数理解析研究所講究録
第 568 巻 1985 年 159-171

On the diffeomorphism types of elliptic surfaces with multiple fibers

東大理　上　正明　(Masaaki Ue)

複素曲面でリーマン面の上への正則写像をもちその一般的ファイバーが楕円曲線であるものを楕円曲面(elliptic surface)という。ここでは楕円曲面を実4次元多様体と見て、その微分同相類を考える。楕円曲面 $\pi: M \longrightarrow S$ に対して、Mの多重ファイバーのπによる像を $\{p_1, \cdots, p_k\}$ とおく。$\pi^{-1}(p_i)$ の重複度が m_i であるとすると、Sを $\{p_1 \cdots p_k\}$ を cone point で cone-angle $2\pi/m_i$ の 2-orbifold とみなす。このとき次の定理がなりたつ。

定理．　$\pi: M \longrightarrow S$, $\pi': M' \longrightarrow S'$ を relatively minimal (fiber に第一種例外曲線

を含まない）楕円曲面とする。 $\pi: M \to S$ が次の

(i), (ii) をみたすとする。

(i) M に多重トーラスと以外に特異ファイバーがある。

(ii) S は orbifold として bad でも cone point

2個以下の spherical orbifold でもない。

このとき、

$$M \text{ と } M' \text{ が diffeo} \iff e(M) = e(M') \text{ かつ } \pi_1 M \cong \pi_1 M'$$

ただし $e(M)$ は M の euler 数。

注： 1) 条件(i) は $e(M) > 0$ に同値である。

2) $\pi_1 M$ は後述の様に S の orbifold としての基本群 $\pi_1^{orb} S$ に同値。特に (ii) の条件のもと、$\pi_1 M \cong \pi_1 M'$ は orbifold として $S \cong S'$ と同値。

§1 証明の概略

Moishezon [3] によると、relatively minimal

な楕円曲面 $\pi: M \longrightarrow S$ は deformation により特異ファイバーは I_1 型（一点で transverse に交わる immersed S^2）または mI_0 型（重複度 m の多重トーラス）に限るものに diffeo である。（∵この deformation は S の orbifold type を変えない。）従って以下この type のものだけ考えればよい。一方多重ファイバーがないときは松本の定理［2］により M の diffeo type は $e(M)$ と S の種数で完全にきまる。（種数 0 のときは Kas-Moishezon が示した）また一般の場合、S の種数 h, cone point $p_1, \cdots, p_k$（各重複度 $m_1, \cdots m_k$）とすると（この S を $\Sigma_h(p_1, \cdots, p_k)$ と書くことにする）M は euler 数が等しく底曲面 Σ_h（即ち多重ファイバーを持たない）の楕円曲面 $\hat{M}$ から k 回の logarithmic transformation を行なって得られる。［2］により $\hat{M}$ の diffeo type は一意的に決まってしまう。ここで $\hat{M}$ の projection $\hat{\pi}: \hat{M} \longrightarrow \Sigma_h$ を 1 つ次の様に定めておく。（$e(M)$ は常に 12 で割れ、I_1 型ファイバーの数に等しい［3］ことに注意する。）

$$\hat{M} = V_g^0 \cup T^2\times(\Sigma_h - D_2^0). \qquad \Sigma_h = D^2 \cup (\Sigma_h - D_2^0)$$

但. $\tilde{\omega}: V_g^0 \longrightarrow D^2$ は $12(g+1)$ 個の I_1 型ファイバーを含み. $\partial V_g^0 \cong T^2\times \partial D^2$ なる Lefshetz fibration (この diffeotype は g のみで定まる [3])

D_2 は Σ_h の 2-disc.

$\hat{\pi}/V_g^0 = \tilde{\omega}$, $\hat{\pi}/T^2\times(\Sigma_h - D_2^0)$ は自然な射影.

ここで $p_1,\cdots,p_k$ は $\Sigma_h - D_2^0 \subset \Sigma_h$ に含まれるとしてよい. すると M は $\hat{M}$ から $\hat{\pi}^{-1}(p_i)$ の近傍 $\hat{\pi}^{-1}(D_i)$ (D_i's は p_i's の small 2-disc 近傍) $\cong T^2\times D_i^2$ を抜いて新たに $T^2\times D^2$ を張りつけることにより得られる. 即ち. logarithmic Transformation は topological には 4次元の Dehn surgery とみなしてよい.

(I) S の orbifold type 及び $e(M)$ を固定する. この時は $\hat{M}$ は up to diffeo は一意. 従って k 個の多重トーラス (各の重複度 $m_1,\cdots,m_k$) のはりつき方によらず M の diffeo type が一意に決まることをま

ず示さねばならない。 i番目の多重ファイバーに相当するDehn Surgeryは diffeo $\varphi_i : T^2 \times \partial D_i \longrightarrow \partial_i(\hat{M} - \hat{\pi}^{-1}(\cup D_i)) \cong \hat{\pi}^{-1}(\partial D_i)$ を与えることにより表わされるがこれは $SL_3 \mathbb{Z}$ の元により表示される。 $\hat{\pi}^{-1}(\partial D_i)$ の座標を (l, h, q_i') —— (l, h) は $\hat{M}$ のファイバーの座標を表わすcurves. q_i' は1点 $\times \partial_i D_i^2 \subset T^2 \times \partial D_i^2 \subset T^2 \times (\Sigma_h - \mathring{D}_2) \subset \hat{M}$ で表わされるcurve, によって定め、 $T^2 \times \partial D_i$ の座標を $(l_i . h_i . q_i)$ —— $l_i = S^1 \times * \times *$, $h_i = * \times S^1 \times *$, $q_i = * \times * \times \partial D_i$ —— で定めるとき φ_i は $(l_i . h_i . q_i) = (l . h . q_i') A_i$ なる $SL_3 \mathbb{Z}$ の元 A_i で表わされる。 多重トーラスのはりつき方は実際には meridian のはりつき方 (A_i の第3列)により決定される。 特に (3.3) 成分は $\pm m_i$ である。(座標系のとり方に ambiguity はあるが最後の性質は不変である)

補題 1. $\hat{M}_R = \hat{M} - \hat{\pi}^{-1}(\cup \operatorname{int} D_i)$ とおく

上記の座標系、(l, h, q_i') により $B_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_i \\ 0 & 1 & \beta_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$ で表わされる diffeo. $g_i : \hat{\pi}^{-1}(\partial D_i) \circlearrowleft$ に対して、diffeo. $G : M_k^{\wedge} \circlearrowleft$ で $G / \hat{\pi}^{-1}(\partial D_i) = g_i \ (i = 1 \cdots k)$ なるものが存在する。

補題２、　上記の座標系 (l, h, q_i') により $C_i = \begin{pmatrix} D_i & \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \\ 0\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D_i \in SL_2\mathbb{Z}$ で表わされる diffeo. $f_i : \hat{\pi}^{-1}(\partial D_i) \circlearrowleft$ に対して diffeo. $F : M_k^{\wedge} \circlearrowleft$ で $F / \hat{\pi}^{-1}\partial D_i = f_i \ (i = 1 \cdots k)$ なるものが存在する。

補題１，２ともに多重トーラス以外の特異ファイバーが存在することが本質的である．これらと、次の簡単な事実：$T^2 \times \partial D^2$ の self-diffeo g が $T^2 \times D^2$ の self-diffeo に拡張する $\Leftrightarrow$ g が meridian を保つ、とから、M の diffeo type を変えることなく A_i を $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & m_i \end{pmatrix}$ に変換することができる。即ち、M の diffeo type（及びその標準形）が一意に定まる．それを便宜上、$L(m_1, \cdots m_k) V_{g,h}$ と書くことにしよう．

(II). 次に $\pi_1 M$ と S の orbifold type との関係を調べる。

補題 3. 定理の(i)の条件のもとで、$\pi_1 M$ は $\pi_1^{orb} S$ に同型である。

これは、M のファイバーの $\pi_1 M$ への寄与が 0 であるということを意味する。従って問題は oriented 2-orbifold の分類に帰着された。即ち、

(a) S bad or spherical with #cone point $\leq 2 \Leftrightarrow \pi_1^{orb} S$ cyclic (finite)., (b) S spherical with 3 cone points $\Leftrightarrow \pi_1^{orb} S$ polyhedral group of finite order

c) S euclidean or hyperbolic. $\Leftrightarrow \pi_1^{orb} S$ infinite planar discontinuous group. よく知られている様に次の場合を除いて S の orbifold type は $\pi_1^{orb} S$ で決まる。

$\pi_1^{orb} S \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \Leftrightarrow S$ の種数 0, #cone point ≤ 2 でその重複度 $m, n (\geq 1)$ とすると、$g.c.d.(m.n) = d$.

Donaldson [1] Morgan Friedman によると、euler数12で(上記の$g=1$)で底曲面Sがback. cone pointの重複度m, nに対して、$m, n \geq 2$, $g.c.d(m, n)=1$のもの(Dolgachev surfaceと呼ばれるclass)はSのorbifold typeが異なるとdiffeoでなく、さらに$m=n=1$(即ち多重ファイバーがない)のcaseのものともdiffeoでない。即ち、上記の記号によれば、$L(m, n)V_{0,0} \not\cong V_{0,0}$。Freedmanの分類理論から、$L(m, n)V_{0,0}$と$V_{0,0}$は同相であることが知られる。一方$V_{0,0}$は$\mathbb{C}P^2 \# 9\overline{\mathbb{C}P^2}$にdiffeoなので、$\mathbb{C}P^2 \# 9\overline{\mathbb{C}P^2}$に無限個の微分構造が入ることになる。(但、$L(m, 1)V_{0,0} = L(m)V_{0,0}$は$V_{0,0}$にdiffeo)。よって上記に述べた定理は彼らの例のcomplementであり、基本群(Sのtype)が十分複雑ならexoticな構造をもつ例はない(少なくとも楕円曲面のcategoryでは)ことを主張するものである。(3)の残りのcaseについては不明だが、上記のDonaldson typeの議論がおそらく必要となると思われる。

§2. 特異ファイバーが多重トーラスのみの場合

これは euler 数 $=0$ と同値. これらの case は 4次元の "Seifert fibering" とみなせ, より直接的に 3次元の Seifert fibering の類似物である. そこで 3次元の case に成立する事実が parallel に成りたっていると期待することは不自然ではないであろう. そして実際この場合は次のことが示せる. (§1の定理に対応するものとして)

定理': $\pi : M \longrightarrow S$, $\pi' : M' \longrightarrow S'$. 上記の条件を満たす楕円曲面 (Seifert fibering) とする. S が euclidean or hyperbolic (as orbifold) と仮定すると, M と M' が diffeo $\Longleftrightarrow \pi_1 M \cong \pi_1 M'$.

この定理'は S, S' とも hyperbolic なら Zieschang [6] $S = S' = T^2$ (即ち M, M' ともに T^2 上の T^2-bundle) のときは 坂本-福原 [4] により示されている.

M, (M') の diffeo type は 3次元 Seifert fibering と同様の Seifert invariant によって記述される。即ち底曲面の種数，底曲面の essential curve system に対するファイバーのモノドロミー，多重ファイバーの meridian の attaching を示す Triad, 及び cross section を拡張するための障害である。そこで定理を示すためにまず $\pi_1 M \cong \pi_1 M'$ を仮定したとき各の Seifert invariant が一致するようにできるか，(Seifert invariant には curve のとり方に伴う ambiguity がある) どうかを考察する。そのために底曲面の orbifold type を便宜上次の4つに分ける。

(H-1) hyperbolic. genus>0. (H-2) hyperbolic genus=0

(E-1) T^2 (E-2) euclidean genus = 0.

そして才1に次を示す。

主張.1. S, S' が上記の同じ class に属するとき $M \cong M'$

(本質的には Zieschang 坂本 福原により示されている)

そして次に S, S' が異なる class に属する場合を考察する.

主張2. 上記のとき, 7つの case を除いて $\pi_1 M$ と $\pi_1 M'$ は同型になりえない. 除外される7つの case はいずれも $S = T^2$, S' は種数0の euclidean orbifold で M と M' は diffeo (当然 fiber を保たない) である.

このことから定理を導く. Zieshang は S, S' ともに hyperbolic のとき, regular fiber が生成する $\pi_1 M$ ($\pi_1 M'$) の部分群が maximal normal abelian subgroup of rank 2 として唯一のものであること (従って characteristic subgroup であること) を示して主張1を証明した. この論法は euclidean orbifold をも許容すると成立しなくなる. このことが T^2 上の T^2-bundle の場合独立な議論を必要とさせ [4] 上記主張2の中の例外を生じさせる. 例外の7つの case はいずれも, M は自然に S' 上の T^3-bundle で

モノドロミーが有限位数なるものの構造をもつ。そして、$M(M')$ ともに euclidean structure を許容する（即ち $\mathbb{E}^4/G$. G は $\mathrm{Isom}^+\mathbb{E}^4$ の discrete torsion free subgroup と書ける）。その中の4つは $S^1\times$（S^1上の T^2-bundle でモノドロミーが有限位数）という形をしている。

定理′で除外した case（即ち底曲面が bad 又は spherical）は homotopy type の性質も定理′の case と異なる。特に regular fiber の生成する $\pi_1 M$ の subgroup が必ずしも rank 2 でないので定理′の証明はそのままでは適用しない。従って残る問題は、底曲面が bad 又は spherical のとき M を分類することである。これらの case の基本群はこれまで扱った例の基本群と一致することはない。いずれにせよ base orbifold が十分複雑ならば(1)の場合と同様 exotic なものは存在しない。この点は3次元の Seifert fibering の場合の事実に対応しているといってよい。

参考文献

[1] Donaldson. S. K. The differential topology of complex surfaces, preprint 1985

[2] Matsumoto. Y. Diffeomorphism types of elliptic surfaces. preprint '85

[3] Moishezon. B Complex Surfaces and connected sums of complex projective planes Springer Lect Note 603 '77

[4] Sakamoto-Fukuhara Classification of T^2-bundles over T^2 Tokyo J Math 6 No. 2 '83

[5] Ue. M. On the diffeomorphism types of elliptic surfaces with multiple fibers preprint 1985

[6] Zieschang H. On toric fiberings over surfaces. Math Notes 5, 1969