数理解析研究所講究録
第572巻 1985年 74-83

一般化オイラー定数とリーマンゼータ関数

信州大教育　松岡　楽　(Yasushi Matsuoka)

1。はじめに。

オイラー定数には種々の拡張が知られているが、それらについては本講究録金光氏の論文を参照されたい。ここではリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ と直接関係している一般化オイラー定数（[9] 参照）

$$\gamma_n = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\log^n k}{k} - \frac{\log^{n+1} N}{n+1}\right) \qquad (n \text{ は非負整数})$$

について考え、その最近の結果と予想とを述べる。$\log^0 1 = 1$ とすると、γ_0 はよく知られているオイラー定数であり、γ_n は次の式で $\zeta(s)$ と密接に結びついていることがわかる（[3] 参照）。

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\gamma_n (s-1)^n \tag{1}$$

γ_n の歴史的なことに関してはバーント（[1], Entry13）やイビチ（[8], p.49）等を参考にされたい。

2 。γ_n と $\zeta(s)$ の零点との関係。

式 (1) と $\zeta(s)$ の無限乗積展開とを用いると、次の定理を得るが、これはリーマンの公式 ([4],p.67)

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{|\rho|\leqq x}\rho^{-1} = 1 + \frac{1}{2}\gamma_0 - \frac{1}{2}\log\pi - \log 2$$

の一般化であり、γ_n と $\zeta(s)$ の零点 ρ とを結ぶ基本的関係式と考えられる（[12] 参照）。

定理 1 。整数 $n \geqq 2$ について、等式

$$\sum_{\rho}\rho^{-n} = 1-(1-2^{-n})\zeta(n) + n\sum_{h=1}^{n}\frac{1}{h}\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_h=n-h\\ j_1\geqq 0,\ldots,j_h\geqq 0}}\prod_{b=1}^{h}\frac{\gamma_{j_b}}{j_b!} \tag{2}$$

がなりたつ。ここで $\sum_{\rho}$ は $\zeta(s)$ の複素零点 ρ のすべてを動くものとする。

$n = 2,3,4$ について具体例を示せば次のようになる。

例 1 。$\sum_{\rho}\rho^{-2} = 1 - \frac{1}{8}\pi^2 + 2\gamma_1 + \gamma_0^2$ 。

例 2 。$\sum_{\rho}\rho^{-3} = 1 - \frac{7}{8}\zeta(3) + \frac{3}{2}\gamma_2 + 3\gamma_0\gamma_1 + \gamma_0^3$ 。

例 3 。$\sum_{\rho}\rho^{-4} = 1 - \frac{1}{96}\pi^4 + \frac{2}{3}\gamma_3 + 2\gamma_0\gamma_2 + 2\gamma_1^2 + 4\gamma_0^2\gamma_1 + \gamma_0^4$ 。

この定理がどの程度 $\zeta(s)$ の零点を規制しているかは詳らかではないが、$\zeta(s)$ の零点に関する興味深い等式を導くことが

できる。式 (2) の右辺をδ_nとおき、$\frac{1}{2}+i\alpha_1(\alpha_1>0)$ を$\zeta(s)$の最初の複素零点とすると、

$$\alpha_1=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\delta_n^2-\frac{1}{2}\delta_{2n}\right)^{-1/n}-\frac{1}{4}\right\}^{1/2}$$

を得る（[13], 定理 8 参照）。この式はさらに一般化することができる。まず、二重数列$\delta(n,k)$ を帰納的に定義する。$k=1$ については$\delta(n,1)=\delta_n$ とし、$k\geqslant 2$ に対しては

$$\delta(n,k)=\delta(n,k-1)-2R_{k-1}^{-n}\sum_{\substack{v=0\\ v\ \mathrm{even}}}^{n}(-1)^{v/2}\binom{n}{v}\left(\frac{1}{2}R_{k-1}^{-1}\right)^{n-v}\left(1-\frac{1}{4}R_{k-1}^{-2}\right)^{v/2},$$

$$R_{k-1}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\delta^2(n,k-1)-\frac{1}{2}\delta(2n,k-1)\right\}^{-1/2n}.$$

とおく。そうすると、次の定理を得る（[14], 系 3 参照）。

定理 2。リーマン予想が正しいと仮定し、さらに各複素零点はすべて単純であると仮定する。このとき、$\frac{1}{2}+i\alpha_k\ (\alpha_k>0)$ をk番目の複素零点とすると、等式

$$\alpha_k=\lim_{n\to\infty}\left[\left\{\frac{1}{2}\delta^2(n,k)-\frac{1}{2}\delta(2n,k)\right\}^{-1/n}-\frac{1}{4}\right]^{1/2}$$

を得る。

この定理ではリーマン予想等を仮定しているが、α_kを、

$\zeta(s)$の零点をふくまない数列の極限としてあらわしているという点で興味深い。しかし、その数列に一般化オイラー定数γ_nがふくまれているので、γ_nの性質がよくわからない現段階では、この定理を用いてα_kの精密なふるまいを想定することはできないようである。

3 。γ_nに関する研究。

γ_nの研究の中でもっとも重要なものは、現在のところ、その表示式および漸近式に関する研究であると思われる。γ_nの表示式はいくつか知られているが（[7]、[10]、[16] 等参照）、nが比較的小さいときは、オイラー・マクロリンの公式による次の式が基本的である（[10], 7 章参照）。N, k を正整数とし、B_nを $x/(e^x-1)=\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n/n!$ で定まるベルヌーイ数とし、$f_n^{(r)}(x)=d^r(x^{-1}\log^n x)/dx^r$ とし、$P_{2k}(x)=(-1)^{k-1}\,2\,(2k)!(2\pi)^{-2k}\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2k}\cos 2\pi mx$とおくと、等式

$$\gamma_n=\sum_{k=1}^{N}\frac{\log^n k}{k}-\frac{\log^{n+1}N}{n+1}-\frac{\log^n N}{2N}-\sum_{r=1}^{k}\frac{B_{2r}}{(2r)!}f_n^{(2r-1)}(N)-\frac{1}{(2k)!}\int_N^{\infty}P_{2k}(x)f_n^{(2k)}(x)\,dx$$

がなりたつ。この式を用いて、リャンとトッドはγ_n（$0\leqslant n\leqslant 19$）の正確な値を計算している（[10]数表参照）。n = 0,1,2 について具体例を示せば次のようである。

例 1 。$\gamma_0=0.577215664901533$.

例 2 。 $\gamma_1 = -0.0728158454836767.$

例 3 。 $\gamma_2 = -0.00969036319287232.$

n が十分大きいときには次の漸近式が基本的である（[15], 定理 1 参照）。

定理 3 。 N を非負整数とし、c を十分大きな正数とする。このとき、$n > c\Gamma(\frac{1}{3}N + \frac{17}{6})$ をみたすすべての整数 n について、漸近式

$$\gamma_n = \frac{n!}{\pi} e^{g(b)} \sum_{k=0}^{N} |h_{2k}|\, 2^{k+\frac{1}{2}}\, \Gamma(k+\tfrac{1}{2}) \left\{ g''(b)^2 + f''(b)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}k-\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \cos\left\{ f(b) - (k+\tfrac{1}{2})\arctan\frac{f''(b)}{g''(b)} + \arctan\frac{v_{2k}}{u_{2k}} \right\} +$$

$$+ O\left(2^{N+\frac{3}{2}}\, \Gamma(N+\tfrac{3}{2})\, n^{-\frac{1}{3}N+\frac{1}{6}} \log^{\frac{2}{3}N-\frac{1}{3}} n \; n!\, e^{g(b)} \right).$$

がなりたつ。

この定理の中で用いられている関数 f, g 等は以下のように定義される。

$$g(y) = -\frac{1}{2}(n+1)\log(a^2+y^2) - a\log 2\pi + \frac{1}{2}\pi y + \mathrm{Re}\log\Gamma(a+iy),$$

$$f(y) = -(n+1)\arctan\frac{y}{a} - y\log 2\pi - \frac{1}{2}\pi a + \mathrm{Im}\log\Gamma(a+iy)$$

であり、数列 h_k, u_k, v_k は

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k (y-b)^k = \exp\left\{ g(y)+if(y)-g(b)-if(b)-\frac{1}{2}g''(b)(y-b)^2-\frac{1}{2}if''(b)(y-b)^2 \right\},$$

$$u_k = \mathrm{Re}\, h_k \quad , \; v_k = \mathrm{Im}\, h_k$$

で定義される。また、式に出てくる文字 a, b は次の x, y に関する連立方定式

$$-(n+1)\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{1}{2}\pi - \mathrm{Im}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(x+iy) = 0$$

$$-(n+1)\frac{x}{x^2+y^2} - \log 2\pi + \mathrm{Re}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(x+iy) = 0$$

の解 $x = a, y = b$ として定義される。定理の条件のもとでこの解は一意的であることが証明されるので、各 a, b は n の関数と考えられる。

この定理は Υ_n に関するただひとつの漸近展開という点ですぐれているが、式にふくまれる a, b 等のふるまいが現在のところよく解明できていないので、そのままでは役立たない。Υ_n の性質を調べるには定理 3 を便宜的に変形した次の近似式が有用である。g(b), f(b) が n の関数なので、わかりやすくするため、 $G(n) = g(b), F(n) = f(b)$ とおく ([13], 定理 1 参照)。

定理 4 。 m を十分大きな整数とし、 c を任意の正数とする。

このとき、$|n-m| < c \log m$ をみたすすべての n について

$$\gamma_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} n^{1/2} \log^{-1} n \; n! \; e^{G(n)} \left[\cos\left\{F(m) - \frac{1}{2}\pi \frac{n-m}{\log m}\right\} + O\left(\frac{\log\log m}{\log m}\right)\right]$$

がなりたつ。ただし、残余項の定数は c のみに依存し、n, m とは無関係である。

この定理から次の三つの系が容易に導かれる（[13],[15]参照）。

系１。任意の正数 ε に対して、十分大きな n については、不等式

$$|\gamma_n| < \exp(n \log\log n + \varepsilon n)$$

がなりたつ。また、同じ ε に対して、不等式

$$|\gamma_n| > \exp(n \log\log n - \varepsilon n)$$

をみたす n は無限個存在する。

系２。n を正整数とし、ε を任意に小さい正数とし、$y = [(2-\varepsilon)\log n]$ とする。そうすると、$\gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_{n+y}$ がすべて同符号となるような n は無限個存在する。$y = [(2+\varepsilon)\log n]$ とすると、$\gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_{n+y}$ がすべて同符号となるような n は高々有限個に限られる。

系３。$\omega_+(N)$を$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N$の中で正符号をとるものの個数とし、$\omega_-(N)$を$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N$の中で負符号をとるものの個数とする。このとき、漸近式

$$\omega_{\pm}(N) = \frac{1}{2} N + o(N) \qquad (N \longrightarrow \infty)$$

がなりたつ。

γ_nの本格的研究はブリッグス[2]が最初であると思われるが、ここで得られた三つの系はかれの定理の改良であり、現在知られているもっともよい結果である。しかしながら、本論文定理２の改良に直接役立てることはできないようである。

4。γ_nに関する予想。

おわりにかえて、一般化オイラー定数γ_nに関する予想を述べることにする。

予想１。一般に、指数型整関数においては、そのマクロリン展開係数と漸近展開係数との間に密接な関係があることが示されている（[5],p.263参照）。それと同じように、$\zeta(s)$の漸近展開、リーマン・ジーゲルの公式（[17],p.78参照）、筆者の漸近公式（[11]参照）等とγ_nとの間にも密接な関係があることが

予想される。

予想2。定理2のままではα_kの性質がよくわからないが、γ_nの微妙なふるまいを解明することにより、同じ定理2の条件のもとでα_kをあらわすさらに性質のよい無限級数表示が可能であると思われる。

予想3。フルビッツ[6]の研究によれば、級数

$$\zeta_1(s) = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-1}\log^{-s} n \quad (\mathrm{Re}\ s > 1)$$

を解析接続して得られる関数は、$\zeta_1(0)=\gamma_0-1$、$\zeta_1(-n)=\gamma_n\ (n \geqq 1)$をみたし、$\gamma_n$の連続化に相当することがわかる。この関数に関して、$\zeta_1(s)$と$\zeta_1(1-s)$との間にある種の関数等式が伏在していると思われる。

参考文献

[1] B.C.Berndt and R.J.Evans, Chapter 7 of Ramanujan's second note book, Proc. Indian Akad. Sci. (Math. Sci.) 92(1983), 67-96.

[2] W.E.Briggs, Some constants associated with the Riemann zeta function, Michigan Math. J. 3(1955/56), 117-121.

[3] W.E.Briggs and S.Chowla, The power series coefficients of $\zeta(s)$, Amer. Math. Monthly 62(1955), 323-325.

[4] H.M.Edwards, Riemann's zeta function, Academic Press, New York and London, 1974.

[5] W.B.Ford, Studies on divergent series and summability, and the asymptotic developments of functions defined by Maclaurin series, Chelsea Pub. Comp., New York, 1960.

[6] S.Hurwitz, On a class of functions suggested by the zeta of Riemann, Ann. Math. 45(1944), 340-346.

[7] M.I.Israilov, The Laurent expansion of the Riemann zeta function (Russian), Trudy Mat. Inst. Tteklov 158(1981), 98-104.

[8] A.Ivić, The Riemann zeta function, John Wiley and sons, New York, 1985.

[9] J.Knopmacher, Generalized Euler constants, Proc. Edinburgh Math. Soc. 21 (1978), 25-32.

[10] J.J.Y.Liang and J.Todd, The Stieltjes constants, J. Res. National Bureau of Standards Math. Sci. B76 (1972), 161-178.

[11] Y.Matsuoka, An approximate formula for the Riemann zeta function, J. Math. Soc. Japan 36(1984), 659-674.

[12] Y.Matsuoka, A note on the relation between generalized Euler constants and the zeros of the Riemann zeta function, J. Fac. Educ. Shinshu Univ. 53(1985), 81-82.

[13] Y.Matsuoka, Generalized Euler constants associated with the Riemann zeta function, Proc. Conf."Number Theory and Combinatrics, Japan 1984", World Scientific Pub. Co., Singapore, to appear.

[14] Y.Matsuoka, A sequance associated with the zeros of the Riemann zeta function, to appear.

[15] Y.Matsuoka, On the power series coefficients of the Riemann zeta function, to appear.

[16] E.P.Stankus, A remark on the Laurent coefficients of the Riemann zeta function(Russian),Researches for Number Theory 8, Nauka, Leningrad (1983), 103-107.

[17] E.C.Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta function, Clarendon Press, Oxford, 1951.