

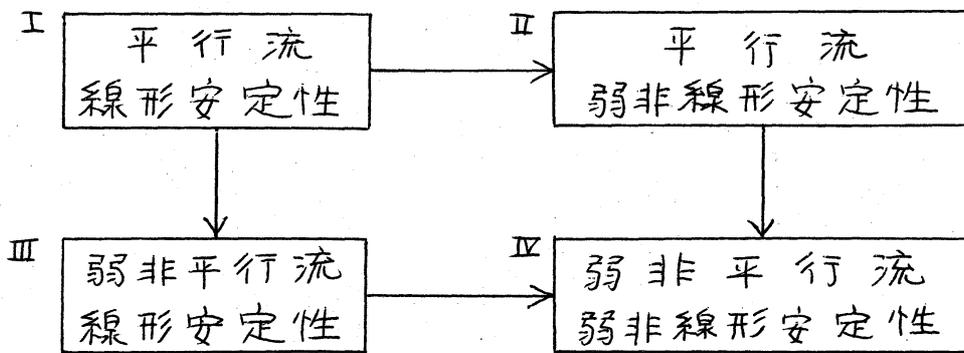
空間増幅と数値実験

岡大工 柳瀬真一郎 (Shinichiro Yanase)

§ 1. 安定性と数値計算

流れの安定性に関する研究の長い歴史の中で多くの定常流の安定性が調べられてきたが、基本的に解析的な取扱いが可能なのは図1に示された主流が2次元の流れ(I)~(IV)である。

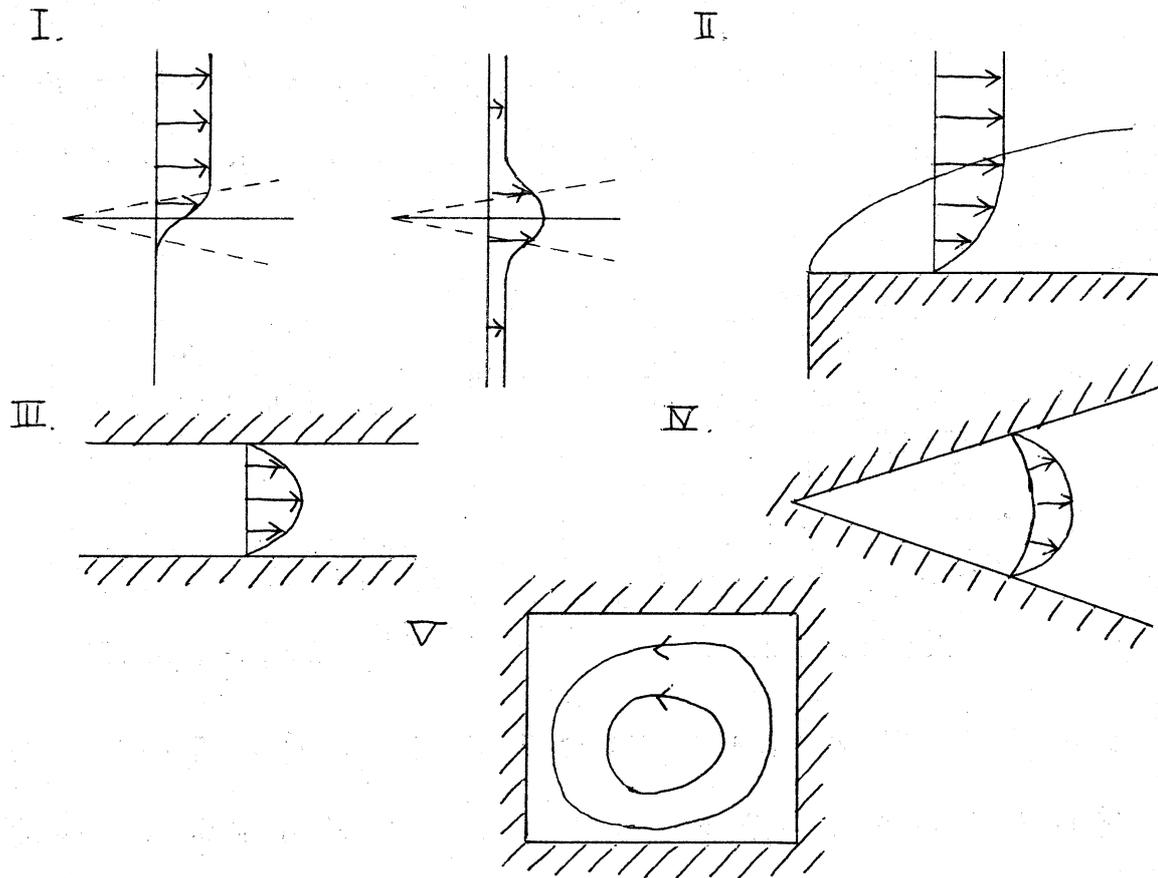
[図1]



しかもこの中の(III)と(IV)は形式的に矛盾のない方法はまだ完成しているとは言えない。これら以外の定常流の安定性を調べるためには完全に数値的な方法に頼らなければいけない。つまり単に Orr-Sommerfeld 方程式を数値的に解く程度ではなく、ほとんど元の Navier-Stokes 方程式 (N-S 方程式)

を数値積分しなければいけないという意味である。N-S方程式の数値計算には現在大きく分けてスペクトル法と差分法が使われている。この内スペクトル法に関しては別項で解説があるので、本稿では最初に2つの方法の適用しうる流れについて述べ、その後差分法の流れの安定性の適用について紹介することにする。

[図2]



流れを境界の形で分類すると図2の様な分け方をすることが出来る。(I)から(V)へ行くに従って流れが壁でおおわれるようになる。この中でスペクトル法で完全に取扱うことが

できるのは (V) のみである。この流れに関しては空間増幅を
 考えるのは意味がなく、時間増幅のみが重要である。(III) の
 平面ポアズイユ流は時間増幅を調べるのならスペクトル法が
 適用できるが空間増幅については通常のフーリエスペクトル
 法では取扱えない。(I), (II), (IV) に関しては主流が空間に依存
 して変化するためにスペクトル法の適用は困難が多い。さら
 に空間増幅を取り扱うためには周期条件の制約は都合が悪い
 と考えられる。そこで (I) ~ (IV) の流れの空間不安定はしば
 しば差分法によって計算されている。著者の目についた文献
 を挙げると次の様になる。

- (I) Zabusky & Deem (1971) ——— 2次元 Wake
- Ikeda (1977) ——— 2次元 Jet
- (II) Fasel (1976, 1980) ——— 二次元境界層
- (III) Bestek (1980) ——— 平面ポアズイユ流
- (IV) Allmen & Eagles (1984)
 ——— Divergent Channel Flow

この他にも数多くの文献があるが、本稿は包括的なレビュー
 を意図しているわけではなく、基本的な方法と主な結果を概
 観するのが目的なので上記の論文の内容を中心として説明す
 ることにする。

§2. 空間不安定の計算の定式化

§2.1 基礎式

2次元 $N-S$ 方程式の数値解法には大きく分けて圧力を消去しなりアリミティブ方程式を解く方法と渦度方程式を解く方法の二通りあるが、安定性計算でこれまで比較的多く使われている渦度方程式による定式化を述べる。方程式は次のようになる。渦度 $\omega = \partial u / \partial y - \partial v / \partial x$ とすると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega, \\ \nabla^2 &\equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

速度 u, v を計算する方法としては

$$(i) \quad \nabla^2 u = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \nabla^2 v = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (2)$$

$$(ii) \quad \nabla^2 \Psi = \omega, \quad u = \partial \Psi / \partial y, \quad v = -\partial \Psi / \partial x \quad (3)$$

の二つがあり、方法(ii)は流れ関数 Ψ を使用する。安定性計算ではまず定常流を求めなるといけな。

$$\left. \begin{aligned} u_B \frac{\partial \omega_B}{\partial x} + v_B \frac{\partial \omega_B}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_B, \\ \nabla^2 u_B &= \partial \omega_B / \partial y, \quad \nabla^2 v_B = -\partial \omega_B / \partial x. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

後の式の代わりに方法(ii)を使ってもよい。(4)式を適当な境界条件(個々の流れに依存する)の下に数値的に解くのが最初のステップである。今はこの部分には触れないことにする。次に擾乱方程式を立てる。擾乱を \hat{u} , \hat{v} , $\hat{\omega}$ で表わせば

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} + u_B \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} + v_B \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y} + \hat{u} \frac{\partial \omega_B}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \omega_B}{\partial y} \\ + \hat{u} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \hat{\omega}, \end{aligned} \quad (5)$$

となる。非線形項を無視すると

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} + u_B \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} + v_B \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y} + \hat{u} \frac{\partial \omega_B}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \omega_B}{\partial y} = \frac{\nabla^2 \hat{\omega}}{Re} \quad (6)$$

となり、(5), (6)式を解くことが研究の中心となる。(5), (6)はどちらも発展方程式で初期値・境界値問題を解かなければいけぬ。しかし、(6)については擾乱の時間依存性を

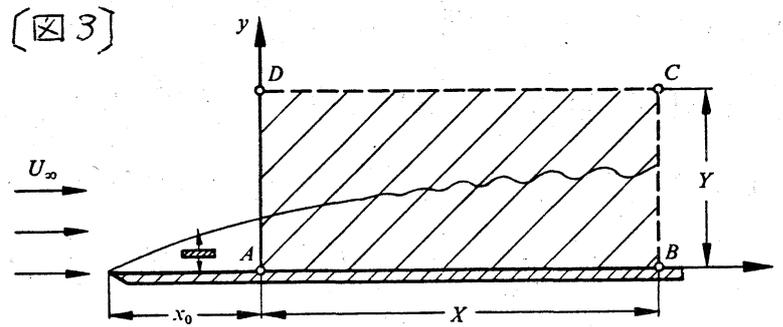
$$\hat{\omega}, \hat{u}, \hat{v} \propto e^{-i\Omega t}$$

と仮定すると線形であるから

$$\begin{aligned} -i\Omega \hat{\omega} + u_B \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} + v_B \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y} + \hat{u} \frac{\partial \omega_B}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \omega_B}{\partial y} \\ = \frac{1}{Re} \nabla^2 \hat{\omega} \end{aligned} \quad (7)$$

となり境界値問題へ帰着される。(Allmen et al. 1984)

攪乱の境界条件
の設定はこの研究
の核心であって多
くの研究者が工夫
しているが一例と
して Fasel (1976)



Fasel (1976)

の採用した条件を紹介する。図3に二次元境界層と積分領域の図を示す。壁 AB 上での条件は粘性境界条件で一義的に決まるがその他はそうはいかない。上流 AD ではその少し前でリボンを振動させて攪乱を励起しているのに対応する条件を与えている。 CD 上では速度や渦度が適当に減衰する条件を課している。最も困難なのは下流 BC での条件で、攪乱が下流方向に(積分領域の外部に)流れ去って上流に悪い影響を与えない様にとらなければいけない。具体的な方法は §3 で述べる。

§ 2.2 空間不安定の criterion

ある流れが空間不安定である条件は、流れの中のある領域で流れ方向に沿って攪乱が増幅されるという事である。しかし流れ方向に主流が変化する様な流れでは採用する従属変数によって不安定領域が異なってくるという重要な問題がある。
(1) < > かの criterion が考えられる。

(i) $G_1(\psi) \equiv \frac{1}{|\psi|} \frac{\partial |\psi|}{\partial \xi}$

ψ ; 擾乱の流れ関数

(ii) $G_2(E) \equiv \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial \xi}$

E ; 擾乱のエネルギー

(iii) $G_3(\hat{E}) \equiv \frac{1}{2\hat{E}} \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi}$

$\hat{E} \equiv E/E_0$

E_0 ; 主流のエネルギー

図4に Allmen (1980) の計算例を挙げる。3つの曲線はそれぞれ G_1 , G_2 , G_3 を示していて、正の領域で擾乱が増幅される。これによれば (i) ~ (iii) のどれを選ぶかによって結果がかなり変わってくる。また Fasel

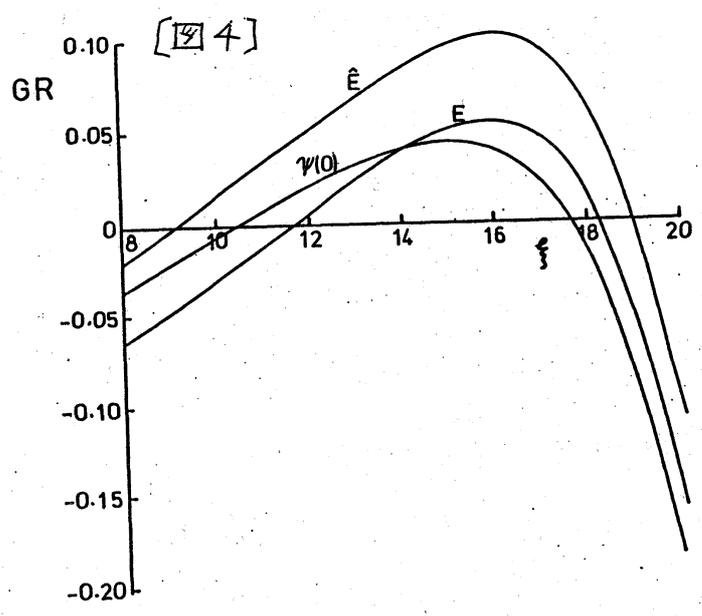


Figure 3.7.10: Typical growth rates, GR, of ψ (at $\eta=0$), E and \hat{E} for $\gamma = 4.093$, $R = 45$, $\beta = 0.1$.

Allmen (1980)

(1976) の様に初期値境界値問題を解く場合には擾乱の発達が定常に達した時刻に擾乱の空間的变化を調べて安定性を判断することになる。(図5 参照)

§3. 数値計算のスキーム

空間不安定を差分法で計算する時には多くの注意が必要で

ある。本章では Fasel (1976) に沿って重要な点をまとめてみる。

I. 時間発展のスキーム

4

安定性を調べるのであるからスキームは人工的な不安定要素や粘性を含んではならない。

Fasel はこのために陰解法を推薦している

が、Ikeda (1977) は陽解法で計算を行っている。近年計算機の速度向上につれて時間まがみを十分小さくして陽解法で計算する方法が多く使われている。(Davis et al. 1985)

II. 空間差分のスキーム

空間差分を行う必要があるのは粘性項と輸送項である。

(a) 粘性項

粘性項 $\nabla^2 \omega$ については通常 2 次の公式で十分と考えられている。

$$\left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right|_{m,n} \equiv \frac{1}{(\Delta x)^2} (\omega_{m+1,n} - 2\omega_{m,n} + \omega_{m-1,n}) \quad (8)$$

[図5]

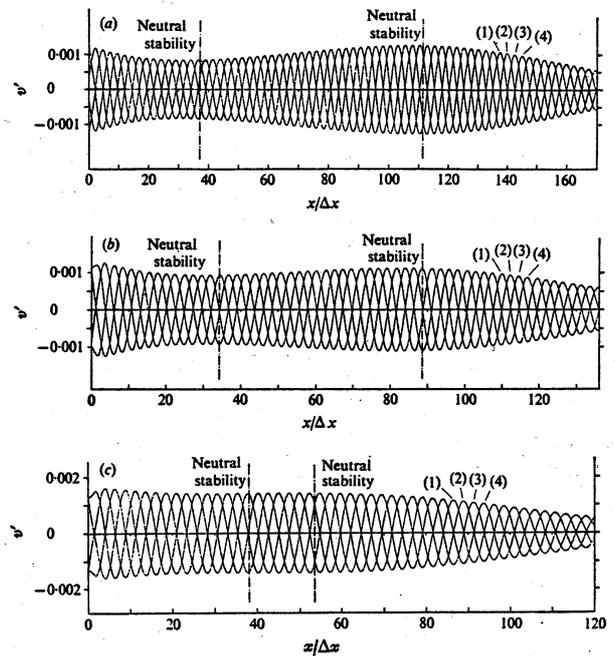


FIGURE 13. Downstream development of v' perturbations at $y/\Delta y = 3$ for four different time levels. (a) Calculation B, the values of $t/\Delta t$ are (1) 485, (2) 490, (3) 495, (4) 500; (b) calculation C, $t/\Delta t =$ (1) 385, (2) 390, (3) 395, (4) 400; (c) calculation D, $t/\Delta t =$ (1) 355, (2) 360, (3) 365, (4) 370.

Fasel (1976)

しかしレイノルズ数が大きくなると差分誤差から生じる渦粘性のために実質的なレイノルズ数が下ってしまい計算が不可能となる。たとえば境界層では2次精度でよくても平面ポアズイユ流では不十分で、Bestek (1980) は精度の詳細なチェックを行っている。(図6) これによれば4次精度の差分公式を使うことが必要である。4次の差分公式は次の様になる。

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \Big|_{m,n} \approx \frac{1}{12(\Delta x)^2} \left[-\omega_{m-2,n} + 16\omega_{m-1,n} - 30\omega_{m,n} + 16\omega_{m+1,n} - \omega_{m+2,n} \right] \quad (9)$$

なお Bestek の計算は後述の輸送項も含めて4次精度にした計算である。

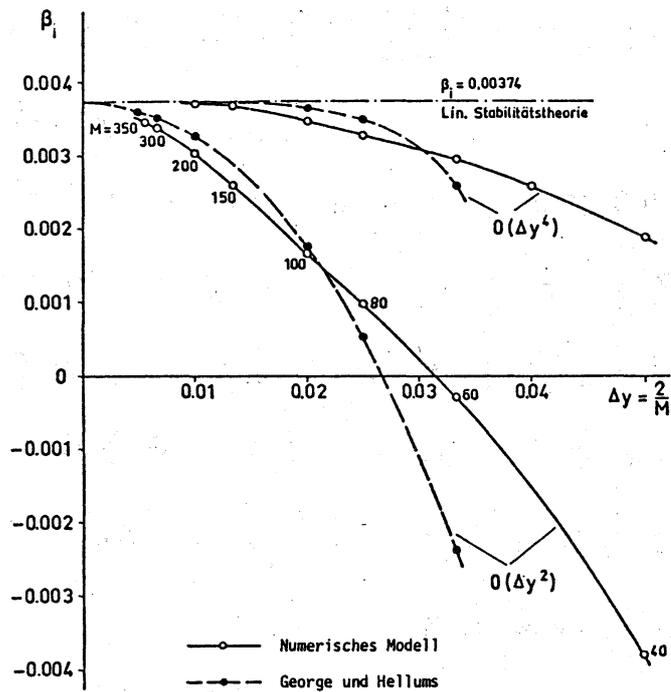
(b) 輸送項

輸送項 $(u \cdot \nabla) \omega$ に関しては多くの差分法が提案されている。この項の差分誤差 (Alias 誤差) はしばしば異常な不安定を引き起こす。Arakawa (1961) が有名な、

Arakawa Scheme を提

案したのはそれを回避するためであった。ただし Arakawa

[図6]



2次精度と4次精度の比較

Bestek (1980)

Scheme は安定性計算ではあまり使われていない。計算によく使われているスキームをいくつか挙げてみる。

$$i) u \frac{\partial \omega}{\partial x} \cong \frac{u_{m,n}^{i-1}}{2\Delta x} \left[\omega_{m+1,n}^{i-1} + 2\omega_{m,n}^i - 2\omega_{m,n}^{i-1} - \omega_{m-1,n}^i \right]$$

(Fasel 1976) — (10)

$$ii) u \frac{\partial \omega}{\partial x} \cong \frac{u_{m,n}^l}{2\Delta x} \left[\omega_{m,n}^l - \omega_{m-1,n}^l + \omega_{m+1,n}^{l-1} - \omega_{m,n}^{l-1} \right]$$

(Ikeda 1977) — (11)

$$iii) u \frac{\partial \omega}{\partial x} \cong \frac{u_{m,n}}{12\Delta x} \left[\omega_{m-2,n} - 8\omega_{m-1,n} + 8\omega_{m+1,n} - \omega_{m+2,n} \right]$$

$$- \frac{|u_{m,n}|}{\Delta x} \left[\omega_{m-2,n} - 4\omega_{m-1,n} + 6\omega_{m,n} - 4\omega_{m+1,n} + \omega_{m+2,n} \right]$$

(Kawamura & Kuwahara 1984) — (12)

(10) 式の i は iteration のステップで、(11) 式の l は時間ステップを示す。これらの3つの式はすべて風上差分法の変形であり安定な風上差分法の特徴を生かそうとしている。けれどもどの方法を使っても差分法では Alias 誤差が必然的に生じるので高レイノルズ数ではスペクトル法に及ばない。

III. 境界条件

§2.1 で述べた様に特に下流での境界条件には十分に注意をはらわなければならない。しかしこの点をうまくやればスペクトル法では十分にカバーできない計算をすることができ可能性がある。多くの文献では攪乱が積分領域から外へす

みやかに流れ出て上流方向へ悪い影響 (Upstream Influence) を及ぼさない様にしてゐる。Fasel, Bestek は擾乱の波数を α として

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}(x_0, y) &= -\alpha^2 u'(x_0, y), \\ \frac{\partial^2 \omega'}{\partial x^2}(x_0, y) &= -\alpha^2 \omega'(x_0, y), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

等に置いてゐる。 α の値は各ステップ毎に iterative に決めてゐる。 Ikeda は擾乱の伝播速度を u_0 として

$$\omega'(t + \Delta t, x_0, y) = \omega'(t - x_0 - u_0 \Delta t, y), \quad (14)$$

と仮定してゐる。これらの境界条件は主流が流れ方向に弱くなり擾乱が衰へて行く様な流れではかなり満足のいく仮定と考えられる。特に Diverging Flow の計算では下流端で擾乱の大きさを単にゼロと置く事によつてよい結果が得られてゐる。(Allmen & Eagles 1984) けれども平面ポアズイユ流の様に擾乱がどんどん増幅される様な流れではこの仮定は必ずしも納得できるものではない。しかし Bestek はこの仮定で十分であるとしてゐる。この点については今後も十分な検討を加える必要があると思われる。

IV. 計算領域の大きさ

個々の実験との比較をするためだけならそれと同じ大きさ

の積分領域を取ればよいが、実際には計算機の能力が足りないし、特定の場合同様に関係なく理想的な条件を設定する事ができるのが数値実験の特長である。そこでどれほどの大きさの領域を取れば十分であるかを決めなければいけないが、これは実際にはそれぞれの流れに対して試行錯誤的に行なわなければいけない。Fasel (1976) の計算では、流れ方向には攪乱波長の4倍、それと垂直方向には境界層厚さの3倍取れば十分であると述べている。しかしこの点はⅢの境界条件との兼ね合いがきくため、どの流れにも当てはまるとは思えない。

§4. 計算結果

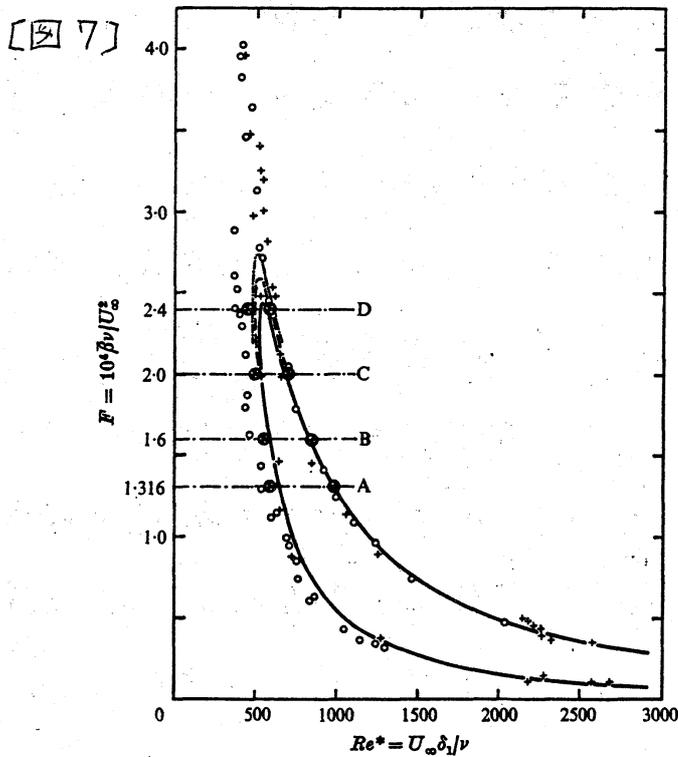
(1) 自由流

Zabusky & Deem の計算は流れ方向にもそれと垂直な方向にも周期条件を課している。従ってこの計算はその結果の豊かさにもかかわらず、差分法の利点を生かしたものではない。また流れ方向の主流の変化も考慮に入れていない。それに対して Ikeda の計算は主流の変化が考慮されている。けれども線形安定性計算は平行流近似で行っている。一般に自由流は渦の生成や合体に関する興味から多くの数値実験が行なわれていて、その中には差分法を使ったものも多い。

(最近のものでは Davis & Moore 1985) しかし空間安定性の興味から調べられている文献はほとんどない様に思われる。

(2) 二次元境界層

差分法の特徴を生かした非平行流の安定性計算が最初に行なわれたのはこの流れに対してである。(Fasel 1976) 彼の得た主要な結果は非平行効果による線形安定曲線の変化を求めた事である。(図7) 擾乱は下流方向へ伝わるにつれてまず不安定領域へ入りそれから安定領域へ戻る。図の直線A, B, C, Dに沿って左から右へ動く。彼は擾乱振幅がある程度大きい(5%程度)場合の安定性計算も行っており流れが亜臨界



であることを確かめている。

(Fasel 1980)

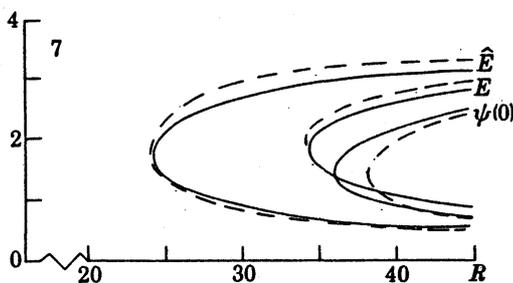
FIGURE 17. Comparison of neutral points with linear stability theory and experimental measurements. —, numerical solution of Orr-Sommerfeld equation; ---, numerical solution of modified Orr-Sommerfeld equation; - · - · -, numerical investigation (Gaster 1974); +, experimental measurements (Schubauer & Skramstad 1948); O, experimental measurements (Ross *et al.* 1970); ●, numerical solution of Navier-Stokes equations.

(3) 平面ポアズイユ流

これについては Besteck (1980) の計算があるが得られた結果はあまり実り豊かなものであるとは言えない。それにはいくつかの理由が考えられる。第一にこの流れは差分で計算するにはレイノルズ数が高過ぎること。第二に下流端での境界条件が空間不安定の計算には十分納得のいかない点がある事。最後に平面ポアズイユ流では三次元的な効果が重要である点である。特に三次元性は流れの本質的な面である。

(4) Diverging Flow

Allmen & Eagles は彼らの結果を Eagles & Weissman (1975) の弱非平行近似による理論計算と比較している。(図8) 大変興味深いことに数値計算の結果は近似理論と非常によく一致をしている。流れの広がりがかなり大きい(約 45°) 場合にも一致は良好である。我々はここで非常に皮肉な結果を目にしている。つまり非平行性を完全に取り入れようとして数値実験をしたが、結局は大して効果的でないという事になる、たわけである。他の流れについてはまだどうかわからぬ



———— Allmen & Eagles

----- Eagles & Weissman

いので、流れの非平行性、空間的な変化の安定性に対する効果が本当に少ないのかどうかをも、と調べる必要がありそうである。

§5. まとめ

以上見て来た様に差分近似による安定性計算は、かなりの有効な結果を主に臨界点近傍で与えていることがわかる。しかし大振幅の擾乱に対してはあまり有意義な結果を与えている例は無い様である。スペクトル法の大発展と比較すると差分法はどちらかと言えば沈滞気味である。けれども差分法の長所である境界条件の柔軟性を生かした研究がもっとあってよいのではなからかと思われる。またスペクトル法、差分法の両方の特長を生かした(たとえば Pseudo Spectral 法)新しい方法の開発も期待される。

最後に、本稿をまとめるにあたって大変お世話になる、た日本原研の藤村薫氏に深く感謝いたします。

References

- Allmen, M. J. : Thesis (1980)
- Allmen, M. J. and Eagles, P. M. : Proc. Roy. Soc. A392 (1984) 359.
- Arakawa, A. : J. Comp. Phys. 1 (1966) 119.
- Bestek, H. : Thesis (1980)
- Davis, R. W. and Moore, E. F. : Phys. Fluids 28 (1985) 1626.
- Eagles, P. M. and Weissman, M. A. : J. Fluid Mech. 69 (1975) 241.
- Fasel, H. : J. Fluid Mech. 78 (1976) 355.
- Fasel, H. : Computational Fluid Dynamics, ed. by W. Kollman
(1980) Hemisphere Publishing Corp.
- Ikeda, M. : J. Fluid Mech. 80 (1977) 401.
- Kawamura, T. and Kuwahara, K. : AIAA 84 (1984) 340.
- Zabusky, N. J. and Deem, G. S. : J. Fluid Mech. 47 (1971) 353.