数理解析研究所講究録
第 572 巻 1985 年 176-179

トーラスの類数について

Johns Hopkins 大　小野 孝 (Takashi Ono)

有理数体 $\mathbb{Q}$ で定義された代数群 $G \subset GL_n$ があればその類数 h_G を double cosets の空间

$$G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathbb{A})_\infty$$

の点の数として定義することが出来る. Borel と Harish-Chandra の仕事によりこの数は有限である. ここで, $G(\mathbb{Q})$ は G の $\mathbb{Q}$-有理点の作る部分群, $G(\mathbb{A})$ は G のアデール群そして $G(\mathbb{A})_\infty = G(\mathbb{R}) \times \prod_{p\neq\infty} G(\mathbb{Z}_p)$, $\mathbb{R}$ = 実数体, $\mathbb{Z}_p$ = p 進整数環である.

さて, n 次の代数体 K が与えられたとき, 整数環 $\mathcal{O}_K$ の底 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ を用いて正則表現

$$(x\omega_1, \ldots, x\omega_n) = (\omega_1, \ldots, \omega_n)P(x), \quad x \in K,$$

をとると $P(x) \in M_n(\mathbb{Q})$ で, P から自然に得られる $\mathbb{Q}$ で定義されたトーラスを $T \subset GL_n$ とすると P により $T(\mathbb{Q})$, $T(\mathbb{Z})$ は乗法群 $K^\times$, 単数群 $\mathcal{O}_K^\times$ と同

一視される．h_K を K の通常の意味での類数とすると $h_T = h_K$ が確かめられる．このトーラス T は Weil の functor を用いれば $T = R_{K/Q}(G_m)$ と書かれる．ただし $G_m = GL_1 = \Omega^\times$，万有体 Ω の乗法群．

このように代数群 G があれば類数 h_G があるとゆう見方をすれば任意の相対代数体 K/k に対して一種の Euler 数 $E(K/k)$ を定義することが出来る．すなわち，k の上のトーラスの完全系列

$$1 \to T_0' \longrightarrow T_0 \xrightarrow{N} T_0'' \longrightarrow 1,$$

ここで $T_0 = R_{K/k}(G_m)$，$T_0'' = G_m$，$N = K/k$ に関するノルム，$T_0' = \mathrm{Ker}\, N$，を考える．これらすべてに $R_{k/Q}$ をほどこして Q 上のトーラスの完全系列

$$1 \to T' \longrightarrow T \longrightarrow T'' \longrightarrow 1$$

を得る．ここで $T = R_{K/Q}(G_m)$，$T'' = R_{k/Q}(G_m)$，$T' = R_{k/Q}(T_0')$ だから $h_T = h_K$，$h_{T''} = h_k$ で

(1)
$$\frac{h_T}{h_{T'}\, h_{T''}} = \frac{h_K}{h_{T'}\, h_k} = E(K/k)$$

は K/k のみに依存する正の有理数になる．$E(K/Q)$ を単に $E(K)$ と書く．とくに $n=2$，すなわち K/Q が 2 次体の場合は

(2)
$$E(K) = 2^{t_K - e_K}$$

が成立つ．ここに

$$e_K=\begin{cases}1, & K\text{が虚か}K\text{が実で}\ \exists\varepsilon\in O_K^\times,\ N\varepsilon=-1,\\ 2, & K\text{が実で}\ N\varepsilon=1,\ \forall\varepsilon\in O_K^\times,\end{cases}$$

$t_K=K$の判別式の相異なる素因子の数．

(2) はいわゆる二元二次形式の Gauss の種の理論の主定理に他ならない．

(1) の才一項は任意のトーラスの完全系列に対して意味を持ちその決定は h_T に関する公式（通常の h_K に対する Dedekind の類数公式の拡張）およびトーラスの isogeny $\lambda: T\longrightarrow T^*$ に関する整数論によってなされる．

とくに代数体の場合にもどり，K/k を巡回 Kummer 拡大とすると

$$(3)\qquad E(K/k)=\frac{\prod_{\mathfrak p} e_{\mathfrak p}(K/k)}{\# H^1(G(K/k), O_K^\times)}$$

が証明される．ここに $e_{\mathfrak p}(K/k)$ は k の素イデアル $\mathfrak p$ の K/k に関する分岐指数．とくに K/k が素数 l 次の場合 (3) は

$$(4)\qquad E(K/k)=l^{\,t(K/k)-e(K/k)}$$

となる。ここに

$t(K/k)$ = K/k で分岐する k の素イデアルの数,

$e(K/k)$ は $H^1(G(K/k), O_K^\times) = (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{e(K/k)}$ で定まる整数. (2)は(4)で $l=2$, $k=\mathbb{Q}$ として得られる.

(証明の詳細に関しては立教大学より出る講義録参照)