数理解析研究所講究録
第568巻 1985年 128-136

Bad Suborbifolds について.

九大・理 加藤十吉(Mitsuyoshi Kato).

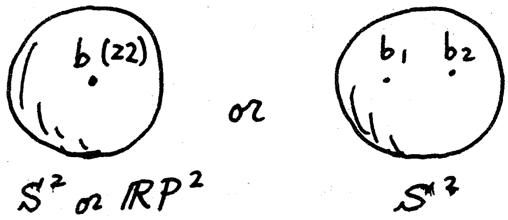
§1. 定義　orbifold O_X の suborbifold O_Y とは,
$Y \subset X$ であり, Yの各点 y で, OXの点yでの local chart $(G_y, \mathbb{R}^n)$ において,
$\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 L 及び Lを不変にする G_yの元の全体のなす部分群 G'_y に対し, L/G'_y が yのYでの開近傍 となり, Lを固定する G'_y の元全体のなす正規部分群で G'_y を割った群を $\widetilde{G}_y$ とするとき, $(\widetilde{G}_y, L)$ が O_Y の点 yでの local chart となるときをいう。

とくに, $\dim Y = 2$ のとき, O_Y 又は Y のことを O_X の surface という。以下, ΣX は cod. 2 以上とする。

予想 (Thurston [Th])　Bad n-orbifold $(n \geq 3)$ は Bad surface を含む.

本質的には Thurston によるこの予想が $n \geq 4$ で一般には成立しないことを §2 で示す。

この予想は、組合せ群論的に非常に困難な bad であることの判定条件を直観的に明快な bad surface

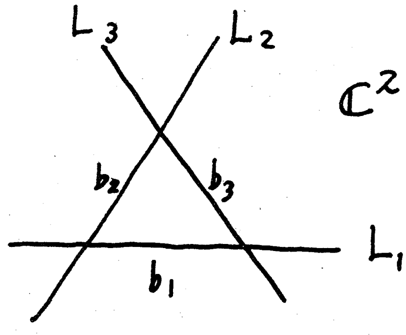


$(\, b_1 > b_2 \geq 2 \,)$

の存在に帰着させようとするもので非常に好都合である。

§3では、$\mathbb{C}P^2$ の weighted line configuration からえられる complex algebraic orbisurface の abelian uniformization problem で、この種の予想の成立することを示す。

§2. 反例. ([Ka 1]). $\mathbb{C}^2$ の中で一般の位置にある3直線 L_1, L_2, L_3 を考える。

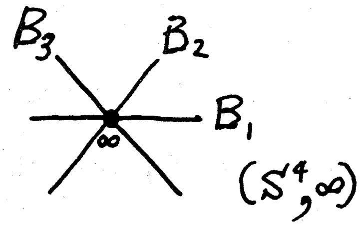


$\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ とし、

$$p_i = L_j \cap L_k \,,$$

$$\overset{\circ}{L}_i = L_i - \{p_j, p_k\}$$

とおく。$\mathbb{C}^2$ の1点コンパクト化として、$S^4 = \mathbb{C}^2 \cup \{\infty\}$ を考え、例えば、立体射影により、



$$B_i = L_i \cup \{\infty\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

は ∞ で、互いに transversal に交わるとしてよい。

b_1, b_2, b_3 を2以上の自然数とする。$S^4 - \bigcup_{i=1}^{3} B_i$ 上非分岐, $\mathring{L}_i$ 上で b_i 分岐する (p_i で $b_j \cdot b_k$ 分岐する) orbifold が ∞ 迄拡張できる為の必要十分条件は,

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} > 1 \qquad (*)$$

となる。こうして決まる orbifold を $(S^4, \sum_{i=1}^{3} b_i B_i)$ と表す。この orbifold は, Bad であり, しかも, Bad surface を含まぬことを示そう。

$E = S^4 - \bigcup_{i=1}^{3} B_i$ の基本群は abel 群 $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ で, 各 B_i の normal loop μ_i で生成される。

与えられた orbifold が good であれば, その普遍分岐被覆は, 自然な全射準同型 $\pi_1(E) = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}+\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/b_1 + \mathbb{Z}/b_2 + \mathbb{Z}/b_3$ に associate された E の covering の S^4 上での Fox completion $W \to S^4$ となる。W が多様体となるということが $(S^4, \Sigma b_i B_i)$ が good ということであった。

ところで, ∞ での orbifold の local chart の群の位数は, Schwarz 3角群 $T(b_1, b_2, b_3)$ (条件(*)のもとで, これは正多面体群で, その位数を c とするとき, c^2 となる。

ちなみに,

$$c = \begin{cases} 2\cdot(2m+1), & \text{if } \{b_1, b_2, b_3\} = \{2, 2, 2m+1\} \\ 2\cdot\langle b_1, b_2, b_3\rangle, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

但し, $\langle b_1, b_2, b_3\rangle$ は b_1, b_2, b_3 の最小公倍数である。

したがって, $C^2 > b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$ が成立する。

∞ で uniformize するのに, C^2-fold cover が必要であるにもかゝわらず, $b_1 b_2 b_3$ 重分岐被覆 しかとれないので, $(S^4, \Sigma b_i B_i)$ は good でありえない。

次に, bad surface が存在しないことを示す。

$(\mathbb{C}^2, \Sigma b_i L_i)$ は good であるから, もし, bad surface Y が存在したとすると, 必らず ∞ を通る。

suborbifold の定義から, Y は各 B_i と transversal に交わる。

Y の ∞ での local chart の群の位数は 上の C に等しいことがわかる。

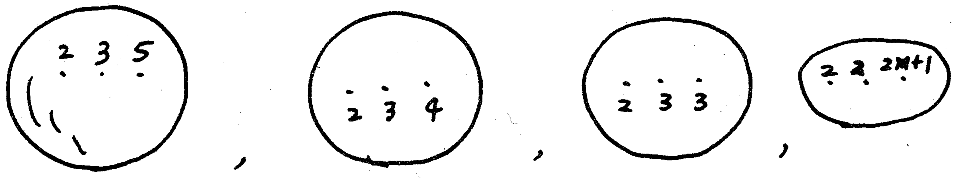
ところで, S^4 の中で 2つの smooth surfaces Y と B_i の mod 2 intersection number は 0 であるから, $Y \cap B_i - \{\infty\} \neq \emptyset$ となる。$Y \cap \overset{\circ}{L}_i \ni q$ での Y の local chart の群の位数 は 明らかに b_i である。$Y \ni p_i$ であれば, それは $\langle b_j, b_k \rangle$ となる。

いずれにせよ, $Y \cap (\cup B_i)$ の各点は O_Y の分岐点となる。明らかに, $Y \cap (\cup B_i)$ は 3 点以上を含むから, O_Y は bad であることに矛盾する。よって, $(S^4, \Sigma b_i B_i)$ は bad surface を含みえない。

4.

§3. Good abelian orbifold の例.

orbifold O_X が good で, しかも, 変換群がアーベル群であるような manifold branched cover をもつとき, good abelian orbifold という。 good でも good abelian でない例として,



等々がある。一般に, X が閉Riemann面(向きづけ可能な閉曲面)のとき, $\Sigma X=\{p_1,\cdots,p_r\}$, 分岐divisorを $\sum_{i=1}^{r} b_i p_i$ としたとき, O_X が abelian uniformizable (good abelian orbifold であること)の必要十分条件は, O_X が good であり, $i=1,\cdots,r$ について,

$$b_i \mid \langle b_1,\cdots,b_{i-1},b_{i+1},\cdots,b_r\rangle$$

が成立することである。通常の基本群とホモロジー群の関係のように, $\pi_1(O_X)=(O_X$ の universal uniformization の群) の abel 化が universal な abelian uniformization の群に同型となることが一般に示せる.

さて, $L_1,\cdots,L_r$ を $\mathbb{C}P^2$ の複素直線とし, $b_1,\cdots,b_r$ を2以上の自然数とし, weighted line configuration

$(\mathbb{C}P^2,\ \Sigma b_i L_i)$ について考えよう。$\bigcup_{i=1}^{r} L_i$ の2重点以外の多重点のことを，こゝでは，特異多重点と呼ぶ。

$\{p_1, \cdots, p_s\}$ を特異多重点の全体とし，$\mathbb{C}P^2$ をそこで blowing up して得られる複素曲面を X とし，L_i の proper transform を L_i'，p_j に対応する例外曲線を E_j とする。

$(\cup L_i') \cup (\cup E_j)$ は non-singular rational curves からなり，特異点は transversal な2重点である；simply normal crossing である。各 p_k に2以上の自然数 c_k を指定し，divisor $\Sigma b_i L_i' + \Sigma c_k E_k$ によって，§2の様に自然に X 上の複素 orbisurface O_X が定まる。

<u>Theorem</u>. O_X が good abelian orbifold

$\iff \begin{cases} O_{L_i'},\ O_{E_j} \quad (i=1,\cdots,r;\ j=1,\cdots,s) \text{ が so である。} \\ \text{各 } p_j \text{ について，} c_j \mid \langle b_{i_1}, \cdots, b_{i_m} \rangle \quad (p_j = L_{i_1} \cap \cdots L_{i_m})\text{。} \end{cases}$

（証明）$\Rightarrow$ は容易であるから略し，$\Leftarrow$ を示そう。

$B_i = L_i'$ $(1 \le i \le r)$，$B_{r+j} = E_j$，$b_{r+j} = c_j$ $(1 \le j \le s)$

とおき，各 B_k に normal loop μ_k を1つとる。

$H_1(X - \bigcup_{k=1}^{r+s} B_k) = H_1(\mathbb{C}P^2 - \bigcup_{i=1}^{r} L_i) = \mathbb{Z}(\mu_1) + \cdots + \mathbb{Z}(\mu_r) / \mu_1 + \cdots + \mu_r = 0$,

$\mu_{r+j} + \mu_{i_1} + \cdots + \mu_{i_m} = 0 \quad (p_j = L_{i_1} \cap \cdots \cap L_{i_m},\ j=1,\cdots,s)$

に注意する。[Ka 1] により，O_X が good abelian であ

ることを示すには，各２重点 $x \in B_i \cap B_j$ で，準同型

$$\mathbb{Z}(\mu_i)+\mathbb{Z}(\mu_j) \longrightarrow G=\mathbb{Z}(\mu_1)+\cdots+\mathbb{Z}(\mu_r) \Big/ \begin{smallmatrix} \mu_1+\cdots+\mu_r=0 \\ b_1\mu_1=\cdots=b_{r+s}\mu_{r+s}=0 \end{smallmatrix}$$

の kernel が $\mathbb{Z}(b_i\mu_i)+\mathbb{Z}(b_j\mu_j)$ となることを示せばよい。

B_k 上の２重点の全体を $\{x_1,\cdots,x_q\}$ とし，x_t の $\mathring{B}_k=B_k-\{x_1,\cdots,x_q\}$ での normal loop を ν_t とする。

$$H_1(\mathring{B}_k)=\mathbb{Z}(\nu_1)+\cdots+\mathbb{Z}(\nu_q)\big/\ \nu_1+\cdots+\nu_q=0$$

であり，O_{B_k} の分岐 divisor を $\sum_{t=1}^{q} d_t x_t$ とするとき，O_{B_k} の abelian universal branched covering の群は

$$G_k=\mathbb{Z}(\nu_1)+\cdots+\mathbb{Z}(\nu_q) \Big/ \begin{smallmatrix} \nu_1+\cdots+\nu_q=0 \\ d_1\nu_1=\cdots=d_q\nu_q=0 \end{smallmatrix}$$

で与えられる。したがって，$B_k=E_{k-r}$ のとき，

$$\mu_j \longmapsto \begin{cases} \nu_t & ,\quad x_t=B_k\cap B_j \\ 0 & ,\quad B_k\cap B_j=\emptyset \text{ or } B_j=B_k \end{cases}$$

で定まる全射準同型 $H_1(X-\bigcup_{j=1}^{r+s}B_j)\rightarrow H_1(\mathring{B}_k)$ は自然な全射準同型 $G\rightarrow G_k$ を誘導し，$O_{E_{k-r}}$ が abelian good から，$p_{k-r}=L_{i_1}\cap\cdots\cap L_{i_m}$ のとき，$\mu_{i_1},\cdots,\mu_{i_m}$ が G_k の中で order $b_{i_1},\cdots,b_{i_m}$ をもつことがわかる。同様に，$B_k=L'_k$ で，L'_k 上に特異多重点のない場合に $\mu_1,\cdots,\check{\mu}_k,\cdots,\mu_r$ が order $b_1,\cdots,\check{b}_k,\cdots,b_r$ をもつことが示せる。いずれも，$\mu_k=1$ として，つまり，$G/\mu_k=1$ の中でその order をもつことに注意すると，$\bigcup_{i=1}^{r}L_i$ の２重点で，$\ker(\mathbb{Z}(\mu_i)+\mathbb{Z}(\mu_j)\rightarrow G)=\mathbb{Z}(b_i\mu_i)+\mathbb{Z}(\mu_j b_j)$ が成立する。また，すべての直

L_i について，μ_i $(1\le i\le r)$ の order が G/μ_{r+j} ($p_j\in L_i$ の特異多重点）で b_i であることも示された。

したがって，特異多重点 $p_j=L_{i_1}\cap\cdots\cap L_{i_m}$ を含む L_k について，$B_k=L_k'$ とし，μ_{r+j} が $G/\mu_k=1$ の中で order b_{r+j} をもつことを示せばよい。

$G/\mu_k=1$ は，$\mu_1,\cdots,\check{\mu}_k,\cdots,\mu_r$ で生成され，各 μ_i の order は b_i だから，$b_{r+j}\mid\langle b_{i_1},\cdots,\check{b}_k,\cdots,b_{i_m}\rangle$ 及び $b_{r+j}\mid\langle\{b_1,\cdots,b_r\}-\{b_{i_1},\cdots,b_{i_m}\}\rangle$ を示せばよい。O_{E_j} が good abelian より，

$$\langle b_{i_1},\cdots,b_{i_m}\rangle=\langle b_{i_1},\cdots,\check{b}_{i_\ell},\cdots,b_{i_m}\rangle$$

が成立するから，$b_{r+j}\mid\langle b_{i_1},\cdots,b_{i_m}\rangle$ より，

$b_{r+j}\mid\langle b_{i_1},\cdots,\check{b}_{i_\ell},\cdots,b_{i_m}\rangle$，とくに，$b_{r+j}\mid\langle b_{i_1},\cdots,\check{b}_k,\cdots,b_{i_m}\rangle$ が成立する。O_{B_k} が good abelian であることから，

$b_{r+j}\mid\langle d_1,\cdots,d_q\rangle$ が成立する。とくに，B_k 上の2重点 x_t が特異多重点 $p_{j'}=L_{i_1'}\cap\cdots\cap L_{i_n'}$ に対応するものであれば，

$$b_{r+j'}=d_t\mid\langle b_{i_1'},\cdots,b_{i_n'}\rangle$$

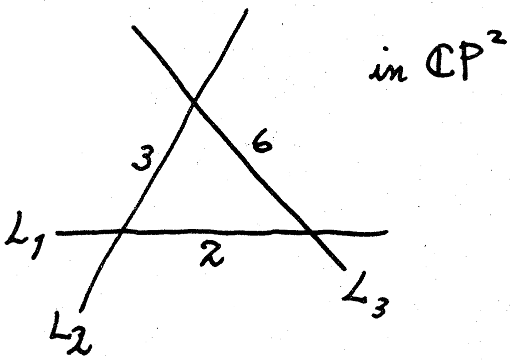
が成立する。L_k は他のすべての直線と交わるので，結局，

$$b_{r+j}\mid\langle\{b_1,\cdots,b_r\}-\{b_{i_1},\cdots,b_{i_m}\}\rangle$$

が示された。（証明了）

8.

例. $\mathbb{C}P^2$ 内の一般の位置にある3直線 L_1, L_2, L_3 に対し, $(\mathbb{C}P^2, 2L_1+3L_2+6L_3)$ を考える。



各 O_{L_i} は bad であるから, これは bad abelian である。
しかし, μ_1, μ_2, μ_3 は

$$\frac{\mathbb{Z}(\mu_1)+\mathbb{Z}(\mu_2)+\mathbb{Z}(\mu_3)}{\mu_1+\mu_2+\mu_3=2\mu_1=3\mu_2=6\mu_3=0}$$

の中で, order 2, 3, 6 をもっている。

(注). orbifold O_X において, $\pi_1(X-\Sigma X)$ が abelian なら, good ⇔ good abelian である。§2 の反例はこの場合でも Thurston 予想が不成立であることを示している。Theorem の条件は bad abelian topological surface を含まぬという条件でおきかえられる。

References

[Ka1] M. Kato, On uniformization of orbifolds, (to appear).

[Th] W. Thurston, The Geometry and topology of 3-manifolds, preprints (1978, Princeton Univ.).