数理解析研究所講究録
第 568 巻 1985 年 137-148

Open 3-manifolds and an Engulfing Theorem

広島大理 垣水 修 (Osamu Kakimizu)

non-compact 3-mfd には，compact のときには おきないような，奇妙な現象があらわれます。 たとえば，Whitehead [13] は，irreducible contractible な open 3-mfd で $\mathbb{R}^3$ とは異なるものを見付けました。この例は基本群の pathology ではなく，end の pathology を示すものです。 一方，P. Scott は，non-compact 3-mfd の基本群は，それが有限生成ならば，compact 3-submfd によって実現されることを示しました：

Theorem (P. Scott [9, 10]). W^3 ; non-compact 3-mfd s.t. $\pi_1(W)$: 有限生成

$\Longrightarrow$ $W \supset {}^{\exists}N^3$; compact 3-submfd s.t.

$\pi_1(N) \xrightarrow[\cong]{} \pi_1(W)$

以下は，Scottの定理におけるNのgeometricな性質およびWのendとNとの関係について調べてみたことです。

$\star$ PL categolyにおいて議論する．

$\star$ "3-mfd"はすべてconnectedでorientableとする．

$\star$ W^3は，non-compact，irreducible 3-mfdで，∂Wはcompact，$\pi_1(W)$は有限生成であるとする．

Definition $W^3 \supset N^3$：3-submfdがWの芯（core）であるとは，

(1) N^3；compact irreducible

(2) $\partial N \supset \partial W$

(3) $\pi_1(N) \xrightarrow[\cong]{} \pi_1(W)$。

$\star$ W，Nは共にasphericalだから，NはWのdeformation retractである。

$\star$ $\pi_1(W)$がfree groupならば，$\partial W = \emptyset$で，Nはhandlebodyである。

Theorem 1. Wはつねにcoreをもつ。

Proposition 2. $W \supset N$ を core とし，$Cl(W-N) \supset U$ をひとつの component とすると，

(1) $\partial U = U \cap N$ は ∂N のひとつの component からなる．

(2) U の end の数はひとつ．

(3) さらに，∂U が W で incompressible ならば，∂U は U の deformation retract である．

(4) $\pi_1(W)$: indecomposable ($\neq 0, \mathbb{Z}$) のとき，∂N の各 component は W で incompressible．

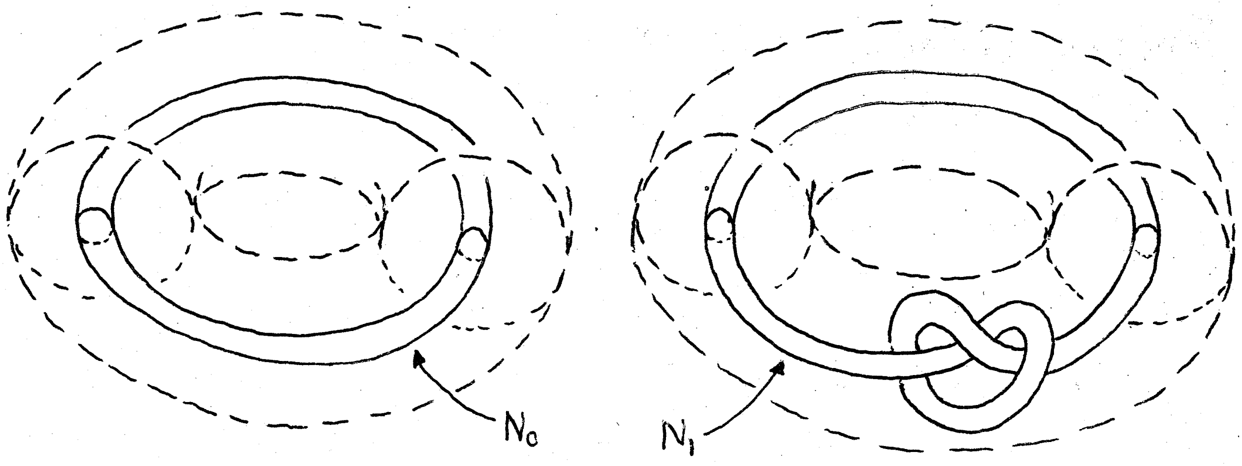
Theorem 3. $\pi_1(W)$: indecomposable ($\neq \mathbb{Z}$) のとき，$W \supset N_0, N_1$ をふたつの core とすると，

$$\exists h : W \times [0,1] \longrightarrow W \quad \text{isotopy} \quad \text{s.t.}$$

$$h_0 = id, \quad h_1(N_0) = N_1$$

$$h_t | (W-K) \cup \partial W = id \quad (\exists \text{compact poly. } K \subset W).$$

✱ $\pi_1(W)$ が $\mathbb{Z}$ または decomposable のときは，Th. 3 は成りたたない；たとえば，$W = S^1 \times \mathbb{R}^2$ のとき，図の N_0，N_1 は共に W の core である．



$W = S^1 \times \mathbb{R}^2$

Theorem 4. $W \supset N_0, N_1$ をふたつの core とする.

$$\Longrightarrow \quad N_0 \approx N_1 .$$

Th. 3, 4 を示すには、つぎの定理が必要です.

Theorem 5. M^3 : compact, irreducible 3-mfd.
$M \supset N_0, N_1$: compact irreducible 3-submfds s.t.
$N_0 \cap \partial M = N_1 \cap \partial M$ ($=\emptyset$ 可) は, ∂M のいくつかの component からなり, inclusion $\alpha_i : N_i \hookrightarrow M$ に対して,

$$(\alpha_i)_* : \pi_1(N_i) \longrightarrow \pi_1(M) \text{ mono.} \quad (i = 0, 1).$$

さらに, $\mathrm{Im}(\alpha_0)_*$ と $\mathrm{Im}(\alpha_1)_*$ が $\pi_1(M)$ で conjugate で, $\pi_1(N_0)$ $(\cong \pi_1(N_1))$: indecomposable $(\neq \mathbb{Z})$.

$$\Longrightarrow \quad \exists h : M \times [0,1] \longrightarrow M \text{ isotopy s.t.}$$
$$h_0 = id, \quad h_1(N_0) = N_1, \quad h_t | \partial M = id.$$

また，Th. 5 からつぎの定理が証明できます：

Squeezing Theorem (Jaco and Shalen [5]).

M^3 : compact irreducible 3-mfd.

$M \supset N_0, N_1$: compact irreducible 3-submfds s.t.

$T_i \equiv N_i \cap \partial M$ ($= \emptyset$ 可) は ∂M のいくつかの component からなり，T_i と $\mathrm{Fr} N_i = \partial N_i - T_i$ ($\neq \emptyset$) は M で incompressible ($i = 0, 1$). $T_0 \subset T_1$. このとき，

$$\exists f : N_0 \times [0,1] \longrightarrow M \text{ homotopy s.t.}$$
$$f_0 = id, \quad f_1(N_0) \subset N_1$$
$$\Longrightarrow \quad \exists h : M \times [0,1] \longrightarrow M \text{ isotopy s.t.}$$
$$h_0 = id, \quad h_1(N_0) \subset N_1 - \mathrm{Fr} N_1, \quad h_t | \partial M = id.$$

つぎに W の end と core との関係について考えます．まず，W の end に boundary を付けて compact 3-mfd にできるための条件として，つぎの定理があります：

Theorem (Tucker [11]).

$W \approx M^3 - X$, $\exists M^3$: compact irreducible 3-mfd,
Xは∂Mのいくつかのcomponent.

$\Longleftrightarrow$ $W \supset {}^\forall K$: compact subpolyhedron
π_1($W-K$の各component): 有限生成.

Theorem 6. $\pi_1(W)$: indecomposable ($\neq \mathbb{Z}$)のとき,
$W = \bigcup_i V_i^3$ s.t.

(1) $W \supset V_i$: compact, irreducible 3-submfd

(2) $V_i \subset V_{i+1} - \mathrm{Fr}\, V_{i+1}$

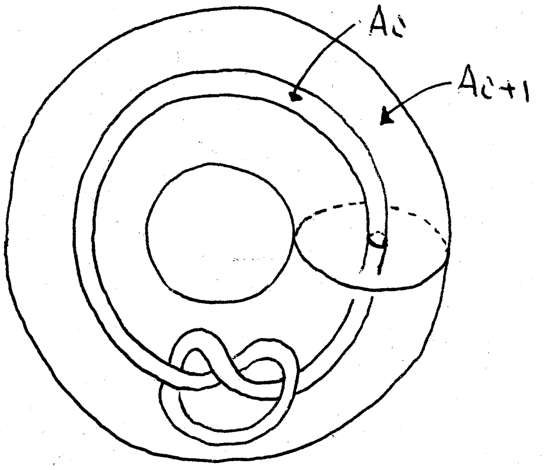
(3) $V_i = N_i \cup$ (1-handles) s.t.
N_iはWのcore, $N_i \subset N_{i+1} - \mathrm{Fr}\, N_{i+1}$.
$\mathrm{Cl}(N_{i+1} - N_i) \approx \mathrm{Fr}\, N_i \times [0,1]$.

★ Th. 6で, $\pi_1(W) = 0$のときは, つぎの
McMillan, Jr.の定理[6]になります:
"irreducible contractible open 3-mfdは,
handlebodyの増大列のunionとして表わせる."

★ $\pi_1(W)$: indecomposable ($\neq \mathbb{Z}$)のとき, Wの
endにboundaryをつけてcompact 3-mfdに

できるための条件は，Wがcoreの増大列のunionとして表わせることである。

★ $\pi_1(W)$が$\mathbb{Z}$またはdecomposableのときは，Wがcoreの増大列のunionであっても，一般にはendはねじれている。 たとえば，



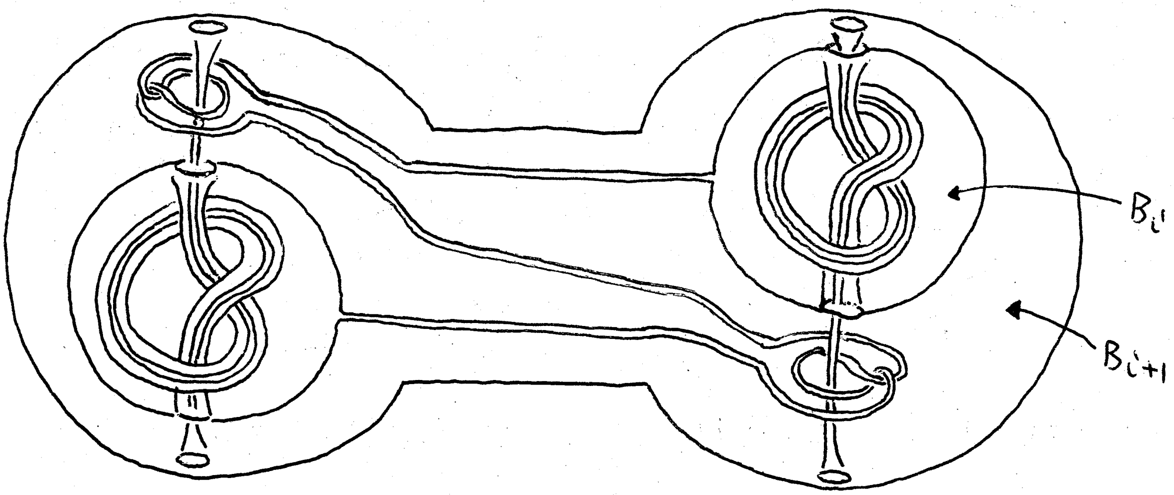
$$W_1 = \bigcup_i A_i$$

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_i \subset \cdots$$

$$A_i \approx S^1 \times D^2$$

$$\pi_1(W_1) \cong \mathbb{Z}$$

A_iはすべてW_1のcore.



$W_2 = \bigcup_i B_i$， $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_i \subset \cdots$。$B_i$は$W_2$のcore.

$B_i \approx$ (trefoil knotのexterior)ふたつのdisk sum

$\pi_1(W_2) \cong \pi_1(S^3 - \text{trefoil knot}) * \pi_1(S^3 - \text{trefoil knot})$。

★ endのねじれたopen 3-mfdのその他の例

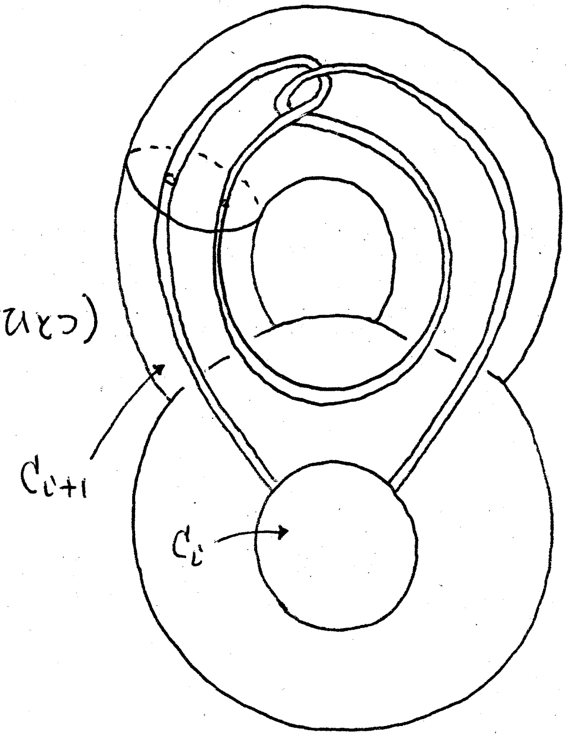
◎ Whiteheadの例 [13].

$W_3 = \bigcup_i C_i$

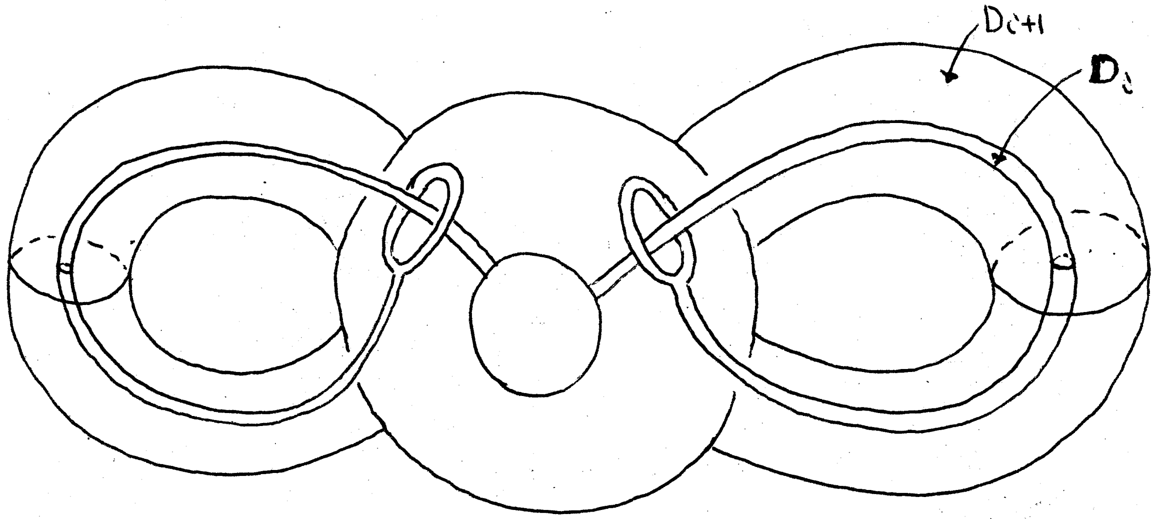
$C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \cdots$.

$C_i \approx$ (3-cell) $\cup$ (1-handleひとつ)

$\pi_1(W_3) \cong 0$.



◎ Fox-Artinの例 [2].

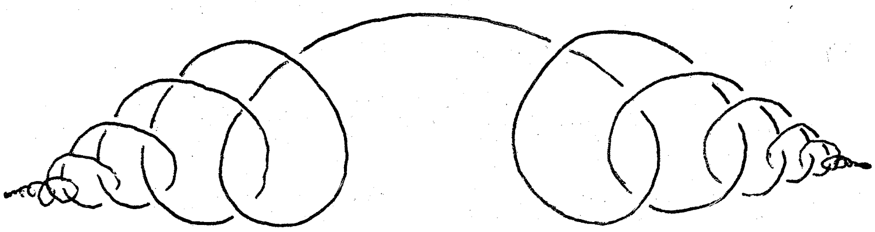


$W_4 = \bigcup_i D_i$, $D_1 \subset D_2 \subset \cdots$. $\pi_1(W_4) \cong 0$.

$D_i \approx$ (3-cell) $\cup$ (1-handleふたつ).

W_4は、つぎのwild arc $X \subset S^3$のcomplementである.

X

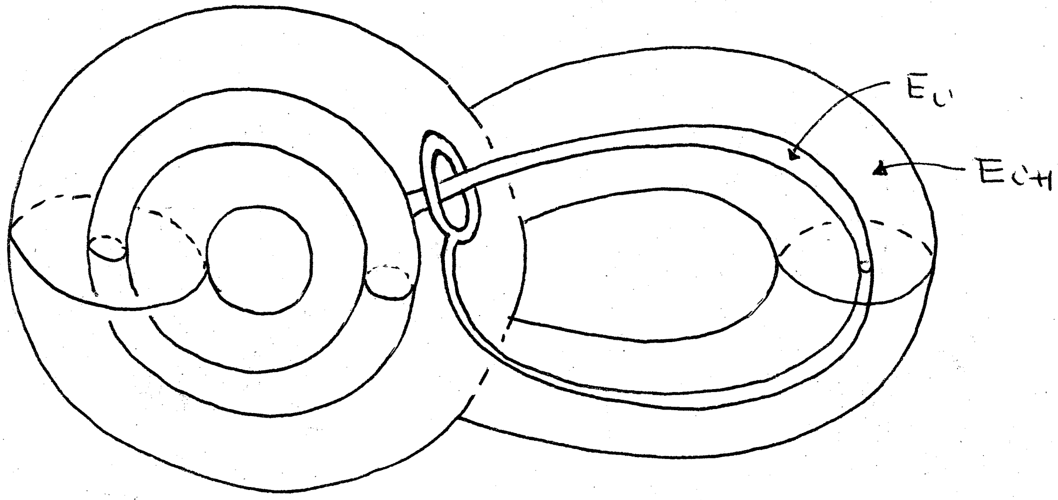


$W_4 \approx S^3 - X$

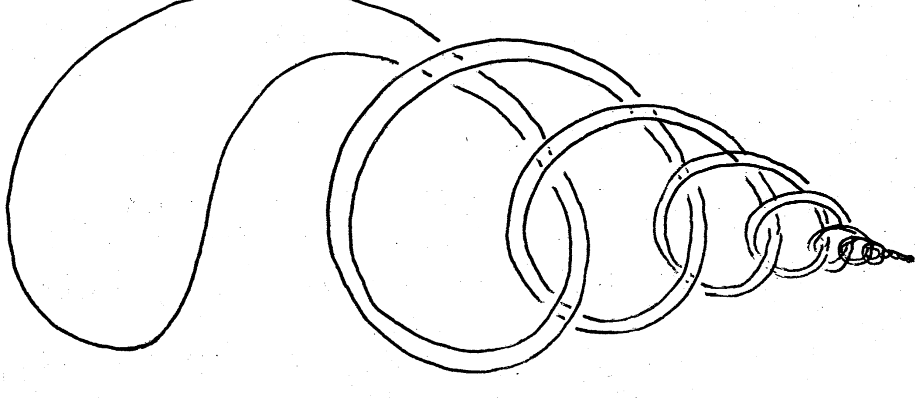
◎ $W_5 = \bigcup_i E_i$, $E_1 \subset E_2 \subset$ ----. $\pi_1(W_5) \cong \mathbb{Z}$.

$E_i \approx$ (solid torus) $\cup$ (1-handle ひとつ).

$W_5 \approx S^3 - Y$, $S^3 \supset Y$: wild knot.



Y



Theorem 7 (Engulfing Theorem).

M^3 : compact irreducible 3-mfd.

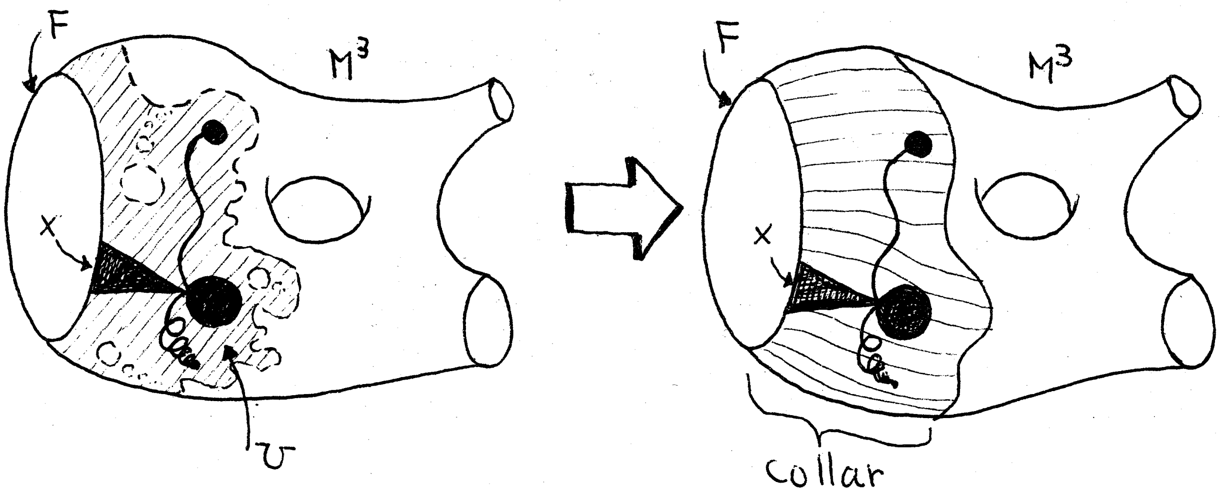
$\partial M \supset F^2$: incompressible component.

$M \supset X$: compactum, $X \cap \partial M \subset F$.

このとき、 Xを含むFのcollarが存在する

$\Longleftrightarrow M \supset {}^{\exists} U \supset F \cup X$ s.t. $\pi_1(F) \xrightarrow[\cong]{} \pi_1(U)$.

(U: connected open subset)



★ Th. 7 は M が non-compact のときには、成りたたない。 たとえば、

M^3 : non-compact, irreducible 3-mfd s.t.

$\partial M = F$: connected closed surface, $\pi_1(F) \xrightarrow{\cong} \pi_1(M)$

さらに $M \not\approx F \times [0,\infty)$ のとき、compact poly. $X \subset M$ で、Xを含むFのcollarが存在しないものがある。

References

[1] D.Epstein, Ends, Topology of 3-manifolds and related topics, ed. M.K.Fort (Prentice-Hall, 1962), 110-117.

[2] R.H.Fox and E.Artin, Some wild cells and spheres in three dimensional space, Ann. of Math. 49 (1948), 979-990.

[3] D.E.Galewski, J.G.Hollingsworth and D.R.McMillan,Jr., On the fundamental group and homotopy type of open 3-manifolds, General Topology and its Applications 2 (1972), 299-313.

[4] W.Haken, Some results on surfaces in 3-manifolds, Studies in Modern Topology, Math. Assoc. Amer., distributed by Prentices Hall (1968), 34-98.

[5] W.H.Jaco and P.B.Shalen, Seifert fibered spaces in 3-manifolds, Memoirs of Amer. Math. Soc. 220 (1979).

[6] D.R.McMillan,Jr., Cartesian products of contractible open manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 510-514.

[7] ————, Some contractible open 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 373-382.

[8] ——— and T.L.Thickstun, Open three-manifolds and the Poincaré conjecture, Topology 19 (1980), 313-320.

[9] G.P.Scott, Finitely generated 3-manifold groups are finitely presented, J.London Math. Soc. 6 (1973), 437-440.

[10] ———, Compact submanifolds of 3-manifolds, J. London Math. Soc. 7 (1973), 246-250.

[11] T.Tucker, Non-compact 3-manifolds and the missing-boundary problem, Topology 13 (1974), 267-273.

[12] F.Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. 87 (1968), 56-88.

[13] J.H.C.Whitehead, A certain open manifold whose group is unity, Quart. J. Math. Oxford 6 (1935), 268-279.