

半単純 Lie 群上の定係数不変固有超函数と

Virtual character modules

京大, 理 西山 享 (Kyo NISHIYAMA)

§ 0. Introduction G を連結な半単純 Lie 群で中心有限なものとする。 G の quasi-simple な既約表現を分類する際に重要な役割を果すものの一つに指標があげられる。指標は有限次元表現に対してはその表現行列の Trace をとることによって得られる G 上の実解析的な関数となるが、無限次元表現に対しては G 上の超函数として Harish-Chandra によって定義される。この指標が G の表現の分類に如何に役立つかは次の事実からわかるであろう。

事実 1 G は compact Lie 群とする。この時 G の既約表現は全て有限次元であり、 $\pi_1, \pi_2 \in G$ の 2 つの有限次元表現とするとき、 $\pi_1 \simeq \pi_2$ (同値) $\iff \Theta(\pi_1) = \Theta(\pi_2)$ が成立する。但し $\Theta(\pi)$ は π の指標を表す。従って既約表現の (同値を除く) 分類は全て既約指標の計算によって行なわれ得る。更に π の指標 $\Theta(\pi)$ を知れば表現を具体的に再構成でき

る。例えば [W1], [W2] 等を参照されたい。

事実 2. G は連結な半単純 Lie 群で中心有限, $K \in G$ の極大 compact 群とする。今 $(\pi, H) \in G$ の Hilbert 空間 H 上の quasi-simple な既約表現と仮定する。この時、

$$H_K = \{v \in H \mid \dim_{\mathbb{C}} \langle \pi(K)v \rangle < \infty\}$$

と置き H_K の元を K -finite vector と呼ぶ。すると H_K の元は全て微分可能であって, \mathfrak{g} は G の Lie 環とすると, \mathfrak{g} の H_K 上の表現が得られる。明らかに $K \cap H_K$ は不変にいておるので, H_K は (\mathfrak{g}, K) -加群となる。こうして (π, H) から得られた (\mathfrak{g}, K) -加群 $(d\pi, H_K) \in (\pi, H)$ の Harish-Chandra 加群と呼ぶことにする。すると次のことが成立する。

(P) $(\pi_1, H_1), (\pi_2, H_2) \in G$ の quasi-simple な既約表現とし, その "指標" を $\Theta(\pi_1), \Theta(\pi_2)$ とする。この時、

$$(d\pi_1, (H_1)_K) \simeq (d\pi_2, (H_2)_K) \Leftrightarrow \Theta(\pi_1) = \Theta(\pi_2)$$

が成立する。ここで表現の同値性は純代数的なものである。

(1) 更に π_1, π_2 が unitary 表現の時には、

$$(\pi_1, H_1) \simeq (\pi_2, H_2) \text{ (unitary 同値)} \Leftrightarrow \Theta(\pi_1) = \Theta(\pi_2)$$

が成立する。以上は Harish-Chandra によるものであるが、

例えば [V02], [V2] を参照されたい。

実半単純群の指標の性質は1950年代から1960年代にわたって Harish-Chandra ([HC1], [HC2] etc.) によって詳しく調べられたが, その主な性質は "指標が G 上の不変固有超函数である" ということから従う。ところが, 実際に指標と不変固有超函数がどれ程違うかという問題は1970年代になって表面化し, まず Hirai [HZ] によって, 「不変固有超函数で, 指標の一次結合に書けないものが存在する」ことが示された。その後, Fomin-Shapovalov [FS] によって 「指標の和は定係数不変固有超函数である (後で説明する)」ことが示された。ここでは次の定理を報告する。

定理 [NZ] G を連結な半単純 Lie 群で中心有限, acceptable とする。このとき, G 上の既約指標の一次結合全体のなす空間は, 定係数不変固有超函数のなす空間と一致する。

§ 1. 指標と不変固有超函数の定義 以下 G を連結な半単純 Lie 群で中心有限, acceptable とする。 G が acceptable とは, G の Lie 環を \mathfrak{g} の複素化と $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, \mathfrak{g} の Cartan 部分環を \mathfrak{h} とし T とし, 次の二つの条件を満足するような複素半単純 Lie 群 $G_{\mathbb{C}}$ が存在する時に言う。

(1) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Lie 環は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ であって, Lie 群の準同型 $j: G \rightarrow G_{\mathbb{C}}$ で $dj: \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (canonical injection) とはるものが存在する。

(2) $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ の解析的 \mathbb{R} 部分群を $H_{\mathbb{C}}$ とし, $\exp \rho$ (ρ は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ の正 root の和の半分) が $H_{\mathbb{C}}$ 上定義されている。

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の展開環を $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, その中心を \mathfrak{z} と書く。 \mathfrak{z} は \mathbb{C} 上の可換代数であって, 実は多項式環であることが示される。

(π, E) を G の既約 \mathfrak{g} quasi-simple 表現で Hilbert 空間 E 上実現されているものとする。 $K \subseteq G$ の極大 compact 部分群, $(d\pi, E_K)$ を \mathfrak{z} で定義し \mathfrak{z} Harish-Chandra 加群とすると, π が quasi-simple とは次の (P)(i) を満たすことである。

(P) 全 \mathfrak{z} の $\mathfrak{z} \in \mathfrak{z}$ に対して $d\pi(\mathfrak{z})$ は E_K 上 scalar 作用素になる。

(i) δ を K の任意の既約表現とすると, δ の E_K における重複度は有限である。

注意 既約 unitary 表現は quasi-simple であることが知られている。又, (i) は「ある K の既約表現 δ があって, δ の E_K における重複度が (0 ではなくて) 有限である」に置き換えてよい [Sh]。

この時 (π, E) の (既約) 指標 $\Theta(\pi)$ を次のように定義する。
 $\Theta(\pi)$ は G 上の超函数であって, $f \in G$ 上の compact 台をもつ無限階微分可能函数と Γ ととき,

$$\Theta(\pi)(f) = \text{Trace} \int_G \pi(g) f(g) dg$$

と Γ なるものである。ここに上式の右辺の積分は意味を持ち、実際 E 上の trace class の作用素に Γ なることが証明できる。

$\Theta(\pi)$ は次のよう重要な性質を持つ。

補題 1.1 (1) $\Theta(\pi)$ は G の内部自己同型によって不変である。つまり, $g \in G, f \in C_0^\infty(G)$ に対し $f^g \in C_0^\infty(G)$ を $f^g(x) = f(gxg^{-1})$ で定義するとき, $\Theta(\pi)(f^g) = \Theta(\pi)(f)$ 。

(2) $\Theta(\pi)$ は \mathfrak{z} の同時固有超函数である。つまり $\Theta(\pi)$ は次の (超函数の意味での) 微分方程式を満たす。

$$z \Theta(\pi) = \chi(z) \Theta(\pi) \quad (z \in \mathfrak{z}, \chi(z) \in \mathbb{C})$$

定義 1.2 補題 1.1 の (1)(2) を満たす超函数 Θ を不変固有超函数 (invariant eigendistribution) と呼び、ここでは IED と書く。又、(2) の χ を Θ の固有値 (infinitesimal character) と呼ぶ。 χ は \mathfrak{z} から \mathbb{C} への環準同型である。

上のことから指標は IED である。IED の性質は Harish-Chandra により、詳しく調べられ、Hirai [H3,4] により、完全に決定された。その最も重要な性質の一つは次の補題である。

補題 1.3 IED Θ は G 上局所可積分な函数と同一視できる。更に G' を G の正則元全体からなる稠密な開集合とすると、 Θ は G' 上実解析的である。

§ 2. 定係数不変固有超函数 G の Cartan 部分群の共役類全体を $Car(G)$ と書き、 $[H] \in Car(G)$ を Cartan 部分群 H の共役類とする。上の補題から、IED Θ は G' 上での値を決めれば決まるが、 $G' \subset \bigcup_{[H] \in Car(G)} \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$ なので Θ の不変性を考えれば、 Θ は全ての $[H] \in Car(G)$ 上での値がわかれば決定できる。一般に $\#Car(G)$ は有限であって $Car(G)$ の構造は "良く" わかっている ([Su] 参照)。

以下 Cartan 部分群 H をしばらくの間固定して考える。 \mathfrak{h} を H の Lie 環、 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ をその複素化とし、 Δ を $(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ の root 系を表わす。 $W = W(\Delta)$ を Δ の Weyl 群とし、 Δ には適当な順序を入れ、正の元全体を Δ^+ と書く。

補題 2.1 $U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ の中心と $U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W$ ($\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の展開環の元で

W -不変部分の全体) は \mathbb{C} 上の代数として同型である。特に \mathfrak{g} は $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ 個の不定元から生成される多項式環である。

上の同型をもう少し詳しく与えよう。 \mathfrak{g} の部分環 \mathfrak{v}^+ と \mathfrak{v}^- を

$$\mathfrak{v}^+ = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad , \quad \mathfrak{v}^- = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \quad (\mathfrak{g}_{\alpha} \text{ は } \alpha \text{ の root 空間})$$

で定義する。 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{v}^+ \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{v}^-$ (直和) である。すると, Poincaré-Birkhoff-Witt の定理により,

$$U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \oplus (\mathfrak{v}^+ U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) + U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \mathfrak{v}^-) \quad (\text{直和})$$

がわかる。 $p: U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \rightarrow U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ を上の分解による射影とする。更に $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \simeq S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ ($\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の対称線型環) であるから, $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の元を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ ($\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双対空間) 上の多項式関数と思う。この時 $\lambda \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ に対して $\Gamma_{\lambda}: U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \rightarrow U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ と

$$(\Gamma_{\lambda} f)(\mu) = f(\mu - \lambda) \quad (f \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \simeq S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$$

で定めることにする。すると,

$$\Gamma_{\rho} \circ (p|_{\mathfrak{g}}) : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^W \quad (\text{但し } \rho = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \frac{\alpha}{2})$$

から $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^W$ の同型を与える。 $\Gamma_{\rho} \circ (p|_{\mathfrak{g}})$ を Harish-Chandra map と呼ぶことがある (例えば [Hum] を参照)。 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^W$ が多項式環になることは [B] を参照されたい。

$IED \oplus$ の H 上での形がどうなるかを見てみよう。 \oplus の固有値を λ とすると, $\lambda \in \text{Hom}_{\text{alg}}(\mathfrak{z}, \mathbb{C})$ である。一方補題 2.1 から,

$$\text{Hom}_{\text{alg}}(\mathfrak{z}, \mathbb{C}) \simeq \text{Hom}_{\text{alg}}(U(\mathfrak{g})^W, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{g}^*/W$$

であるから, λ に対して \mathfrak{g}^* の元 λ が (Weyl 群の作用を除いて) 決まる。そこでこのことを $\lambda = \lambda_\lambda$ と書いて表わすことにする。さて, \oplus は次の微分方程式の解であらう。

$$z \oplus = \lambda_\lambda(z) \oplus \quad (z \in \mathfrak{z})$$

上の方程式は \mathfrak{z} が多項式環であることから実質上 $\text{rank } \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ 個だけしか \mathfrak{z} はないことに注意しておく。この方程式を H 上で考えるとどうなるであろうか? これは Harish-Chandra によって与えられている。 H 上の関数 D を,

$$D(h) = \exp \rho(h) \cdot \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - \exp(-\alpha)(h))$$

で定義してこれを Weyl の分母 (Weyl denominator) と呼ぶ。

D は Δ^+ の選び方に任意性があるため一意には確定しないが, 実は符号を除いて Δ^+ によらないうえに示される。

補題 2.2 $D \cdot \oplus|_H$ は $U(\mathfrak{g})^W$ の固有値 λ の同時固有函数である。つまり次の微分方程式を満す。

$$\chi(D \cdot \mathbb{H} | H) = \lambda(\chi) (D \cdot \mathbb{H} | H) \quad (\chi \in \cup_{\lambda \in W} \lambda)$$

H の連結成分は torus と実直線のいくつかの直積であることに注意すると、補題 2.2 の方程式はかほり容易にほり、その解は次のように書けることかほかる。

$$(*) \quad D \cdot \mathbb{H} | H (h \exp \chi) = \sum_{s \in W} a_s(h; \chi) \exp s \lambda(\chi)$$

$$(h \in H' = G' \cap H, \chi \in \mathfrak{h}; \text{十分小})$$

ここに $a_s(h; \chi)$ は χ の多項式関数である。 D は H' 上で 0 にほならないことを考えると上の式は \mathbb{H} の H' 上での形を与えてほる。

[注意] χ の多項式 $a_s(h; \chi)$ の次数は次のように評価ほれる。
 $W_\lambda = \{w \in W \mid w\lambda = \lambda\}$ を λ の固定部分群とほるとき、

$$\text{degree } a_s(h; \chi) \leq \#W_\lambda - 1.$$

特に $W_\lambda = \{e\}$ の時、つまり λ が regular の時には $a_s(h; \chi)$ は χ によらほない定数である。

定義 2.3 $IED \mathbb{H}$ が定係数 (of constant coefficients) であるとは、任意の Cartan 部分群上で $\mathbb{H} \in (*)$ 式のように書いたときに全 s の $a_s(h; \chi)$ が χ によらほない定数にほなることをほう。

§3. 指標と IED の既知の関係 固有値 $\chi \in \text{Homalg}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$

と一つ固定して,

$\mathcal{O}(\chi) = (\text{固有値 } \chi \text{ の IED 全体})$

$\mathcal{O}'(\chi) = (\text{固有値 } \chi \text{ の 定係数 IED 全体})$

$V(\chi) = (\text{固有値 } \chi \text{ の virtual character 全体})$

とおく。ここで virtual character とは既約指標の \mathbb{C} 上の一次結合を指すものとする。§1 で述べたことから $\mathcal{O}'(\chi) \subset \mathcal{O}(\chi)$, $V(\chi) \subset \mathcal{O}(\chi)$ であって, $\chi = \chi_\lambda$ とするとき, λ が regular ならば $\mathcal{O}(\chi_\lambda) = \mathcal{O}'(\chi_\lambda)$ であることがわかっている。

命題 3.1 [H2]. λ が singular のとき一般には $V(\chi_\lambda) \not\subset \mathcal{O}(\chi_\lambda)$ である。一層強く, $\mathcal{O}(\chi_\lambda)$ の tempered T であって $V(\chi_\lambda)$ に含まれないものが存在する。

この命題により, λ が regular の時はどうなのか, 一般に $\mathcal{O}'(\chi)$ と $V(\chi)$ の関係はどうなのかという問題が起ってくる。Fomin-Shapovalov は次の結果を与えている。

命題 3.2 [FS]. 一般に $V(\chi) \subset \mathcal{O}'(\chi)$ である。つまり, virtual character は定係数 IED である。

Hirai [H4]は更に一步押し進めて " $V(X) = \mathcal{O}'(X)$ " であろうという予想を提出している。

§4 主定理 Hiraiの予想は実は肯定的に解決される。これかこの報告の主結果である。

定理4.1 G が連結な半単純Lie群で中心有限, acceptable とする。その時固有値 χ の virtual character 全体の空間と固有値 χ の定係数IEDの空間は等しい。つまり $\mathcal{O}'(X) = V(X)$ が成り立つ。

これを示すには Fomin-Shapovalov の結果を考慮して, 全ての定係数IEDが指標の一次結合になることと示せば十分である。それについて触れる前に少し準備とする。

$P \in G$ の放物的部分群とする。 P が放物的部分群 (parabolic subgroup) があるとは, P のLie環の複素化 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ が $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Borel 部分環を含み,かつ P が $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ の正規化群に一致する時と言う。 $N \in P$ の巾単根基 (unipotent radical) とし, $P = LN \in$ Levi 分解とする。 L から実数 \mathbb{R} への連続な準同型全体を $X(L)$ と書くとき, M, A を次のように定義する。

$$M = \bigcap_{\mu \in X(L)} \text{Ker } |\mu|, \quad A = \left(\begin{array}{l} L \text{の中心に含まれる極大 split} \\ \text{可換部分群} \end{array} \right)$$

すると $L=MA$ は群の直積であって, $P=MAN$ は P の Langlands 分解と呼ぶ ([Wr] 参照)。

放物的部分群 P が *cuspidal* であるとは, M が compact T は Cartan 部分群を持つ時に言う。今 P が *cuspidal* であるとする。すると M_0 (M の単位元の連結成分) はやはり compact T は Cartan 部分群を持つ *reductive* T は Lie 群であるから, Harish-chandra [HC3] により離散系列の表現をとり。この M_0 の離散系列表現を M に誘導してそれを分解することにより, M の離散系列表現が得られる (詳しくは [Li] 又は [KZ] を参照)。そこで σ を M の離散系列表現又はその極限とし, $\nu \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ (A の Lie 環の複素双対) とする。

定義 4.2 一般化された主系列 (generalized principal series) の表現とは,

$$\pi(\sigma, \nu) = \text{Ind}_P^G (\sigma \otimes e^\nu \otimes 1_N)$$

のことである。特に P が極小放物的部分群の時に単に主系列表現と呼ぶ。

ここでは一般化された主系列のことを \mathfrak{g} -主系列と書くことにする。さて主題に戻ろう。次の命題が成立する。

命題 4.3 定係数 IED は \mathfrak{g} -主系列表現の指標の一次結合に書ける。

これにより定理は明らかである。更に上の命題を証明する過程で次のことがわかる。

命題 4.4 G が複素 Lie 群のとき、定係数 IED は主系列表現の指標の一次結合に書ける。

この命題 4.4 は良く知られている (LFS) 参照)。

§ 5 証明の方針 この § では命題 4.3 の証明について述べる。まず少し準備とする。

$\text{Car}(G)$ に次のように i の順序を入れる。まず \mathcal{O} , \mathfrak{h} の \mathfrak{h} の Cartan 部分環と i について、 \mathcal{O} の実 root α による Cayley 変換 V_α に対して $V_\alpha(\mathcal{O}) = \mathfrak{h}$ と T になる時に $\mathcal{O} \rightarrow \mathfrak{h}$ と書く。この時 \mathcal{O} の toroidal T 部分の次元は \mathfrak{h} のそれより小さく T になる。さて、 $[H_1], [H_2] \in \text{Car}(G)$ に対して $[H_1] < [H_2]$ とは、適当 T 代表元 $H_1 \in [H_1], H_2 \in [H_2]$ がとれて、その Lie 環を $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ とすると、 \mathfrak{h} の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_m$ があって、 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_m = \mathfrak{h}_2$ かつ $\mathfrak{h}_0 \rightarrow \mathfrak{h}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathfrak{h}_m$ と T になる。

る時に言う (詳しくは [H3], [Su] を参照)。

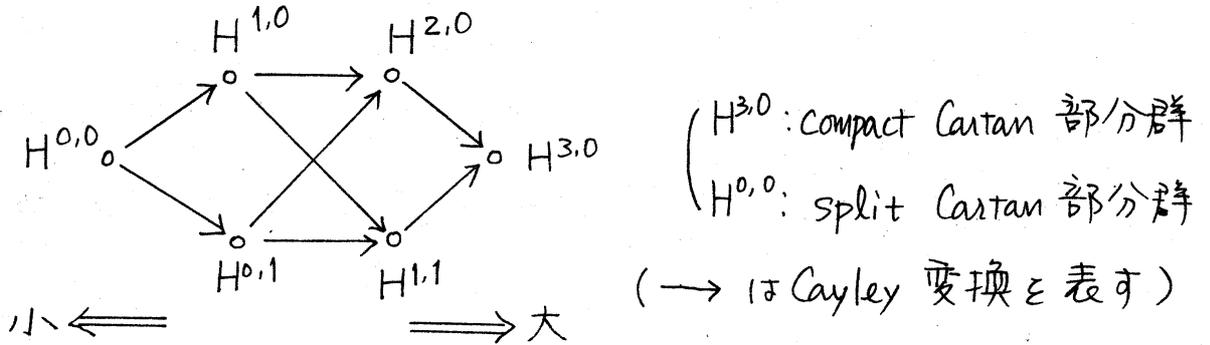
例 $Sp(3, \mathbb{R})$ の Cartan 部分群達の順序 $G = Sp(3, \mathbb{R})$ の時には $\# \text{Car}(G) = 6$ であって, それ等の代表元は次のように書ける。

$$H^{k,l} = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} e(\varphi) \\ ech(\theta, \tau) \\ ech(\varepsilon, t) \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ esh(\theta, \tau) \\ esh(\varepsilon, t) \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ esh(-\theta, \tau) \\ esh(\varepsilon, t) \end{array} & \begin{array}{c} e(-\varphi) \\ ech(-\theta, \tau) \\ ech(\varepsilon, t) \end{array} \end{array} \right\}$$

但し, $k+2l \leq 3$ であって, $e(\varphi): k \times k$ 行列, $ech(\theta, \tau)$, $esh(\theta, \tau): 2l \times 2l$ 行列, $ech(\varepsilon, t)$, $esh(\varepsilon, t): m \times m$ 行列 ($m = 3 - k - 2l$) は次の如く与えられるものである。

$$\left\{ \begin{array}{l} e(\varphi) = \text{diag}(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_k}) \\ ech(\theta, \tau) = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} e^{i\theta_1 ch \tau_1} & \\ & e^{-i\theta_1 ch \tau_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e^{i\theta_l ch \tau_l} & \\ & e^{-i\theta_l ch \tau_l} \end{pmatrix} \right) \\ esh(\theta, \tau) = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} e^{i\theta_1 sh \tau_1} & \\ & e^{-i\theta_1 sh \tau_1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e^{i\theta_l sh \tau_l} & \\ & e^{-i\theta_l sh \tau_l} \end{pmatrix} \right) \\ ech(\varepsilon, t) = \text{diag}(\varepsilon_1 ch t_1, \dots, \varepsilon_m ch t_m) \\ esh(\varepsilon, t) = \text{diag}(\varepsilon_1 sh t_1, \dots, \varepsilon_m sh t_m) \\ (\varphi, \theta, \tau, t: \text{実数}, \varepsilon = \pm 1) \end{array} \right.$$

この時 $\text{Car}(G)$ の順序を図示すると次のようになる ([H5])。



定義 5.1 \mathbb{H} と G 上の IED とすると \mathbb{H} の台 (support) と次のように定義する。

$$\text{Supp}(\mathbb{H}) = \{ [H] \in \text{Car}(G) \mid \mathbb{H}|_H \neq 0 \}$$

$\text{Supp}(\mathbb{H})$ の極大元を \mathbb{H} の高さ (height) と呼び、 \mathbb{H} が唯一の高さを持つとき \mathbb{H} を extremal と呼ぶ。

補題 5.2 全ての IED は extremal な IED 達の一次結合で書ける。

上の補題 5.2 を考慮に入れれば、命題 4.3 の証明において定係数 IED \mathbb{H} は extremal といいよい。そこで $[H] \in \mathbb{H}$ の高さとするとき次の補題が成立する。

補題 5.3 \mathbb{H} と高さ $[H]$ の extremal な定係数 IED とする。この時、Cartan 部分群 H から標準的に cuspidal Γ -放物的部分

群 P が作れて, $P=MAN$ とその Langlands 分解とすると,
 $\{\sigma_i\}$: M の離散系列の表現連 (又はその極限), $\{\nu_i\}$: \mathfrak{a} の元
 連と適当な定数 c_i が存在して H 上で次の等式を満たす。

$$\left[\Theta - \sum_i c_i \Theta(\text{Ind}_P^G(\sigma_i \otimes e^{\nu_i} \otimes 1_N)) \right] \Big|_H = 0$$

証明の概略 まず [H1] 或いは [Li] によって, $\pi(\sigma_i, \nu_i) = \text{Ind}_P^G(\sigma_i \otimes e^{\nu_i} \otimes 1_N)$ の指標が H 上では良くわかっていることに注意する。一方定係数 IED は [H3, 4] によって完全に決定されているのでその H 上での値が具体的にわかる。あとは如何にして c_i 連を選ぶかに尽きるが, これには有限群の指標についての論議がうまく使えることがわかる。

上の補題 5.3 と ρ 主系列の指標 $\Theta(\pi(\sigma_i, \nu_i))$ が extremal な定係数 IED で, その height が [H] であることを使えば, 命題 4.3 が帰納的に証明できることはほぼ明らかであろう。

§6 表現の分類について Lie 群の表現論の主な目的は既約表現の分類と, それをもとにして群上の調和解析ということになると思う。半単純 Lie 群の表現論においてはこのうち表現の分類の方が近年非常に進歩を見せ, 単に分類するということだけであればほとんどその理論は完成したように見え

える。例えば Langlands の方法による分類 [La] 或いは primitive ideal の Jantzen, Joseph, Dixmier 等による分類 [Ja, Jo, D] 等がそれである。しかし一方でそれ等の分類は \mathfrak{g} の上の調和解析を行う程には整備されてはいない, 或いはそれに適していないようにも思えるし, 又 unitary 表現を完全に決定する \mathfrak{g} には至っていない。

一方で表現を完全に決定してしまわずに, 大きくいくつかのグループに分けて考えようという試みもある。例えば, Vogan の提唱するところの Block equivalence [Vo3], King 達の言うところの character polynomial [Ki] による分類等がそれに当ると思う。Gelfand-Kirillov 次元 \mathfrak{g} での大きな役割をもちそうに思われる [Vo1]。

筆者も上のような広い意味での分類と Weyl 群の表現を使ってできているかと思ひ, [N1] では virtual character 達の上への Weyl 群の作用を定義し, 実際にその表現を分解して見せた。ここに報告した結果はその研究の過程で自然に起つてきた問題である。

References

- [D] J. Dixmier, Enveloping algebras, North-Holland Publ. Comp., 1977.

- [FS] A.I.Fomin and N.N.Shapovalov, A property of the characters of real semisimple Lie groups, *Funct. Anal. and Appl.*, 8 (1974), 270-271.
- [HC1] Harish-Chandra, The characters of semisimple Lie groups, *Trans. AMS*, 83(1956), 98-163.
- [HC2] Harish-Chandra, Invariant eigendistributions on a semisimple Lie group, *Trans. AMS*, 119(1965), 457-508.
- [HC3] Harish-Chandra, Discrete series for semisimple Lie groups II, *Acta Math.*, 116(1966), 1-111.
- [H1] T.Hirai, The characters of some induced representations of semisimple Lie groups, *J. Math. Kyoto Univ.*, 8(1968), 313-363.
- [H2] T.Hirai, Some remarks on invariant eigendistributions on semisimple Lie groups, *J. Math. Kyoto Univ.*, 12(1972), 393-411.
- [H3] T.Hirai, Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups, II. General theory for semisimple Lie groups, *Japan. J. Math.*, 2(1976), 27-89.
- [H4] T.Hirai, ———, III. Methods for construction for semisimple Lie groups, *ibid.*, 2(1976), 269-341.
- [H5] T.Hirai, ———, IV. Explicit forms of characters of discrete series representations for $Sp(n, \mathbb{R})$, *Japan. J. Math.*, 3(1977), 1-48.
- [Hum] J.E.Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer-Verlag, 1972.
- [Ja] C.Jantzen, *Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren*, Springer-Verlag, 1983.
- [Jo] A.Joseph, Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra I, II, *J. Algebra*, 65(1980), 269-283, 284-306.
- [Ki] D.R.King, The character polynomial of the annihilator of an irreducible Harish Chandra module, *Amer. J. Math.*, 103 (1981), 1195-1240.
- [KZ] A.W.Knapp and G.Zuckerman, Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups I, II., *Ann. Math.*, 116(1982), 389-455, 456-501.

- [La] R.Langlands, On the classification of irreducible representations of real algebraic groups, mimeographed notes, Institute for Advanced Study, 1973.
- [Li] R.L.Lipsman, On the characters and equivalence of continuous series representations, J. Math. Soc. Japan, 23(1971), 452-480.
- [N1] K.Nishiyama, Virtual character module of semisimple Lie groups and representations of Weyl groups, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [N2] K.Nishiyama, Virtual characters and constant coefficient invariant eigendistributions on a semisimple Lie group, preprint, 1985.
- [Sh] H.Shin'ya, Spherical functions on locally compact groups, J. Math. Kyoto Univ., 12-1(1972), 55-85.
- [Su] M.Sugiura, Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras, J. Math. Soc. Japan, 11(1959), 374-434.
- [Va] V.S.Varadarajan, Infinitesimal theory of representations of semisimple Lie groups, in Harmonic analysis and representations of semisimple Lie groups, edited by Wolf et al., Reidel, 1980.
- [Vo1] D.A.Vogan, Gelfand-Kirillov dimension for Harish-Chandra modules, Inv. Math., 48(1978), 75-98.
- [Vo2] D.A.Vogan, Representations of real reductive Lie groups, Birkhäuser, 1981.
- [Vo3] D.A.Vogan, Irreducible characters of semisimple Lie groups IV, Character multiplicity duality, Duke Math. J., 49(1982), 943-1073.
- [Wl] N.Wallach, Harmonic analysis on homogeneous spaces, Marcel Dekker, 1973.
- [Wr] G.Warner, Harmonic analysis on semisimple Lie groups I,II, Springer-Verlag, 1972.