数理解析研究所講究録
第570巻 1985年 1-10

素粒子物理学における超対称性とBRS対称性

京大数理研　中西 襄 (Noboru Nakanishi)

1. 最近, Z_2-グレーデド・リー代数が素粒子物理学でどのように応用されているかについて, 簡単に紹介する.

角運動量作用素 ($O(3)$ の生成子) は, 軌道部分とスピン部分から成る. 後者の自乗の固有値は $s(s+1)\hbar^2$ ($\hbar$ はプランク定数 h の $1/2\pi$) で, $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \cdots$ である. すべての素粒子は特定のスピン s をもつ. 例えば, パイ中間子は 0, 電子, 陽子, 中性子などは $1/2$, 光子は 1 である.

素粒子は同種のものを互いに識別できないので, マックスウェル統計に従わず, ボース統計 (波動関数が対称), あるいはフェルミ統計 (波動関数が反対称) のいずれかの統計に従う. 観測されるすべての素粒子は, s が整数のものはボース統計に, 半奇数のものはフェルミ統計に従う. これをスピンと統計の関係という.

2. 素粒子物理学の基礎理論は場の量子論である. 量

子力学は非相対論的であるばかりでなく，素粒子の生成消滅を扱えないので，波動方程式を相対論化すると同時に波動関数を作用素と見なおす（これを第二量子化という）．こうして構成されるのが場の量子論である．場の作用素は4次元時空座標 x^μ $(\mu=0,1,2,3)$ の作用素値超関数の有限個の組であり，ポアンカレ群（ローレンツ群と並進群より成る）の有限次元表現をなす．

場の量子論では，ボース統計に従う素粒子の場は交換関係，フェルミ統計に従う素粒子の場は反交換関係を用いて量子化される．とくに相対論的因果律は，「2点 x^μ と y^μ が空間的，すなわち $(x-y)^2 \equiv (x^0-y^0)^2-\sum_{k=1}^{3}(x^k-y^k)^2<0$ のとき，

$$[\varphi(x),\ \varphi'(y)]=0 \qquad (\varphi,\varphi'\text{の少くも一方がボース})$$

$$\{\psi(x),\ \psi'(y)\}=0 \qquad (\psi,\psi'\text{の両方共がフェルミ})$$

である」と表わされる．

場の作用素のオペランドを状態ベクトルと呼ぶ．これは量子力学の波動関数の役割を演ずる概念で，通常はヒルベルト空間をはるものと考える．内積の正定値性は量子論の確率解釈と結びつくが，$s \geqq 1$ の場を記述するときは内積の正定値性は一般に場の量子論構成の基本的要請と矛盾してしまうので，不定計量の内積が必要となる．しかし，観測される部分については，やはり正定値性が回復されていなければなら

ない．

観測される素粒子の場に関しては，上記交換・反交換関係の意味でスピンと統計の関係が成りたつことが，理論的に証明される．

3.　物理学の基礎的な理論は，通常ラグランジュ形式をもつ．場の量子論も，数学的に厳密とはいえないが，ラグランジュ形式を出発点にとるのが便利である．すなわち，作用積分

$$I = \int d^4x \, \mathcal{L}(x)$$

によって理論が規定されるとする．ここにラグランジアン密度 $\mathcal{L}(x)$ は，場の作用素から構成される局所量である．I を不変に保つ場の作用素の変換をその理論の対称性という．変換群としては有限群を考えることもあるが，重要なのはリー群の場合である．変換のさい時空間座標 x^μ をも同時に変換するものを時空対称性，そうでないものを内部対称性という．重力場を考えないときは，前者は通常ポアンカレ対称性である．

I がリー群 G の変換に対し不変であると，ネーターの定理が成りたつ．すなわち，場の局所量としてネーター・カレント $J^\mu_\ell(x)$ $(\ell = 1, 2, \ldots, n$；n は G の次元数$)$ を構成することができ，連続の式 $\partial_\mu J^\mu_\ell(x) = 0$ を満たす．このことから，その $\mu = 0$ 成分の空間積分

$$X_l \equiv \int d^3x\, J_l^0(x)$$

が時間x^0によらない量，すなわち保存量であることが従う．

第二量子化すると，X_lはエルミート作用素となるが，これはGに対応するリー代数gの生成子を与える．すなわち，無限小変換をδ_lで表わすと，次のような交換関係が成立する：

$$i[X_l, \varphi(x)] = \delta_l \varphi(x)$$

$$[X_l, X_m] = i f_{lm}{}^{k} X_k \qquad (i f_{lm}{}^{k} \text{ は構造定数})$$

4.　素粒子の分類に内部対称性の存在は重要であるが，どうして特定のリー群が選ばれるのか説明がつかない．そこで時空対称性を拡大して内部対称性までも含めることができれば，どのような内部対称性が選ばれるべきかが理論的に規定し得るかも知れないという期待が生まれる．ところが残念なことにダメ定理があって，物理的に意味のある理論の枠内では観測される対称性は必然的にポアンカレ対称性と直積の形でしか存在しえないことがいえてしまう．しかしながら，このダメ定理は，X_lがボース的な場合，すなわち対称性がリー代数で表わされる場合しか考えていなかった．そこで，フェルミ的な生成子を導入して，グレーデド・リー代数の対称性を考えてみる必要性がある．

生成子がフェルミ的なとき，その作用により場の従う統計が入れかわるが，考えている対称性が観測されるものであれ

ば，観測される素粒子の場を変換したものはまた観測される素粒子の場なるゆえ，場に対して成立しているスピンと統計の関係は生成子についても成立していなければならない．従って，フェルミ的な生成子のスピンはやはり半奇数ということになる．2つのフェルミ的な生成子の反交換子の合成スピンを考えると，それはポアンカレ代数の生成子のスピン1を超えられないことから，それらはスピン½のもののみが許されることがわかる．

5. ポアンカレ代数の生成子を P_μ（並進），$M_{\mu\nu}$（ローレンツ変換）とする．これの分解できない拡大として許されるグレーデド・リー代数は，これらの生成子のほかに $2N$ 個のワイル・スピノルのフェルミ的な生成子（$Q_\alpha{}^L$, $\overline{Q}_{\dot\beta}{}^M$）（$L=1,2,\cdots,N$; $M=1,2,\cdots,N$; $\alpha=1,2$; $\dot\beta=1,2$; $\overline{Q}_{\dot\beta}{}^M$ は $Q_\beta{}^M$ のエルミート共役）と，§3で考えた n 個のボース的な生成子 X_ℓ（$\ell=1,2,\cdots,n$）とからつくられるもので，次の交換・反交換関係を満たす：

$$\{Q_\alpha{}^L, Q_\beta{}^M\} = \epsilon_{\alpha\beta}\sum_{\ell=1}^{n}(a^\ell)^{LM}X_\ell \equiv \epsilon_{\alpha\beta}Z^{LM}$$

ここに $\epsilon_{\alpha\beta}=-\epsilon_{\beta\alpha}$，$\epsilon_{12}=1$，$a^\ell$ は数行列；Z^{LM} はこの代数のすべての生成子と可換な量，すなわち中心に属するので，セントラル・チャージと呼ばれる．

$$\{Q_\alpha{}^L, \overline{Q}_{\dot\beta}{}^M\} = 2\delta^{LM}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}P_\mu$$

ここにσ^μはパウリ行列($\sigma^0=1$)である。$Q_\alpha{}^L$はもちろんP_μとは可換，$M_{\mu\nu}$とは$Q_\alpha{}^L$がスピン1/2の表現に属することを示す交換関係を満たす。$Q_\alpha{}^L$はX_lとは可換である必要はないが，Z^{LM}とは可換でなくてはならない。

以上のグレーデド・リー代数のもとでIが不変なとき，それを超対称性と呼ぶ。超対称性の最も簡単な場合は，もちろんX_lがなくて$N=1$の場合である。一般にN個の$Q_\alpha{}^L$をもつ超対称性を実現するには，$N/4$よりも小さくないスピンをもつ場が必要になる。従って，ヤン・ミルズ場のようなゲージ場($s=1$)を考える場合には$N\leqq 4$，重力場($s=2$)まで考える場合は$N\leqq 8$になる。

6. 超対称なラグランジアン密度を作る最も便利な方法は，スーパー場を用いる方法である。$N=1$の場合，4個のグラスマン座標θ^a(マヨラナ・スピノルと呼ばれる4成分実スピノル，$a=1,2,3,4$)を導入して，8次元座標(x^μ,θ^a)を考える。スーパー場$\phi(x,\theta)$はこの8次元座標の関数である。これをθ^aの巾級数に展開すると，グラスマン数の反可換性により4次まで切れる。この展開係数が通常のいみでの場であり，いろいろのスピンのものがでてくる。スーパー場を用いてラグランジアン密度を作り，グラスマン数についての積分を遂行すると，超対称性をもつ作用積分が得られる。

スーパー場で注意しなければならないのは，8次元座標は完全な8次元対称性をもっているわけではないことである．このため展開係数として現れる場は一般に互いに独立ではなくなる．

7.　超対称性は理論的に興味あるものであり，非常に多くの研究がなされた．しかし，現実の素粒子はボース粒子とフェルミ粒子の質量が縮退していないので，超対称性は作用積分のもつ対称性ではありえても，現実に観測される対称性ではありえない．従って，超対称性の存在意義を導く基礎となった「ポアンカレ対称性を含む観測される対称性は超対称性に限る」という結果は，あまり現実的な意味をもっていないことになる．

観測される対称性は，作用積分のもつ対称性のごく一部分であり，理論構成にとって重要なのは作用積分についての対称性である．従ってこの場合，必ずしもスピンと統計の関係を尊重する必要はないわけである．そうすると，グレーデッド・リー代数を用いる可能性は非常に広がる．しかし，スピンと統計の関係に違反する素粒子が観測されるような理論では困るので，それを合理的な方法で閉じ込めてしまわなくてはならない．これがうまくやれるのは，トリヴィアルなものを除き，今のところ次に述べるBRS（ベッキ・ルーエ・ストラ）対称性を含む場合のみである．

8.　リー群Gの変換の場への作用の仕方が時空点x^μに

依存する場合，それを局所ゲージ変換という．局所ゲージ不変な作用積分を作るには，接続を導入し，微分を共変微分におきかえればよい．接続のことをゲージ場という．とくにGがコンパクト非可換リー群のとき，それをヤン・ミルズ場と呼ぶ．

ヤン・ミルズ場$A_\mu^l(x)$ $(l=1,2,\cdots,n)$は，観測される横波の$2n$成分，観測されない縦波のn成分，観測されないスカラー波のn成分から成る．このように観測されない成分があることが，正定値内積をもつヒルベルト空間では素直には量子化できない理由である．

ゲージ場は，局所ゲージ不変なままでは，ラグランジアン密度が特異になるため量子化できない．そこでゲージ固定という操作を導入し，形式上局所ゲージ不変性を破る．ゲージ固定にさいし，$A_\mu^l(x)$のスカラー部分を代表するものとして，ボース的スカラー場$B^l(x)$を導入しておくのが便利である．

ゲージ固定項を導入した作用積分に基づくヤン・ミルズ理論は量子化できるが，その理論は確率解釈可能性と矛盾することがわかる．そこでこの困難を解決するために，新たに2つのフェルミ的スカラー場$C^l(x)$，$\bar{C}^l(x)$を導入する．これらはスピンと統計の関係を破っており，FP（ファデエフ・ポポフ）ゴーストと呼ばれている．ゲージ固定項とFPゴースト項は，その和がBRS変換に対して不変になるようにとる．

9.　BRS変換$\underline{\delta}$は，外微分dによく似た巾零のデリベーションである．通常の場に対しては，無限小ゲージ変換の局所性を表わす任意関数を$C^{\ell}(x)$でおきかえたものと定義される．例えば，

$$\underline{\delta}(A_{\mu}{}^{\ell}(x)) = [\,\delta_{m}{}^{\ell}\partial_{\mu} + i g f_{km}{}^{\ell} A_{\mu}{}^{k}(x)\,]\, C^{m}(x) \qquad (g\text{は定数})$$

である．$C^{\ell}(x)$については，$\underline{\delta}^2 = 0$より

$$\underline{\delta}(C^{\ell}(x)) = -\frac{1}{2} g f_{km}{}^{\ell} C^{k}(x) C^{m}(x)$$

とする．さらに

$$\underline{\delta}(\bar{C}^{\ell}(x)) = i B^{\ell}(x), \qquad \underline{\delta}(B^{\ell}(x)) = 0$$

である．

BRS変換は，局所ゲージ変換の量子論版とでもいうべき重要な概念である．ヤン・ミルズ場のゲージ固定項およびFPゴースト項を伴った作用積分はBRS対称性をもつので，ネーターの定理からBRS変換の生成子Q_{BRS}を構成することができる．任意の場$\varphi(x)$に対し，Q_{BRS}との交換または反交換子は，$\underline{\delta}(\varphi(x))$を与える．観測される状態というものを，この$Q_{BRS}$でもって消される状態ベクトルであると定義すると（九後・小嶋の補助条件），確率解釈可能性が回復することが証明される．

ゲージ固定項をうまく選ぶと，もとのリー代数$\mathfrak{g}$とBRS対称性のほかにいろいろの対称性をもつようにできる．最大の対

称性をもつ場合は，$4n+5$個の生成子をもつグレーデド・リー代数が得られる．しかし，これらはポアンカレ代数とは全く独立である．

一般相対性理論（アインシュタインの重力理論）の一般座標変換も，並進群の局所化という意味において局所ゲージ変換と似たものであるので，重力場の量子化にさいしては一般座標変換不変性はBRS対称性におきかえられる．このときゲージ固定項とFPゴースト項をうまく選ぶと，実に144個もの生成子をもつグレーデド・リー代数が得られる（16次元ポアンカレ的超代数）．この超代数は，時空対称性と内部対称性を自然に統合するものであるが，内部対称性は観測される対称性ではない．

〔参考文献〕

超対称性

P. Fayet and S. Ferrara, Physics Report 32 (1977) 249–334.

J. Wess and J. Bagger, Supersymmetry and Supergravity (Princeton University Press, 1983).

BRS対称性

T. Kugo and I. Ojima, Supplement: Progress of Theoretical Physics 66 (1979) 1–130

N. Nakanishi, Publications RIMS 19 (1983) 1095–1137.