数理解析研究所講究録
第 572 巻 1985 年 145-150

2重スターリング形式について

津田塾大　片山孝次 (Koji Katayama)

2重ガンマ関数が本格的に数論に登場したのは，Shintani [2] をはじめとする，といってよい。さらに[3]において，Shintani は2重ガンマ関数に付随して現れる，2重スターリング・モデュラー形式を数論に登場させた。

これらの関数の性質を調べるには，

リーマン・ゼータ $\longrightarrow$ ガンマ関数

の流れの analogy を追う方がすっきりする。

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, $\omega_2/\omega_1 \notin (-\infty, 0]$, $w \in \mathbb{C}$ に対し

$$\zeta_2(s, w, (\omega_1, \omega_2)) = \sum_{m,n=0}^{\infty} (w + m\omega_1 + n\omega_2)^{-s}$$

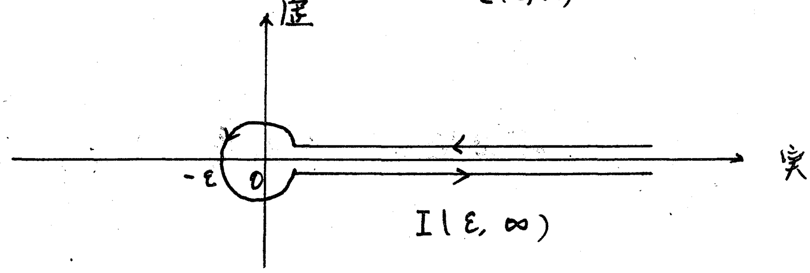
$\mathrm{Re}\, s > 2$

$w^s = e^{s \log w}$

$\log w = \log|w| + i \arg w, \quad -\pi \leqq \arg w < \pi$

を2重リーマン・ゼータ関数という。これはリーマン・ゼータの場合と同様，contour integral による表現

$$\zeta_2(s, w, (\omega_1, \omega_2)) = \frac{\Gamma(1-s)\, e^{-s\pi i}}{2\pi i} \int_{I(\varepsilon,\infty)} \frac{e^{-wt}\, t^{s-1}\, dt}{(1-e^{-\omega_1 t})(1-e^{-\omega_2 t})}$$



をもち，simple poles $s=1, 2$ をのぞいて全 s－平面に解析接続される。また

$$\lim_{w \to 0} \left(\frac{\partial}{\partial s} \zeta_2(0, w, \omega_1, \omega_2) + \log w \right)$$
$$= -\rho_2(\omega_1, \omega_2)$$

が存在することもわかる．この $\rho_2(\omega_1, \omega_2)$ を2重スターリング・モデュラー形式とよぶ。さらに

$$\log \frac{\Gamma_2(w, \omega_1, \omega_2)}{\rho_2(\omega_1, \omega_2)} = \frac{\partial}{\partial s} \zeta_2(0; w, \omega_1, \omega_2)$$

で定められる Γ_2 を2重ガンマ関数という。

Shintani は[3]において，$w>0$, $z>0$ に対して，$\Gamma_2(w, (1, z))$，$\rho_2(1, z)$ の1重無限積表示（Barnes[1]を参照）を求めた，それより Γ_2, ρ_2 の $\{(w, z);\ w \in \mathbb{C},\ w \neq m+nz,\ m, n = 0, 1, 2, \cdots,\ z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]\}$ への解析接続が得られる。さらに

$\mathrm{Im}\, z > 0$ に対して

$1°$ $\rho_2(1,-z)\rho_2(1,z)$

$$= (2\pi)^{\frac{3}{2}} z^{-\frac{1}{2}} \eta(z) \exp\left\{\pi i \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12z}\right)\right\}$$

$2°$ $$\frac{\Gamma_2(w,(1,z))}{\rho_2(1,z)} \cdot \frac{\Gamma_2(1-w,(1,-z))}{\rho_2(1,-z)} \cdot \frac{\Gamma_2(1+z-w,(1,z))}{\rho_2(1,z)} \cdot \frac{\Gamma_2(w-z,(1,-z))}{\rho_2(1,-z)}$$

$$= \frac{\eta(z)}{\vartheta(w,z)} \exp\left\{\pi i \left(\frac{-1}{6z} + \frac{w-w^2}{z}\right)\right\}$$

を証明した。ここで

$$\eta(z) = e^{\frac{\pi i z}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n z}) \qquad (\text{デデキント})$$

$$\vartheta(w,z) = 2e^{\frac{\pi i}{6}z} (\sin \pi w)\, \eta(z) \cdot$$
$$\cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i(w+nz)})(1 - e^{2\pi i(-w+nz)})$$

（ふつう ϑ_{11} とかかれるテータ関数）

である，これは "2つのガンマ関数の積 ≒ sin" を思わせる。そしてここに，古典的なクロネッカー極限公式においては η，ϑ が現われ，その factor である ρ_2，Γ_2 が，Hecke，Siegel の突破できなかった "Kronecker limit formulas for real quadratic fields" に登場する理由があると思われる。

さて，η の "2つの ρ_2" への分解をみれば，$\rho_2(1,z)$ の modular 変換 $z \to \sigma(z)$ による挙動を見ようとするのは自然であろう。しかし，$\rho_2(1,z)$ の無限級数表示は望むべくも

なく，η，ϑ に比べてむずかしさは格段である。小文は，その方向へのほんの駆け出しの報告である。

定理（反転公式）

(i) $$\rho_2\left(1, \frac{1}{z}\right) = \rho_2(1, z) \exp\left\{\left(\frac{1}{2} - {}_2S_1'(z, (1, z))\right)\log z\right\}$$

(ii) $$\Gamma_2\left(w, \left(1, \frac{1}{z}\right)\right) = \Gamma_2(wz, (1, z)) \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{\left(\frac{1}{2} + {}_2S_1'(wz, (1\ z)) - {}_2S_1'(z, (1\ z))\right)\log z\right\}$$

ここで，${}_2S_n\,(w; w_1, w_2)$ は

$$\frac{1 - e^{-wt}}{(1 - e^{-w_1 t})(1 - e^{-w_2 t})} = \frac{w}{w_1 w_2 t} - {}_2S_0(w, w_1, w_2) +$$
$$\cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{{}_2S_n(w, w_1, w_2)}{n!}t^n +$$
$$\cdots\cdots$$

の展開係数であり，${}_2S_n'(w, w_1, w_2)$ は w に関する微分を示す。それはベルヌーイ多項式の analogy である。

もちろん，ρ と(i)より η の反転公式を導くことができる。

平行移動については，closed form ではないが，次の定理を証明することができる：まず $g(z)$ を

$$-\sum_{n=1}^{N-1}\left[\log\left(z + \frac{k}{n}\right) + \{(z+1)\log(z+1) - z\log z - 1\}n\right]$$
$$+ \frac{N-1}{2}\log\frac{z+1}{z}$$

の $N \longrightarrow \infty$ のときの有限部分とする。

(たとえば $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \log N$ の有限部分はオイラー定数 γ である。) さらに $a \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\chi_a(z) = a\left(-\frac{1}{12} + \zeta'(-1)\right) + \left(\frac{z+a}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12(z+a)}\right)\log(z+a)$$

$$-\left(\frac{z}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12z}\right)\log z + h_a(z),$$

$$h_a(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{a-1} g(z+k) & a>0 \\ \displaystyle -\sum_{k=-1}^{-a} g(z+k) & a<0 \end{cases}$$

とおく。

定理. $\rho_2(1, z+a) = \rho_2(1, z)\exp(\chi_a(z))$

一般のモデュラー変換に対する変換公式を求めるためにはさらに次の定理が必要である。

定理 $c \in \mathbb{Z}^+$ に対し

$$\rho_2\left(1, \frac{z}{c}\right) = \rho_2(1, z)^c \Lambda^{-1}(c, z),$$

$$\Lambda(c, z) = \prod_{k=1}^{c-1} \Gamma_2\left(\frac{k}{c}z, (1, z)\right)$$

以上の定理より, $\rho_2(1, \sigma(z))$ と $\rho_2(1, -z)$ を結ぶ変換公式を導くことができる。また ρ を用いて η の変換公式と比較し，デデキントの和を Γ_2 を用いて表すこともできる。しかし，結果は今のところ複雑であり，形式的なものにすぎな

いから，ここでは省略する，

[1] E.W. Barnes, The theory of the double gamma function, Philos. Trans. Roy. Soc. London ser. A, 196 (1901), 265–388

[2] T. Shintani, On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, J. Fac. Sci. Tokyo sec1A, 24, (1977), 167–199

[3] ————, A proof of the classical Kronecker limit formula, Tokyo J. Math. 3, (1980) 191–199