数理解析研究所講究録
第572巻 1985年 27-36

Dirichlet series with periodic algebraic coefficients

八戸工大　岡田忠成 (Tadashige Okada)

§1.　$N \geq 1$ を整数とする．周期 N を持つ $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ の全体を $F(N)$ と表わす．$f \in F(N)$ に対して

$$L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

と定義する．$L(s,f)$ は $s=1$ で留数が

$$R(f) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} f(r)$$

の高々1位の極を持つ以外は全平面で正則である．したがって，$L(s,f)$ が $s=1$ で正則であることと

(1)
$$\sum_{r=1}^{N} f(r) = 0$$

が成り立つことは同値である．また，無限級数 $L(1,f)$ が収束するためには（1）の成り立つことが必要十分である．

$A(N)=\{f\in F(N)\mid f$ は (1) をみたす$\}$ とおく.

Baker-Birch-Wirsing [2] は, $f\in F(N)$ に対する方程式

$$L(1,f)=0 \tag{2}$$

に関して次の定理を示した.

定理. 次の条件 (i), (ii) の下で, 方程式 (2) の解は $f=0$ に限る.

(i) f は even であるか, あるいは N次円周等分多項式 Φ_N は体 $\mathbb{Q}(f)=\mathbb{Q}(f(1),\cdots,f(N))$ 上で既約である.

(ii) $1<(n,N)<N$ なら $f(n)=0$.

これから, Chowla の問題: Nが素数のとき (2) をみたす有理数値の $f\neq 0$ が存在するか?, が否定的に解決されることがわかる.

ここでは条件

(*) Φ_N は体 $\mathbb{Q}(\{f(i)-f(-i)\mid 1\leq i<N/2\})$ 上で既約である.

の下で, 方程式 (2) を解くことを目標とする. さらに (2) とその p進類似

$$(3) \qquad L_p(1, f) = 0$$

との関連についても調べる(cf. [5], [6]).

§2. (2) をみたす f の具体例を作ってみよう.

$d \geq 1$ を N の約数とする. $g \in F(N/d)$ に対して

$$g^{[d]}(n) = \begin{cases} g(n) - d\,g(n/d) & (d \mid n \text{ のとき}) \\ g(n) & (d \nmid n \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する. $g^{[d]} \in F(N)$ で

$$L(s, g^{[d]}) = (1 - d^{1-s}) L(s, g)$$

が成り立つ. 右辺の $1 - d^{1-s}$ と $L(s, g)$ の $s = 1$ における Laurent 展開を考えて

$$L(1, g^{[d]}) = R(g) \log d$$

を得る. これから, $g \in A(N/d)$ なら $f = g^{[d]}$ が (2) をみたすことがわかる.

ところが, 条件(*)の下で (2) の解は上に述べた様な例で尽くされていることが次の定理によってわかる.

定理 1. 条件(*)をみたす $f \in F(N)$ が (2) の解

であるならば

$$f = \sum_{\ell | N} g_\ell^{[\ell]}$$

となる $g_\ell \in A(N/\ell)$ が存在する．ここで ℓ は N を割る素数を動く．

証明は，次の二つの補題と $L(1,\chi) \neq 0$ であることから導かれる．

補題 1．$f \in F(N)$ に対して，次の条件 (a) ～ (e) をみたす $g \in F(N)$ と $g_\ell \in F(N/\ell)$ が存在する．

(a)． $$f = g + \sum_{\ell | N} g_\ell^{[\ell]} .$$

(b) $(n, N) > 1$ なら $g(n) = 0$．

(c) $g(\mathbb{Z})$，$g_\ell(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Q} f(1) + \cdots + \mathbb{Q} f(N)$

(d) N の素因数 p に対して $f(p\mathbb{Z}) = \{0\}$ ならば $g_\ell(p\mathbb{Z}) = \{0\}$．特に $g_p = 0$．

(e) f が odd (resp. even) ならば g と g_ℓ も odd (resp. even) である．

補題 2．$(a, N) = 1$ とし $f'(n) = f(an)$ とおく．(*) をみたす f が (2) の解であるなら，f' も (2) の解

である.

(証明) 簡単のため, Φ_N が体 $\mathbb{Q}(f)$ 上で既約であると仮定して証明する.

$$\mathcal{L} = \{ l \in \mathbb{C} \mid e^{l} \in \overline{\mathbb{Q}} \}$$

とおけば, $\mathcal{L}$ は $\mathbb{C}$ の $\mathbb{Q}$-linear subspace になる.

$$\overline{\mathbb{Q}}\mathcal{L} = \{ \alpha_1 l_1 + \cdots + \alpha_m l_m \mid \alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}},\ l_i \in \mathcal{L},\ m \geq 1 \}$$

とおくと, Baker [1] から

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{L} &\simeq \overline{\mathbb{Q}}\mathcal{L} \\ \alpha \otimes l &\longmapsto \alpha l \end{aligned}$$

となる. したがって, $\sigma \in Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ に対して αl を $\alpha^{\sigma} l$ に写す $\mathbb{Q}$-linear isomorphism

$$\tilde{\sigma} : \overline{\mathbb{Q}}\mathcal{L} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}\mathcal{L}$$

が定まる. $f \in A(N)$ のとき

$$L(1,f) = -\frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{N-1} f(r) \zeta^{-rs} \log(1-\zeta^{s})$$

となる. ただし $\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/N}$ とする. $f \in A(N)$ なら $f' \in A(N)$ で

$$L(1,f') = -\frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} \sum_{s=1}^{N-1} f(ar) \zeta^{-rs} \log(1-\zeta^{s})$$

$$= -\frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{N-1} f(r)\zeta^{-brs}\log(1-\zeta^{s})$$

となる．ただし $ab \equiv 1 \pmod N$ とする．Φ_N が $\mathbb{Q}(f)$ 上で既約だから，$\sigma|\mathbb{Q}(f) = id_{\mathbb{Q}(f)}$ かつ $\zeta^{\sigma} = \zeta^{a}$ となる $\sigma \in Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が存在する．このとき $\tilde{\sigma}L(1,f) = L(1,f')$ となるから，$L(1,f)=0$ なら $L(1,f')=0$ である．

系． (*)をみたす f が (2) の解になるための必要十分条件は

$$\begin{cases} f(a) + \displaystyle\sum_{\substack{r=1 \\ 1<(r,N)<N}}^{N} f(r)A(r,a) + \frac{1}{\varphi(N)} f(N) = 0 & (1 \le a < N,\ (a,N)=1) \\[2ex] \displaystyle\sum_{\substack{r=1 \\ 1<(r,N)\le N}}^{N} f(r)\varepsilon(r,l) = 0 & (l \mid N) \end{cases}$$

が成り立つことである．ただし $A(r,a)$ は

$$A(r,a) = \sum_{\substack{m \mid N^{\infty} \\ am \equiv r \pmod N}} \frac{1}{m}$$

によって定義される有理数である．また $\varepsilon(r,l)$ は $l^{\alpha} \| N$，$l^{\nu} \| r$ とするとき

$$\varepsilon(\nu,\ell) = \begin{cases} \alpha + \dfrac{1}{\ell-1} & (\nu \geq \alpha \text{ のとき}) \\ \nu & (\nu < \alpha \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義される有理数である．

この系から §1 で述べた Baker-Birch-Wirsing の定理が直ちに従うことに注意する．

§3． p を素数，$M>1$ を N と g の公倍数，a を p と素な整数とする． Washington [7] に従って p-adic partial zeta function を

$$L_p(s,a,M) = \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{M}\langle a\rangle^{1-s}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{1-s}{j}\cdot B_j\cdot\left(\frac{M}{a}\right)^j$$

によって定義する．そして，$L(s,f)$ の p 進類似を

$$L_p(s,f) = \sum_{\substack{a=1 \\ p\nmid a}}^{M} f(a)\,L_p(s,a,M)$$

と定義する． $L_p(s,f)$ は $s=1$ で留数が

$$R_p(f) = \frac{1}{M}\sum_{\substack{a=1 \\ p\nmid a}}^{M} f(a)$$

の高々1位の極を持つ以外は

$$\{ s \in \mathbb{C}_p \mid |s| < q \cdot p^{-1/(p-1)} \}$$

において正則である．自然数 n が $n \equiv 0 \pmod{p-1}$ ($p>2$ のとき) $n \equiv 0 \pmod{2}$ ($p=2$ のとき) であるなら

$$L_p(1-n, f) = L(1-n, f^*) = -\frac{1}{n} M^{n-1} \sum_{\substack{a=1 \\ p \nmid a}}^{M} f(a) B\left(\frac{a}{M}\right)$$

となる．ただし

$$f^*(n) = \begin{cases} f(n) & (p \nmid n \text{ のとき}) \\ 0 & (p \mid n \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする．f が odd なら上の右辺の和は 0 となるから，$L_p(s, f)$ は恒等的に 0 になる．したがって，方程式 (3) を考えるときは f を even に限ってよいことがわかる．

定理 2． f が even ならば，$L_p(1, f) = 0 \Leftrightarrow L(1, f^*) = 0$．さらに $p \nmid N$ のとき，$L_p(1, f) = 0 \Leftrightarrow L(1, f) = 0$．

証明は，定理 1，補題 1 と次の補題 3 に基づく．

補題 3． $(a, N) = 1$ とし $f'(n) = f(an)$ とおく．f が even で (3) をみたすならば，f' も (3) をみたす．

この補題の証明には，Brumer [3] を使う．

付記．　$k>1$ を整数とする．$f\in F(N)$ に対する方程式

$$L(k,f)=0$$

を考える．この場合も，解はある適当な条件（例えば f が有理数値であるとか）の下で，

$$L(s,f)=(1-d^{k-s})L(s,g)\qquad (g\in F(N/d))$$

から由来するもので尽くされるのではないかと思われる．$f(-n)=(-1)^k f(n)$ かつ Φ_N が $\mathbb{Q}(f)$ 上で既約であるときは，たしかにこのことは成り立つ（cf. [4]）．

参考文献

[1] A. Baker, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers II*, Mathematika, 14 (1967), 102–107.

[2] A. Baker, B. J. Birch and E. A. Wirsing, *On a problem of Chowla*, J. Number Theory, 5 (1973), 224–236.

[3] A. Brumer, *On the unit of algebraic number fields*, Mathematika, 14 (1967), 121–124.

[4] T. Okada, *On an extension of a theorem of S. Chowla*, Acta Arith., 38 (1981), 341–345.

[5] T. Okada, *On a certain infinite series for a periodic arithmetical function*, Acta Arith., 40 (1982), 143–153.

[6] T. Okada, *Dirichlet series with periodic algebraic coefficients*, J. London Math. Soc., to appear.

[7] L. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, G.T.M. 83 (Springer, 1982).