかわり cone singularity はない) Riemann 多様体の geometric limit を調べることにします。

＊ 1 ＊

2つの距離空間の間の Hausdorff 距離を次のようにして定めます。

定義1 (Gromov[9] Chaiture 3-B)

(1) 距離空間 X から Y への(連続とは限らない)写像 f に対して、

f は ε-近似

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (a) & f(X) \text{の} \varepsilon\text{-近傍は} Y \text{を含む。} \\ (b) & \forall x, y \in X,\ |d(x,y) - d(f(x), f(y))| < \varepsilon \text{。} \end{cases}$$

(2) X と Y の間のHausdorff距離 $= d_H(X, Y)$

$= \inf\{\varepsilon \mid X$ から Y 及び Y から X への ε-近似が存在する$\}$。

Gromov以前にもむろんRiemann計量の列の極限を考えるという方法はありました。変分問題の解として「よい」計量を作る、などというのはその典型でしょう。それらとGromovの方法が大きくちがうところは、以前のものが1つの固定された多様体を考えてその上の計量の列を考えていたのに対して、Hausdorff距離の定義のなかの X と Y はべつに同相である必要はない、ということです。いいかえれば、極限操作によって新しい位相空間を作ることができるわけです。とするならば、「d_H についての極限操作で多様体の位相型はどう変わるか」、というのが基本問題になります。きっちり問題をのべるにはRiemann多様体のclassを指定する必要がありますが、ここでは次のclass $\mathfrak{M}(n, D)$ 及び $\mathfrak{M}(n, D, \mu)$ をとり

ます。

$$\mathcal{M}(n,D) = \left\{ M \;\middle|\; \begin{array}{l} \dim M = n,\ |\text{断面曲率}| < 1 \\ \text{直径} < D \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{M}(n,D,\mu) = \{ M \in \mathcal{M}(n,D) \mid \text{単射半径} > \mu \}$$

<u>問題1</u>

(I) $\mathcal{M}(n,D)$ の d_H についての閉包 $\mathcal{Cl}(\mathcal{M}(n,D))$ を定めよ。

(II) $X_i \in \mathcal{Cl}(\mathcal{M}(n,D))$, $\lim_{i\to\infty} X_i = X$, とき, X_i と X にはどういう関係があるか。

[9]の chapitre 8 前半に書いてあるのは、この問題で $\mathcal{M}(n,D)$ を $\mathcal{M}(n,D,\mu)$ に変えた場合の答えです。

定理1 (Gromov[9] 8.25 と 8.28)

(1) $\mathcal{Cl}(\mathcal{M}(n,D,\mu))$ の元は $C^{1,\alpha}$-級の Riemann 多様体である。($C^{1,\alpha}$-級とは距離関数の1階微分が勝手な $\alpha \in [0,1)$ に対して α-級の Lipschitz 連続であることを指す。)

(2) $X_i \in \mathcal{Cl}(\mathcal{M}(n,D,\mu))$, $\lim_{i\to\infty} X_i = X$, とき, 十分大きい i に対して, X_i と X は可微分同相。

というわけで、問題1は、「$X_i \in \mathcal{M}(n,D)$ の単射半径が $i \to \infty$ で0に近づくとき、X_i の $i \to \infty$ での極限を調べよ」、という問題に帰着されます。このとき X_i は崩壊(collapse)するといいます。Gromovはもう少し知っていたようですが、[9]に書いてある限りでは彼のこの場合の結果は、

定理2([9] 8.39)

$$\begin{cases} X_i \in \mathcal{M}(n,D)、\lim_{i\to\infty}(X_i \text{の単射半径}) = 0、\\ \lim_{i\to\infty} X_i = X \end{cases}$$

$\Rightarrow X$ のHausdorff次元 $\leq n-1$。

この節の最後にGromovのもう1つの大事な結果を書いておきます。(Gromovの定理はもっと強いのですが今は必要ないので弱い形にしておきます。)

定理3([9] 5.3) $Cl(\mathcal{M}(n,D))$ はcompact.

＊ 2 ＊

定理1、2を参考にして、次のように定義します。

$$Int(\mathcal{M}(n,D)) = \bigcup_{\mu>0} Cl(\mathcal{M}(n,D,\mu))$$

$$\partial \mathcal{M}(n,D) = Cl(\mathcal{M}(n,D)) - Int(\mathcal{M}(n,D))$$
$$\mathcal{H}_k = \{X \in Cl(\mathcal{M}(n,D)) \mid X\text{のHausdorff次元} \leq n-k\}$$

定理2から、$\mathcal{H}_1 = \partial\mathcal{M}(n,D)$、が分ります。[9]にならって、距離空間の間の距離をもう1種類導入します。

定義2([9] chapitre 3-A) X、Y：距離空間とき、XとYの間のLipschitz距離 $= d_L(X,Y)$
$= \inf\{\varepsilon \mid \exists f : X \to Y$ 同相写像 s.t. $\forall x,y \in X$
$e^{-\varepsilon} \leq d(x,y)/d(f(x),f(y)) \leq e^{\varepsilon}\}$。

Hausdorff距離というのは一見随分大ざっぱで、こんな定義で何が分るのかと思えるのですが、Lipschitz距離が近いならば定義を見ても本当に2つの空間が似ている気がします。それで、定理1のいいかえである次の定理が不思議な定理ということになるわけです。

定理1' $Int(\mathcal{M}(n,D))$ 上 d_H と d_L は同じ位相を定める。

この定理の証明はいくつか知られています。Gromovの原論

文[9] §.25 〜 28 は難解で、凡人には理解しがたいのですが、その後[10], [7]が出てだいぶ分かりやすくなりました。[10]の方法はGromovのものに近く彼の証明のjustificationといってよいでしょう。[7]はむしろPeters [12]によるCheegerの有限性定理の証明の方法(Center of Mass technique)に近く、又Harmonic mapの偏微分方程式の解のa priori評価を使って定理1(i)を示しています。Petersによる同様な方法での定理1の証明も論文になっているそうですが、私はまだ見ていません。

さて$\mathfrak{M}(n,D)$上では、定理1′は次のように一般化されます。

<u>定理4</u> (Rigidity at boundary) $\mathfrak{X}_k - \mathfrak{X}_{k+1}$上$d_H$と$d_L$は同じ位相を定める。

＊ 3 ＊

この節と次の節で問題1(II)についての結果を述べることにします。まず$\mathfrak{M}(n,D)$の元の例を[11]から引き移しておきましょう。

<u>例1</u> (c.f. [11])　M : n次元閉多様体。T^m : m次元

torus。T^m に M に作用し、次の条件をみたす。$\forall p \in M$ に対して、$I_p = \{ g \in T^m \mid g(p) = p \}$ は T^m 全体とは一致しない。$\mathbb{R} \subset T^m$ を dense な部分群とし、g なる T^m 不変な M 上の計量をとり、g'_ε なる M の計量を

$$g'_\varepsilon(V,V) = \begin{cases} g(V,V) & V \perp \mathbb{R}\text{の orbit} \\ \varepsilon \cdot g(V,V) & V /\!/ \mathbb{R}\text{の orbit}. \end{cases}$$

で定める。g_ε で g'_ε を適当な定数倍した計量を指す。すると

$$\begin{cases} (M, g_\varepsilon) \in \mathcal{M}(n,D) \ (\text{for } \varepsilon \in (0,1]), \\ \lim_{\varepsilon \to 0} (M, g_\varepsilon) = M/T^m. \end{cases}$$

この例では T^m の M への作用は必ずしも free ではありませんから、$M/T^m \in \mathcal{C}\ell(\mathcal{M}(n,D))$ には特異点があります。たとえば、$M = S^6 \times S^1$, $m=2$、とすると $M/T^m = S^6/S^1$ これは $\mathbb{C}P^2$ の suspension になります。

逆に $\partial\mathcal{M}(n,D)$ の元の特異点は例1のようにして得られるものに限ります。それを定理として書くために、こう定義します。

<u>定義3</u>　$X \in \mathcal{C}\ell(\mathcal{M}(n,D))$ が <u>*smooth*</u>

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall p \in X \ \exists U : p \text{の} X \text{での近傍}、\exists G_p \subseteq SO(n,\mathbb{R}) \\ \qquad \exists V : \mathbb{R}^n \text{での} 0 \text{の} G_p \text{不変近傍} \end{cases}$$

$\left\{\begin{array}{l} \exists g : V\text{上の}G_p\text{不変計量} \\ \text{s.t.} \\ U\text{は}(V,g)/G_p\text{と isometric。} \end{array}\right.$

定理5　Smoothな元は $\mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k+1}$ の中で d_L に関して dense，特に、$\partial\mathfrak{M}(n,D)$ の元は全てSmoothなものと同相。

これで、$\partial\mathfrak{M}(n,D)$ の元の位相型は局所的には分ったわけですが、大域的にどういう条件が付くかは全く分っていません。

問題2

☆　定義3の $\{$ の条件を満たす空間が、$\partial\mathfrak{M}(n,D)$ の元になるための条件を求めよ。

☆☆　特に、$\partial\mathfrak{M}(n,D)$ の元で、(Globalに) M/G (Gはtorusと有限群の半直積)と書けないものはあるか？

＊４＊

次に $\partial\mathfrak{M}(n,D)$ のsmoothな元 X の計量について考えます。定義から X にはstratification $X = S_0(X) \supset S_1(X) \supset \cdots$ が定まり、$S_i(X) - S_{i+1}(X)$ は $\dim(X) - i$ 次元の(smoothな) Riemann多様体になります。

問：$S_i(X) - S_{i+1}(X)$の曲率は有界か？

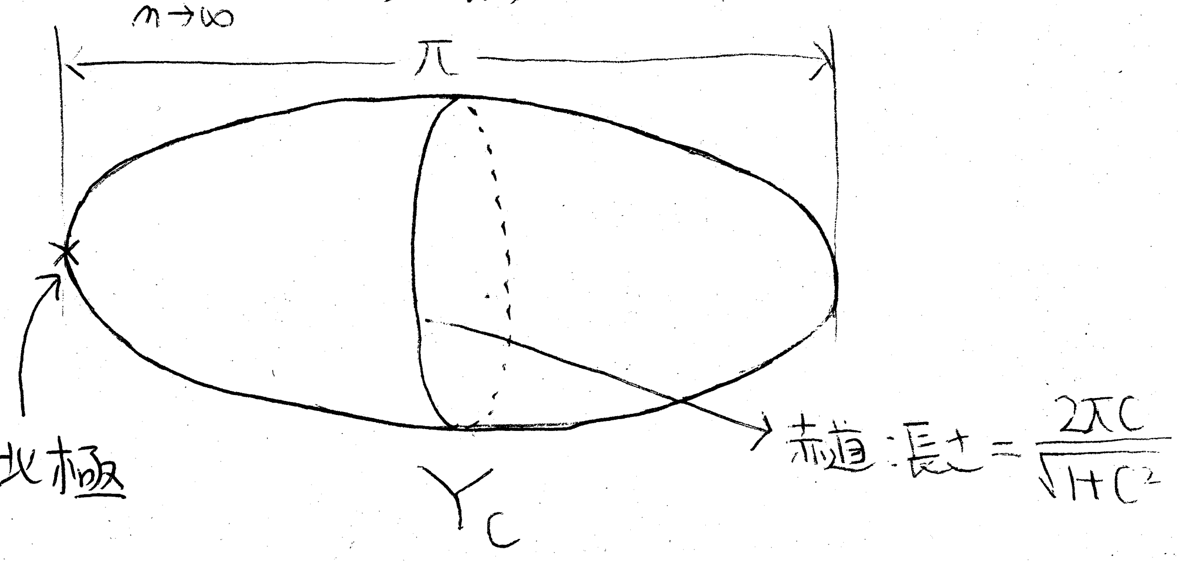
答えはNoです。（次の例はThurstonがsurface of revolutionといっているものに当っていて、私は相馬さんから聞きました。）

<u>例2</u> $\gamma_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & \\ & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3) = \mathrm{Is}_0(S$

（$\mathrm{Is}_0(S^2)$はS^2の向きを保つisometryの作る群を指す。）

$\varphi_{c,n} : S^2\times\mathbb{R} \to S^2\times\mathbb{R} : (x,t) \longmapsto (\gamma_{c/n}(x), t+\frac{1}{n})$

とし、$(S^2\times\mathbb{R})/\langle\varphi_{c,n}\rangle$、を$(S^2\times S^1, g_{c,n})$と書くすると $\lim_{n\to\infty}(S^2\times S^1, g_{c,n}) = Y_c$ は下図のとうり。



図から、Y_cの北極での曲率は$c\to 0$とき∞に近づく。

一方、明らかに、$(S^2\times S^1, g_{c,n}) \in \mathfrak{M}(3, D)$。

この例では、$Y_c \in \mathfrak{X}_1$、$\lim_{c \to 0} Y_c = [0, \pi] \in \mathfrak{X}_2$。つまり、$Y_c$は再びcollapseしています。実は、曲率が発散するのはそういう時に限ります。

<u>定理6</u>　$X_i \in \mathfrak{X}_k - \mathfrak{X}_{k+1}$、$X_i$はsmooth、とし次の3つの条件の内少なくとも1つが成り立つとする。

(1) $\exists p_i \in S_j(X_i) - S_{j+1}(X_i)$ s.t.

(1-a) $d(p_i, S_{j+1}(X_i)) > c$ (iによらない正の数)。

(1-b) p_iでの$S_j(X_i) - S_{j+1}(X_i)$の曲率 $\to \infty$。

(2) $\exists p_i$ s.t. p_iは(1-a)をみたし又

(2-b) p_iでの$S_j(X_i) - S_{j+1}(X_i)$の単射半径 $\to 0$。

(3) $\exists A_i, B_i$　$S_{j_1}(X_i) - S_{j_1+1}(X_i)$ 及び $S_{j_2}(X) - S_{j_2+1}(X)$ の連結成分、s.t.

$d(A_i, B_i - (S_{j_2+1}(X_i)$ の c-近傍$)) \to 0$。

(cはiによらない正の数)。

そうすると、X_iの全ての集積点(d_Hに関する)は$\mathfrak{X}_{k+1}$に含まれる。

(3)は、X_iの2つのsingular locusがぶつかる、という意味になります。

* 5 *

この節と次の節では、問題1(II)を考えます。まず例をつくります。例1ではcollapsing sequenceはtorusの作用から作りましたが、一般には巾零Lie群に関係があります。

<u>例3</u>　G：可解Lie群、$\Gamma \subset G$：cocompactな離散部分群。$G_0 = G$、$G_1 = [G, G]$、$G_2 = [G_1, G_1]$、$G_3 = [G_2, G_1]$、…、$G_{k+1} = [G_k, G_1]$、…とする。g；G上の左不変計量とし、g_εなるG上の左不変計量を、

$$g_\varepsilon(V, V) = \varepsilon^{k \cdot 2^k} g(V, V)$$

(for $V \in T_e(G)$, $V /\!/ G_k$, $V \perp G_{k+1}$)、で定める。すると、$(\Gamma \backslash G, g_\varepsilon) \in \mathcal{M}(n, D)$ for $\varepsilon \in (0, 1]$、で又 $\lim_{\varepsilon \to 0} (\Gamma \backslash G, g_\varepsilon) = \Gamma \backslash G / G_1$。$\Gamma \backslash G / G_1$はflat torusである。このとき，$\Gamma \backslash G$はfibre束$(\Gamma \cap G_1) \backslash G_1 \to \Gamma \backslash G \to \Gamma \backslash G / G_1$、の構造をもつ。

少しわき道にそれますが、例3が示唆するのは、

<u>予想1</u>　C^∞-多様体Mに対して次の2つの条件は同値。

(1)　Mのある有限被覆空間は、可解Lie群のcocompact

な離散部分群による商空間と可微分同相。

(2) M上のRiemann計量の列g_iで、$(M, g_i) \in \mathfrak{M}(n, D)$
$\lim_{i\to\infty}(M, g_i) =$ *flat orbifold*、なるものがある。

例3は(1)⇒(2)を示しています。(2)⇒(1)も後で出てくる定理7からかなり近いところまで確かめられますが、まだ少しGapがあります。

* G *

もとにもどって、もう一種類、collapsingの例をあげます。

<u>例4</u>　G：巾零Lie群、$\Gamma \subset G$：co compactな離散部分群、$M \in \mathfrak{M}(n, D)$、φ_i $(i = 1, 2, \cdots)$：ΓからMのisometryの作る群への準同型、とする。例3のようにして、G上の左不変計量の列g_iを、$(\Gamma\backslash G, \bar{g}_i) \in \mathfrak{M}(n, D)$、$\lim_{i\to\infty}(\Gamma\backslash G, \bar{g}_i) =$ 一点、となるように作る。
$(G \times M, g_i \times g_M)$上に同値関係〜を$(x, y) \sim (\gamma x, \varphi_i(\gamma) y)$で定め、商空間を、$(G \times_\Gamma M)_i$と書く。すると$(G \times_\Gamma M)_i \in \mathfrak{M}(n, D)$、かつ、$\lim (G \times_\Gamma M)_i = T\backslash M$。
ただし、$T = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} \varphi_j(\Gamma)}$。

この場合も、$G\times_{\Gamma}M$ から $\Gamma\backslash M$ への写像があって各 strutum の上で fibre 束になっています。いつもそうだろうというのが次の予想です。

予想2　$M_i\in\mathcal{M}(n,D)$、$\lim_{i\to\infty}M_i=X$、X：smooth、とする。十分大きい i について、$f_i: M_i\to X$ があって次をみたす。

(1)　f_i は、各 $S_k(X)-S_{k+1}(X)$ の上では、fibre 束。

(2)　$p_0\in X-S_1(X)$、$p\in S_k(X)-S_{k+1}(X)$ とする。

(イ)　$f_i^{-1}(p_0)=F$ は infra nilmanifold。つまり、ある有限被覆が巾零 Lie 群の離散部分群による商空間と可微分同相。

(ロ)　定義3の G_p は F に free に作用し、$f_i^{-1}(p)\cong F/G_p$。

一番単純なのが、X が Riemann 多様体の場合で、このときは予想が正しいことを証明出来ます。

定理7（[3]）　$M_i\in\mathcal{M}(n,D)$、$\lim_{i\to\infty}M_i=N$、$N\in\mathcal{M}(n',D')$、とすると、十分大きい i に対して、fibre 束：$f_i: M_i\to N$ があって、fibre は infranilmanifold。

一般の場合の予想2は解けていません。もう一つ分ってい

ないのが大域的な条件で、例えば、

問題3　$F \to M \to N$: infranil manifold F をfibreにもつfibre束、とするとき、M上の$\mathcal{M}(n,D)$に含まれる計量の列g_iで$\lim_{i\to\infty}(M, g_i) = N$となるものが存在するための条件を求めよ。

最近、W. Zillerから指適されましたが、fibre束の構造群を有限次元のCompact Lie群にReduce出来れば、fibreをtotally geodesicにとることで、baseに収束する計量の列が作れるそうです。そうでない一番簡単な場合は、

問題4　S^1上のAnosovなMonodromyをもつT^2束MはS^1へcollapseするか。

＊ 7 ＊

これまでにのべたことを使うと、例えば、S^3のcollapseのしかたは分ります。

$(S^3, g_i) \in \mathcal{M}(3, D)$, $\lim_{i\to\infty}(S^3, g_i) = X$とします。

(Case 1)　$\dim X = 3$。　この場合は、$X \cong S^3$。

(Case 2)　$\dim X = 2$。　このとき、Xは2次元の

orbifold で、collapsing は S^3 に Seifert fibre space の構造を入れるやり方に対応します。

(Case 3) $X = S^1$。すると定理7から S^3 は S^1 上の T^2 又はクラインbottle束になりますが、それは不可能です。

(Case 4) $X = [0, T]$。この場合は collapsing は S^3 を2つの solid Torus に分けるやり方に対応しています。

(Case 5) $X = p.t.$。すると[8]より S^3 は infranilmanifold になりますが、そうではありません。

＊ 8 ＊

Collapsing については Cheeger と Gromov による結果があります。ここでそれについて簡単にふれます。詳しくは、preprint [1] とその内出ると思われる[2] そして解説[11] を見て下さい。

まず、彼らが F-structure と呼んでいるものを定義します。

定義4 ([1], [11])

多様体Mが F-structure をもつ

$\Longleftrightarrow$ $\exists \{U_i\}$: Mの局所有限な開被覆、

$\exists \pi_i : \tilde{U}_i \to U_i$: U_i の有限被覆、

$\exists T^{m_i}$: Torus, $\tilde{U}_i$ 上に作用。

s.t.

(1) $\forall p \in \tilde{U}_i$ $I_p = \{g \in T^{m_i} \mid g(p) = p\}$ は T^{m_i} とは一致しない。

(2) $\pi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ は T^{m_i} 不変。

(3) Fibre 積 $\tilde{U}_i \times_{U_i \cap U_j} \tilde{U}_j$ 上に induce される T^{m_i} と T^{m_j} の作用は交換可能。(つまり $g \in T^{m_i}$, $h \in T^{m_j}$, $x \in \tilde{U}_i \times_{U_i \cap U_j} \tilde{U}_j$ のとき $g(h(x)) = h(g(x))$)。

<u>定理8</u>([1]) MがF-structureをもつ

$\Rightarrow$ $\exists g_i$: M上の Riemann 計量の列
s.t. (1) $(M, g_i) \in \mathcal{M}(n, \infty)$
(2) $\forall p \in M$, p での (M, g_i) の単射半径 $\to 0$。

逆は、

<u>定理9</u>([2]) $\exists \varepsilon(n)$: 次元にのみよる正の数 s.t.

$(M, g) \in \mathcal{M}(n, \infty)$
$\forall p \in M$: p での (M, g) の単射半径 $< \varepsilon(n)$

$\Rightarrow$ M は F-structure をもつ。

定理9の証明は、$p \in M$について、pの近傍を、単射半径が1になるようにrescaleしてそれをflatなもので近似することによってなされるそうです。定理8,9で扱われているcollapsingは直径が発散することを許している点で、前節までで扱ったものより一般的です。直径を有界に保つcollapsingについて、F-structureに相当するのは、polarized F-structureと呼ばれるものです。定義は[1]、[11]にあります。

<u>問題5</u>　多様体にF-structureが存在するための、位相幾何学的条件を求めよ。

＊　9　＊

最後に最近気が付いた応用を一つ書いて終りにします。

$$
a_0(n, D, C) = \left\{ X/\Gamma \;\middle|\; \begin{array}{l} X:\text{contractibleで完備な}n\text{次元} \\ \quad \text{Riemann多様体} \\ \Gamma: X\text{にproperly discontinuousに作用} \\ \quad \text{するisometryの群.} \\ |X\text{の断面曲率}| < C \\ X/\Gamma\text{の直径} < D \end{array} \right\}
$$

定理10　$\forall n, D, C_n$ $\exists$ $C_{n-1}, C_{n-2}, \cdots$ s.t.
$\bigcup_{k=0}^{n} \mathfrak{a}_0(k, D, C_k)$ の d_L についての閉包は、d_H について compact。

いいかえると、$X_i/\Gamma_i \in \mathfrak{a}_0(n, D, C)$、$\lim_{i\to\infty} X_i/\Gamma_i = Y$ ならば、Y も $\mathfrak{a}_0(n', D', C')$ の元と可微分同相になります。定理10と7から、

定理11　$\forall n, D$ $\exists$ 有限個の aspherical orbifolds $X_1, \cdots X_N$, s.t.
$\forall M \in \mathfrak{a}_0(n, D, 1)$ $\exists$ $M \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_k} M_k$
s.t. ○ $M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1}$ infra nilmanifold を fibre にもつ（orbifold の意味での）fibre 束。
○ M_k はある X_i と可微分同相。

References

[1] J.Cheeger & M.Gromov, Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded I, preprint.

[2] ———————————— II, in preparation.

[3] K.Fukaya, Collapsing Riemannian manifolds to lower dimensional one, preprint.

[4] K.Fukaya, On a compactification of the set of Riemannian manifolds with bounded curvatures and diameters, to appear in the proceding of the Taniguchi symposium "Curvature and topology of Riemannian manifolds" 1985.

[5] K.Fukaya, A boundary of the set of Riemannian manifolds with bounded curvarures and diameters, in preparation.

[6] K.Fukaya, A compactness theorem of a set of aspherical manifolds, in preparation.

[7] R.Green & H.Wu, Lipschitz convergence of Riemannian manifolds, preprint.

[8] M.Gromov, Almost flat manifolds, J. of Diff. Geometry 13 (1978), p 231-241.

[9] M.Gromov,J.Lafontaine & P.Pansu, Structure métrique pour les variétés riemannienne, Cedic/Fernand Nathan (1981).

[10] A.Katsuda, Gromov's convergence theorem and its application, to appear in Nagoya J. Math.

[11] P.Pansu, Effondrement dés variétés riemanniennes [d'après J.Cheeger & M.Gromov], Séminaire Bourbaki 36e année,1983/84, n°618.

[12] S.Peters, Cheeger's finiteness theorem for diffeomorphism classes of Riemannian manifolds, J. reine. angew. Math. 349 (1984) p 77-82.