

Links and Their Graphs

早大教育 鈴木 晋一 (Shin'ichi Suzuki)

東海大理 近藤 久子 (Hisako Kondo)

序 結び目・絡み目 $L \subset \mathbb{R}^3$ の正則射影図 $\pi(L) \subset \mathbb{R}^2$ と平面 \mathbb{R}^2 上の signed graph が一対一に対応することはかなり昔から知られている (Yajima-Kinoshita [Y-K] 他)。当然 \mathbb{R}^2 上の signed graphs は結び目・絡み目の研究に役立つはずであるが、これ迄のところ Aumann [A] と Crowell [Cr] に利用されているだけで、特に挙げらるべき成果は無い。実際

(イ) 結び目・絡み目の正則射影図を直接取扱うのと対応する signed graph を取扱うとの間に特に注目すべきような差が見つかっていないこと、

(ロ) signed graphs の理論それ自体にほとんど見らるべき結果が無いこと、

などが主な原因と思われぬ。(イ)に関して言えば、結び目・絡み目に対応する signed graphs の組織的な例が少ないことも一因であろう。実際 Alexander-Briggs [A-B] や Reidemeister

[Re] の 9-crossings までの素な結び目の正則射影図の一覧表を直接・間接に利用して得られた結び目の成果は相当のものであると思われる。こんな思いもあって筆者は signed plane graphs の分類を利用して結び目・絡み目の分類の作業を行ってみることにした。この小論では、まず結び目・絡み目の正則射影図に対応する signed plane graph の簡単な紹介をし、次に有向結び目・有向絡み目に対応する signed-coded digraphs を紹介し、10-crossings の素な交番結び目に対応する size 10 (= edges の個数が 10) の plane graphs の分類を、上記の作業の途中経過として、報告する。

ついでに (ロ) について触れておく。signed graphs そのものの研究が Graph Theory の中では本流からはずれていなくなり、一般の graphs の本には定義すら載っていない。Harary et al [H-N-C] の第 13 章に "balanced" の概念を主とした記事がある。心理学・社会学などに適当な応用があるようで、この方面の論文が少数ながら見い出せる。

§1. 絡み目に対応する Signed Graphs

与えられた tame な絡み目 $L \subset \mathbb{R}^3$ は、必要ならば \mathbb{R}^3 の (small) ambient isotopy を施すことにより、射影 $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$, に関して正則 (regular) な位置にある

としてよい；すなわち $\pi|_L$ の特異点は L の edges の内点における有限個の 2 重点のみである。このとき、正則射影図 $\pi(L)$ は、2 重点を vertices として採用し、2 つの 2 重点を結ぶ $\pi(L)$ の弧を edges として採用することによって、 \mathbb{R}^2 上の 4-regular graph (一般に loops や multiedges を含む) と看做すことができる。しかもこの graph $\pi(L) \subset \mathbb{R}^2$ は 2-map colorable であることが容易に証明される……すなわち $\mathbb{R}^2 - \pi(L)$ の各領域に 2 色 (例えば白と黒) のうちの 1 色を塗って、edges を共有する領域同士には異なる色が塗られるようにすることができる。さて $\mathbb{R}^2 - \pi(L)$ の領域をこのように白黒 2 色で彩色したとき、次のようにして $\pi(L)$ に signed graph $\Sigma(\pi(L)) \subset \mathbb{R}^2$ を対応させる：

$\mathbb{R}^2 - \pi(L)$ の黒領域の集合を $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, \dots, B_\nu\}$ とする。

(I) $\pi(L)$ が連結の場合：各 $B_i \in \mathcal{B}$ に vertex v_i ($i=0, 1, \dots, \nu$) を対応させ、 $\pi(L)$ の vertex (i.e. 2 重点) D_k ごとに signed edge e_k を図 1 の規則によって対応させる；すなわち



図 1

B_i と B_j の共通の vertex D_k として v_i と v_j を結ぶ edge e_k を対応させ, edge e_k の sign $s(e_k) = \eta(D_k)$ とする。この結果 signed graph $\Sigma(\pi(L)) = ((V, E), s)$,

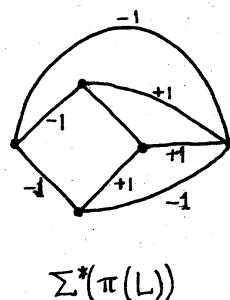
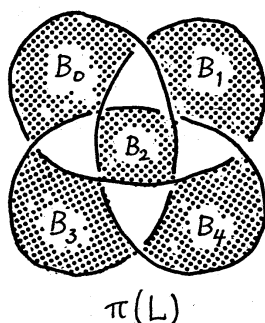
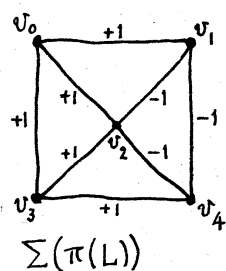
$$V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\},$$

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_\varepsilon\} \quad (\varepsilon \text{ は } \pi(L) \text{ の vertices の度数}),$$

$$s: E \rightarrow \{-1, +1\}; \quad s(e_k) = \eta(D_k).$$

が得られる。graph (V, E) は連結で自然に \mathbb{R}^2 に埋蔵されている。

同一の射影図 $\pi(L) \subset \mathbb{R}^2$ について, 黒領域と白領域を交換して得られる彩色に対して, 上の規則によって得られる signed graph を $\Sigma^*(\pi(L))$ と示す。 $\Sigma^*(\pi(L)) = ((V^*, E^*), s^*)$ とすると, 図1から容易にわかるように (図2の例参照), graph (V^*, E^*) は graph (V, E) の dual graph (Harary [H, p.113] 等参照) であり, edge $e_k \in E$ と edge $e_k^* \in E^*$ が vertex $D_k \in \pi(L)$ に対応するとき, $s^*(e_k^*) = -s(e_k)$ が成り立つ。 $\Sigma^*(\pi(L))$ は $\Sigma(\pi(L))$ の dual と呼ぶ; $(\Sigma^*(\pi(L)))^* = \Sigma(\pi(L))$ である。



(II) $\pi(L)$ が連結でない場合: $\pi(L)$ の連結成分ごとに上に述べた (I) の規則で signed graphs を作り, それらの disjoint union を $\Sigma(\pi(L))$ とする。

$\Sigma(\pi(L))$ の dual signed graph $\Sigma^*(\pi(L))$ も, $\Sigma(\pi(L))$ の各連結成分ごとに dual signed graph を (I) のように定め, それらの disjoint union で定義する。

上の定義から, 次の命題が直ちに得られる:

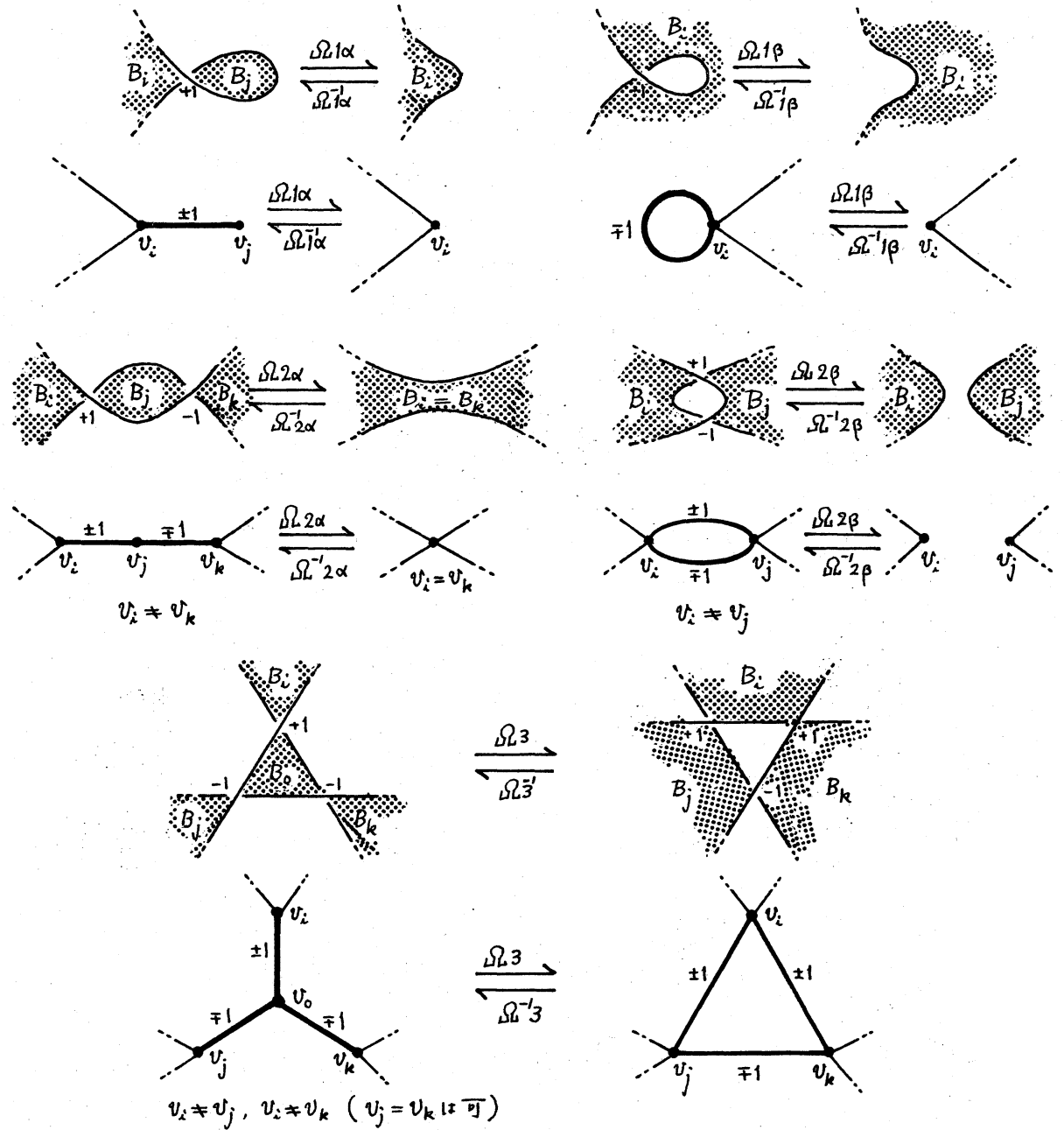
1.1 Proposition $\pi(L)$ が (交番) 絡み目 L の交番射影ならば, $\Sigma(\pi(L))$ の (従って $\Sigma^*(\pi(L))$ の) edges の signs はすべて同一である。□

1.2 Proposition 射影 π に関して正則な位置にある絡み目 $L \subset \mathbb{R}^3$ の, 平面 \mathbb{R}^2 に関する鏡像を L' とすれば, $\pi(L) = \pi(L')$ で, 対応する signed graphs $\Sigma(\pi(L)) = ((V, E), s)$ と $\Sigma(\pi(L')) = ((V', E'), s')$ に関しては $(V, E) = (V', E')$, $s' = -s$ が成立する。□

さて絡み目 L と L' が \mathbb{R}^3 のイソトピーで移り合うならば, $\pi(L)$ と $\pi(L')$ は今日 Reidemeister moves ([Re]) と呼ばれている種類の基本変形の有限列によって移り合うことが知られている。そこでこれらの基本変形に対応する signed graphs の基

本表形を導入する ([Y-K, §3]). 便宜上, 絡み目の正則射影図の Reidemeister moves と対して ν 図を定義する.

1.3 定義 次に挙げる \mathbb{R}^2 上の signed graphs の変形 $\Omega_{1\alpha}^{\pm 1}$, $\Omega_{1\beta}^{\pm 1}$, $\Omega_{2\alpha}^{\pm 1}$, $\Omega_{2\beta}^{\pm 1}$, $\Omega_3^{\pm 1}$ を Reidemeister moves と呼ぶ:



ただし ν graphs の edges の signs は複号同順と可也.

1.4 定義 (1) \mathbb{R}^2 上の signed graphs Σ と Σ' が Ω -同値 と

あるとは, \mathbb{R}^2 上の signed graphs の有限列

$$\Sigma = \Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_n = \Sigma'$$

が存在し, Σ_{i-1} と Σ_i は \mathbb{R}^2 上の イソトープで移れるか, Σ_i は

Σ_{i-1} から Reidemeister moves のいずれか 1 つで移れる ($i=1, \dots, n$)

ときをいい, $\Sigma \underset{\Omega}{\sim} \Sigma'$ を示す。また Σ を代表元とする Ω -

同値類を $[\Sigma]$ を示す。

(2) 平面上の signed graph Σ が strict であるとは, Σ に対

して edges の個数を減らす変形 $\Omega 1\alpha, \Omega 1\beta, \Omega 2\alpha, \Omega 2\beta, \Omega 3$ のいずれ

も適用できない場合をいう。(注意 $[\Sigma]$ について strict を

代表元が存在する。

(3) 平面上の signed graph Σ の連結成分の個数を $\omega(\Sigma)$ を表

すとき, 次のように定義する:

$$\omega[\Sigma] = \max \{ \omega(\Sigma') \mid \Sigma' \in [\Sigma] \}.$$

$\omega[\Sigma] = \omega(\Sigma')$ となる $\Sigma' \in [\Sigma]$ は当然 strict であるが逆は必ず

しも成立しない。 $\omega[\Sigma]$ が well-defined であることの証明は,

Goeritz 行列 (Goeritz $[G]$, c.f. [S]) の nullity などを用いて得ら

れるが, ここでは省略する。

絡み目 $L \subset \mathbb{R}^3$ に対応する signed graph $\Sigma(\pi(L))$ (の Ω -同値類) が定まったので, あえて問題を整理すると次のように述

べることができよう：

問題(1) 結び目・絡み目の性質の中で，対応する signed graphs を用いて判定する方が有利なものはないか？

一般にある種の対称性などを図から調べる際には，signed graphs にしてながめる方が判り易いことが多い（[Y-K, §4] 参照）。少々異質だが，

問題(2) 特に結び目の triviality の判定を signed graphs で解決できないか？

問題(3) signed graphs の性質から，結び目・絡み目の有効な性質・特徴・特性等を定義できないか？

これに関しては序で述べた (口) がネットワークである。最も容易に導びかれる signed graphs の Ω -同値類の不変量としては，前頁で述べた Goeritz 行列から導びかれる elementary ideals の列がある。（[S] を参照されたい。いずれもう少し深く研究してまとめてみたいと思っている。）

問題(4) signed graphs の Reidemeister moves を組み合わせて得られる graphs の表形を，有効なもの多数挙げて整理せよ。

これについては [Y-K, §3], [T₀] にいくつか挙げてある。この小論の第3節に，素な結び目の分類に関係する表形を整理してみた。

§2. 有向絡み目に対応する Signed Coded Digraphs

前節の 1.3 で図示した絡み目の正則射影図に関する Reidemeister moves は、絡み目のイソトピー型を保つから、有向絡み目も取扱える。小林一章氏は [Ko.1], [Ko.2] 等で有向絡み目の正則射影図に対応する signed coded digraphs を定義し、有向絡み目の Homfly 多項式の計算・特徴付けなどに応用を試みている。小林氏の定義では、 $\pi(L)$ から graph (V, E) を作る定義はこの §1 と同じだが、edges に与える sign $s: E \rightarrow \{1, -1\}$ の定義が §1 のとは異なる。そんなわけで、今のところ特に応用はないが、有向絡み目に対応する別種の signed coded digraphs の定義を、後章のために挙げておく。

有向絡み目 $L \subset \mathbb{R}^3$ の正則射影図 $\pi(L)$ に対して、向きを無視することによって §1 の規則によって signed graph $\Sigma(\pi(L)) = ((V, E), s)$ を得る。edge $e_k = v_i v_j \in E$ に対して、次の規則により coding と orientation を与える：

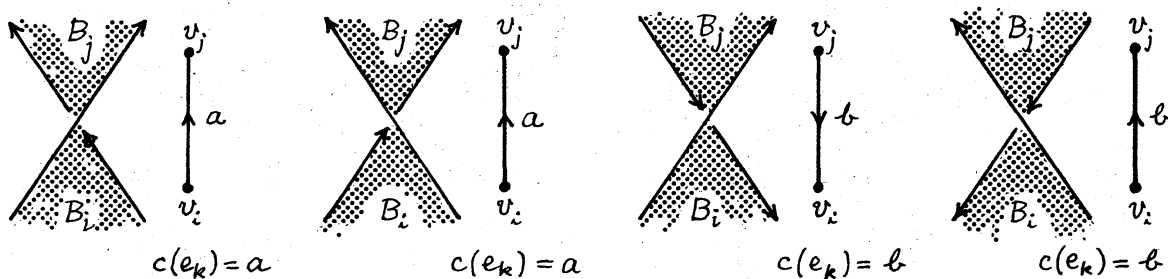


図 2

一般に graph $G = (V, E)$ に対して、写像

$$c : E \rightarrow \{a, b\}$$

を G 上の coding と呼び、 $e \in E$ に対して $c(e)$ を e の code と呼ぶことにする。この結果、有向絡み目 L の正則射影図 $\pi(L)$ に対して、signed coded digraph

$$\Gamma(\pi(L)) = ((V, E), s, c)$$

が対応する。

同一の射影図 $\pi(L) \subset \mathbb{R}^2$ について、黒領域と白領域を交換して得られる彩色に対して得られる signed coded digraph を $\Gamma^*(\pi(L)) = ((V^*, E^*), s^*, c^*)$ と書き、 $\Gamma(\pi(L))$ の dual という。edge $e_k \in E$ と edge $e_k^* \in E^*$ が vertex $D_k \in \pi(L)$ に対応するとき、

$$c^*(e_k^*) = \begin{cases} a & \text{if } c(e_k) = b, \\ b & \text{if } c(e_k) = a \end{cases}$$

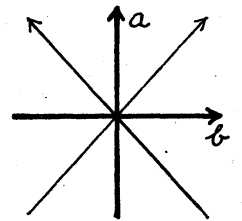


図3

が成立し、 e_k と e_k^* の交叉は図3のようになる。

(尚、上記の coding と orientation の決め方は [Ko.1] と同じである。)

signed coded digraph を図示する際は、orientation は普通に矢印で示し、各 edge $e \in E$ について sign $s(e)$ と code $c(e)$ とを合せて $+a, -a, +b, -b$ の符号を e に与えればよい。また signed coded digraphs の Reidemeister moves は有向絡み目の正則射影図 $\pi(L)$ の Reidemeister moves に対応して自然に定

めればよい。ここでは詳細は省略する。

上の定義から、次の命題が直ちに得られる：

2.1 Proposition 射影 π に関して正則な位置にある有向絡み目 $L \subset \mathbb{R}^3$ の、平面 \mathbb{R}^2 に関する鏡像を L' とすれば、

$\pi(L) = \pi(L')$ であり、対応する signed coded digraphs $\Gamma(\pi(L)) =$

$((V, E), s, c)$ と $\Gamma(\pi(L')) = ((V', E'), s', c')$ に関しては、次が

成立する： $(V, E) = (V', E')$ (digraphs として)、

$$s' = -s, \quad c = c'. \quad \square$$

2.2 Proposition 射影 π に関して正則な位置にある有向絡み目 $L \subset \mathbb{R}^3$ の向きを反えて得られる有向絡み目を $-L$ と

とすれば、 $\pi(L) = \pi(-L)$ であり、対応する signed coded digraphs

$\Gamma(\pi(L)) = ((V, E), s, c)$ と $\Gamma(\pi(-L)) = ((\bar{V}, \bar{E}), \bar{s}, \bar{c})$ に関し

ては、次が成立する：

$$(V, E) = (\bar{V}, -\bar{E}) \quad \left(\begin{array}{l} \bar{E} \text{ は } E \text{ の orientation を逆} \\ \text{にしたもの} \end{array} \right),$$

$$s = \bar{s}, \quad c = \bar{c}. \quad \square$$

§3 Enumeration of Knots and Links by Signed Graphs

前世紀の後半、Tait [Ta], Kirkman [Ki], Little [L] らによって絡み目の最小交叉点数を基準にした分類表作りが始まった。当時はまだ「topology」が明確になっていなかったが、驚く程正確な分類である。9-crossings 迄の素な結び目一覧表の完

成は Alexander-Briggs [A-B] までかかった (c.f [Re])。その後 Anger [An] による Alexander 多項式の計算例などがあつたが、相当に長い間 “enumeration” は特に進展が無かつた。1969年に Conway [Co] は basic polyhedra と名付けた少数の平面グラフと algebraic tangles を用いて 11-crossings までの素な結び目と 10-crossings までの素な絡み目の一覽表を公表し、Conway の potential polynomials と共にその後の Knot Theory に多大の影響を与えた。例へば 10-crossings の結び目・絡み目の分類に際しては、basic polyhedra $1^* \sim 10^{**}$ の vertices のところに 10-crossings にならうに algebraic tangles に入れてみて、各種の結び目不変量を用いて重複を除き同定していくことになる。中西康剛氏の試算によれば、 n -crossings の algebraic tangles の個数は次の表のようになる：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	2	2	6	17	62	$\cong 274$	$\cong 639$	$\cong 1959$	$\cong 6490$	$\cong 21305$	$\cong 73400$

n -crossings algebraic tangles の個数

従つて論文には現われない膨大な作業があつたはずで、[Co] の表には Perco [P₂] による指摘だけでミスプリントも含めて 11ヶ所の誤りがある。Conway の仕事を基にして、Perco [P₁] では 10-crossings の素な結び目の図の一覽が、[P₂] では 11-crossings の素な結び目の一覽がある。また Rolfsen [Ro] の付

録の 10-crossings までの素な結び目の図と 9-crossings までの結び目の図も [Co] を基礎としたものである ($10_{161} = 10_{162}$ で 1 つ多い。 10_{144} の図は誤りで、 10_{83} と 10_{86} は図を交換する。多項式にも少なくとも 4 つの誤りがある。 [N₂] 参照)。中西 [N₂] の付録には 11-crossings の素な結び目の図がある (ただし交番結び目だけでなく 9 個の図に誤りがある。)

一方、最近 Dowker-Thistlethwaite [D-T] では Tait [Ta] の方法を改良し、computer によって enumeration を行っている。enumeration の歴史等については、Thistlethwaite [Th] に自身の仕事を解説を含めて詳しい報告があるので、中西 [N₁] と共に参照されたい。

尚、この研究集会の後、樹下真一先生から次の御指摘がありましたので、ここに収録しておきます。

Thistlethwaite によれば、crossing number が 13 までの素な結び目の個数は以下の通り：

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	2	3	7	21	49	165	552	2176	9988
										Total: 12965

- Remarks:
1. $\Delta(t) = 1$ for 19 knots,
 2. 5639 different $\Delta(t)$'s,
 3. 10595 different 2-variable polynomials,
 4. Representations of $\pi_1(\mathbb{S}^3 - k)$ of degree ≤ 6 make the above table complete.

さて平面上の signed graphs を用いて結び目・絡み目の enumeration を実行する際、まず次の基本となる：

(1) n -crossings ($n \geq 3$) の結び目・絡み目 L に対応する plane graph (= 射影図) $\pi(L)$ は連続であるとしてよい。すなわち $\pi(L)$ の order (= vertices の個数) = n ,

$$\text{size (= edges の個数)} = 2n.$$

従って $\mathbb{R}^2 - \pi(L)$ の領域の個数は、Euler-Poincaré formula より $n+2$ となる。そこで $\Sigma(\pi(L))$ と $\Sigma^*(\pi(L))$ のうち、order の小さい方を $\Sigma(\pi(L))$ として採用することにする。

$$\Sigma(\pi(L)) \text{ の order} \leq \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor,$$

$$\Sigma(\pi(L)) \text{ の size} = \pi(L) \text{ の order} = n.$$

(2) 特に素な結び目・絡み目に制限するから

$$\Sigma(\pi(L)) \text{ は cut-vertex を持たない (= 2-connected)}$$

としてよい。もちろん strict なものに制限してよい(1.4)。

(3) 向きを逆転する同相写像 $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ によって移り合う結び目・絡み目も equivalent とするから、

$$\Sigma(\pi(L)) \text{ の } -1 \text{ sign を持つ edges の数} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

としてよい (Prop. 1.2)。

(4) 平面 \mathbb{R}^2 上の signed graphs の分類も、イソトピーによる分類よりも弱いものぞ十分である。実際、序で述べたように、自然に球面 \mathbb{S}^2 上の signed graphs にして、次のような同

値関係で分類する:

signed graphs $\Sigma, \Sigma' \subset \mathbb{S}^2$ が同値, $\Sigma \sim \Sigma'$ を示す.

$\Leftrightarrow \exists$ 同相写像 $\varphi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ ($\varphi(\Sigma)$ と Σ' が \mathbb{S}^2 上で, signed graphs として Ω -equivalent).

一方, graphs の方には, 次のような背景がある:

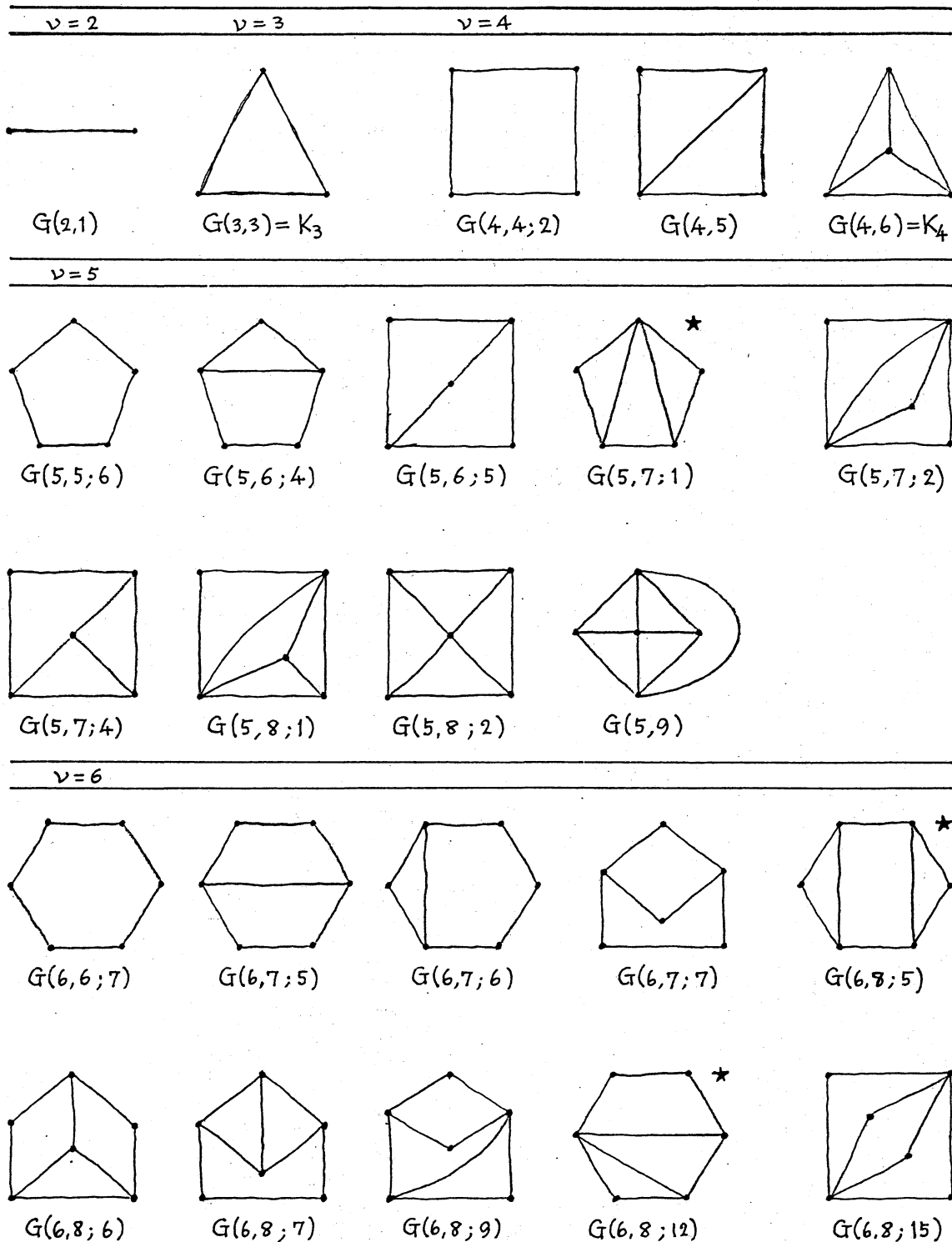
(5) simple graphs の同型類の分類表がある。例えば order ≤ 6 までの図が Harary [H] の巻末にある。またこれらの order が小さい simple graphs については, 自己同型群がわかっている。

参考までに simple graphs の同型類の個数を収録する:

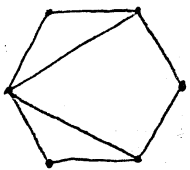
$p \backslash q$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	1	1	1	1	1	1	1
2			1	2	2	2	2	2	2
3			1	3	4	5	5	5	5
4				2	6	9	10	11	11
5				1	6	15	21	24	25
6				1	6	21	41	56	63
7					4	24	65	115	148
8					2	24	97	221	345
9					1	21	131	402	771
10					1	15	148	663	1637
11						9	148	980	3252
12						5	131	1312	5995
13						2	97	1557	10120
14						1	65	1646	15615
15						1	41	1557	21933
16							21	1312	27987
17							10	980	32403
18							5	663	34040
g_p	1	2	4	11	34	156	1044	12344	308168

Harary [H] による: p は order, q は size を示す。

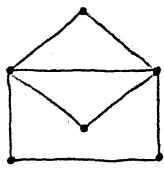
(1), (2) を考慮すれば, 10-crossings までの 結び目・絡み目の enumeration に必要なのは 次の 51 種の graphs である:



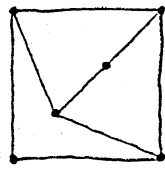
*印は embeddings が (4) の意味で一意的でないことを示す。



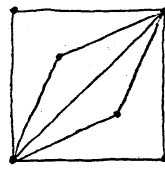
$G(6,8;16)$



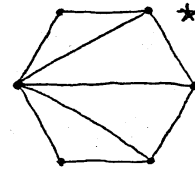
$G(6,8;21)$



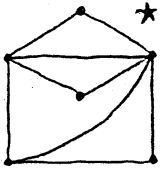
$G(6,8;23)$



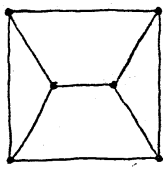
$G(6,9;1)$



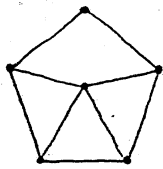
$G(6,9;2)$ *



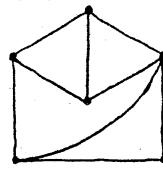
$G(6,9;5)$



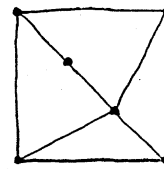
$G(6,9;7)$



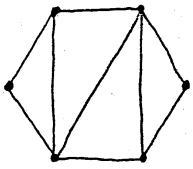
$G(6,9;8)$



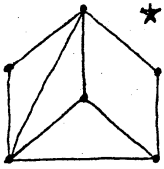
$G(6,9;9)$



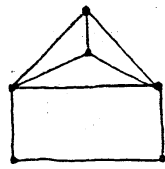
$G(6,9;10)$



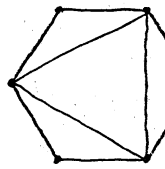
$G(6,9;11)$



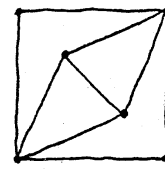
$G(6,9;13)$ *



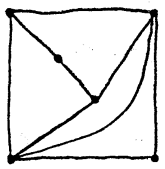
$G(6,9;16)$



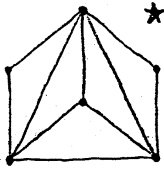
$G(6,9;18)$ *



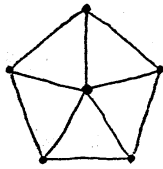
$G(6,9;19)$



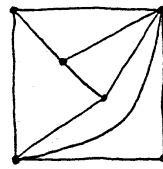
$G(6,9;20)$



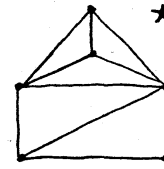
$G(6,10;1)$ *



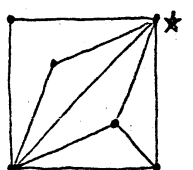
$G(6,10;2)$



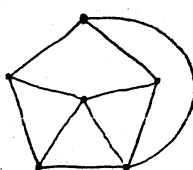
$G(6,10;3)$



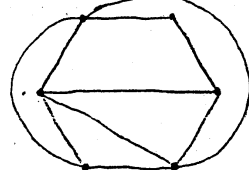
$G(6,10;4)$ *



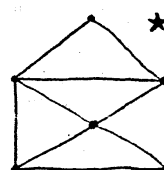
$G(6,10;5)$



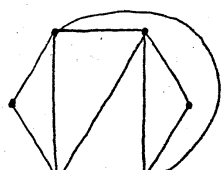
$G(6,10;7)$



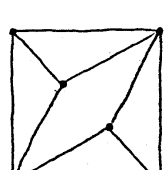
$G(6,10;8)$



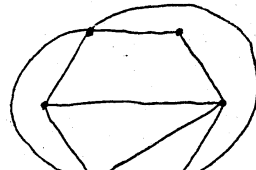
$G(6,10;10)$ *



$G(6,10;11)$



$G(6,10;14)$



$G(6,10;15)$

ただし $G(p,q;n)$ は,
 p は order,
 q は size,
 n は $G_{p,q}[H]$ の
 n 番目のグラフ
 であることを示す。

(6) multigraphs の分類表はないが, (5) より size の小さな multigraphs の分類表を作ることは容易である。特に結び目・絡み目の enumeration のためには, 例えは 10-crossings までならば, (5) で挙げた 51 個の simple graphs のうち最後の 11 個を除く 40 個について, edges を加えて $\text{size} \leq 10$ の multigraphs を作り, それらの同型類を与えればよい。size = 10 の場合を次節で示す。

(7) 次に (6) で得られた loopless multigraphs の同型類を, (4) の意味での同値類に分類する。(5) の図で示したように, \mathbb{S}^2 への embeddings は必ずしも一意的でないが, 10-crossings までの結び目・絡み目の enumeration に関しては embeddings に依らないことが確かめられる。(11-crossings になれば, 抽象的な signed graphs としては同型でも embeddings に依って \sim 同値でないものが数組現われる。) 次節では, (6) で与えた size = 10 の multigraphs の同型類について, \sim 同値類を与えよう。

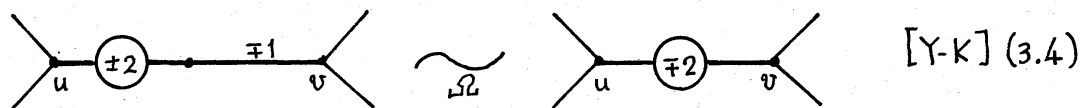
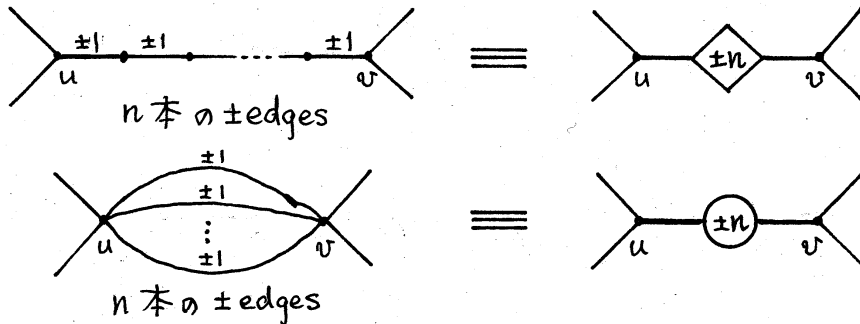
(8) 最後に上の (6), (7) を基にして (3) の範囲で signed graphs の同型類の分類表およびそれらの \sim 同値類による分類表を作る必要がある。これも手間はかかるが, おどろかしくない。実際には, (7) の後, 各 \sim 同値類について, 1 つの代表元を選んで strict の範囲での分類表を作れば十分である。今回の報告ではこの部分は省略する。

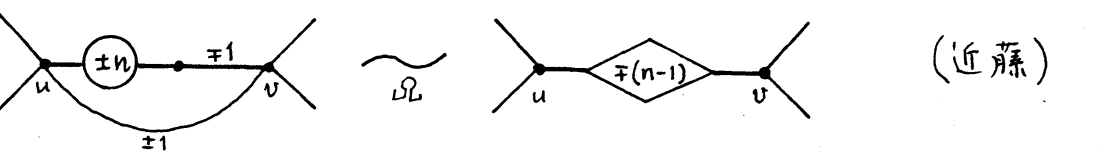
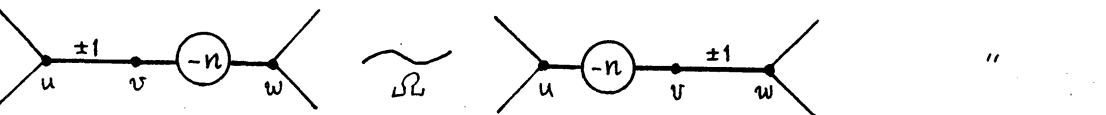
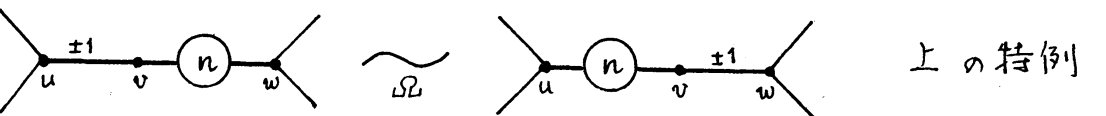
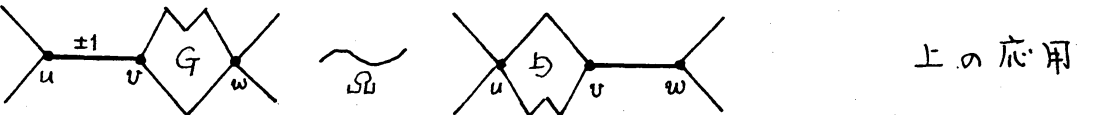
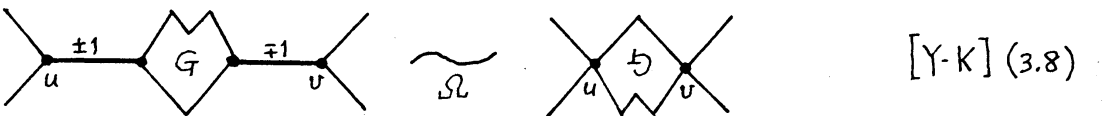
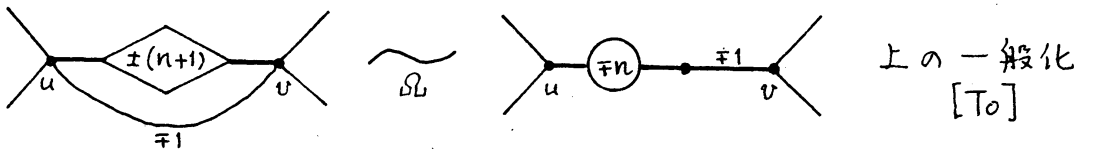
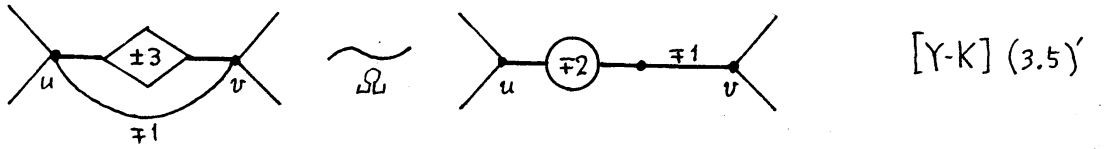
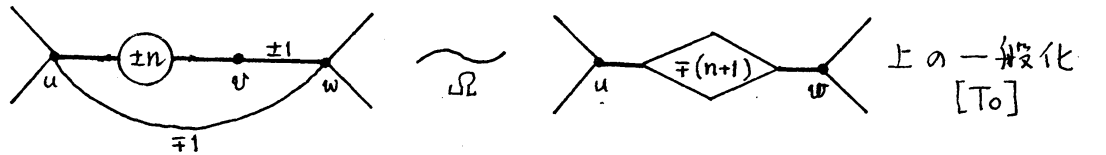
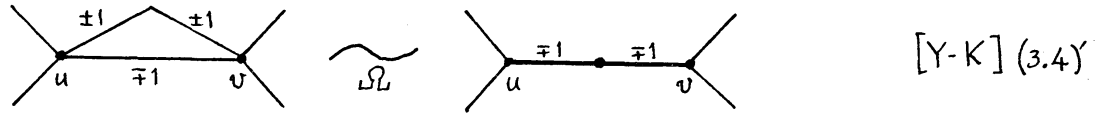
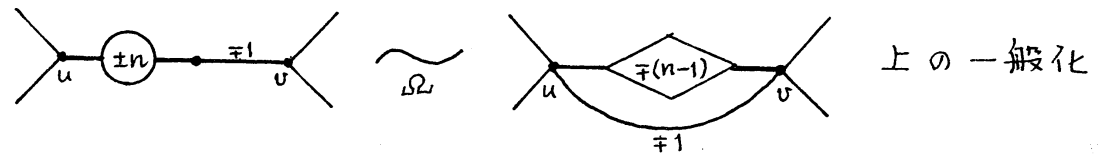
尚, signed graphs の同型類の個数を求める多項式も得られ
 ており [H-P-R-S], 表もあるので参考までに示しておく。

p : order	s_p	s_p^*
1	1	1
2	3	1
3	10	2
4	66	6
5	792	20
6	25 506	86
7	2 302 938	662
8	591 901 884	8 120
9	420 784 762 014	171 526
10	819 833 163 057 369	5 909 259
11	4 382 639 993 148 435 207	348 089 533
12	64 588 133 532 185 722 290 294	33 883 250 874

Signed graphs and self-dual signed graphs.

(9) 次節の enumeration の際: 有効な signed graphs の Ω -equi-
 valent な変形を列挙する (§1. 問題(4)参照)。証明は省略する
 が, いずれもむずかしくない。次の Notation を採用する:





ただし、いずれも signs の複号は同順とする。

(10) signed graph $\Sigma \subset \mathbb{S}^2$ が与えられたとき, これに対応する絡み目 L の成分の個数はいくつにならうか。図1に従って L の射影図 $\pi(L)$ を復元して数えればよいわけであるが, Σ の size が大きい場合は面倒である。

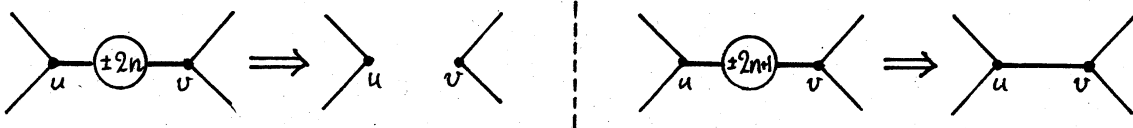
(イ) $\pi(L)$ の交叉の上下を適当に交換して, 成分の個数を変えずに平凡型の絡み目 (の射影図) にすることができる。

ことがわかっていから

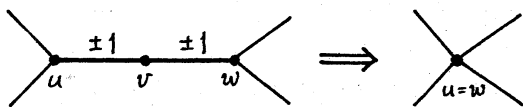
(ロ) Σ の edges の sign を適当に度えて $\Omega_{1\alpha}, \Omega_{1\beta}, \Omega_{2\alpha}, \Omega_{2\beta}, \Omega_3$ を適当に施すことにより, edges を持たない vertices だけの graph に変えることができる; この vertices の個数が Σ の成分の個数である。

しかし実際には (ロ) の作業をするのは面倒だから, $\Omega_{1\alpha}, \Omega_{1\beta}, \Omega_{2\alpha}, \Omega_{2\beta}$ に (イ) に相当する次の2つの変形を加えて, Σ の size を小さくしてから, 図1に従って射影図を描くのが実用的である:

N_1 : multiedges を mod 2 で考える;



N_2 : degree 2 の vertex の両側の edges を contract する;



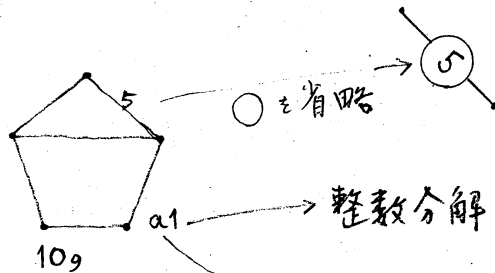
この結果, Σ は簡単に 3-connected な simple graph となる。これに $\Omega_3^{\pm 1}$ をうまく施せばさらに size が小さくなることがあるが, 実際には射影図を描いてみる方が早い。

§4. Size = 10, Order ≤ 6 の Multigraphs の分類.

この節では, 前節 (6), (7) での約束を実行する。ここで考える範囲では, embeddings の仕方によらないので, 一部は対称性を重視して embedding の状態を壊した図を描いた。必要ならば前節 (5) にならって embedding にするとよい。

図は次の規則で描いてある:

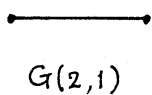
simple graph
 $G(5, 6; 4)$
 を base とする
 size 10 の
 multigraph



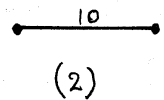
整数分解 a の中での順番
 a, b, c, \dots 等は整数 10 の整数分解の順序 (次頁の表)

10-crossing prime knot の 9 番目 (Rolfsen [Ro]) に対応する Σ を示す。
 この位置に (2) のように記入してある場合は, 対応する絡み目が 2 components であることを示す。

$$\nu = 2$$



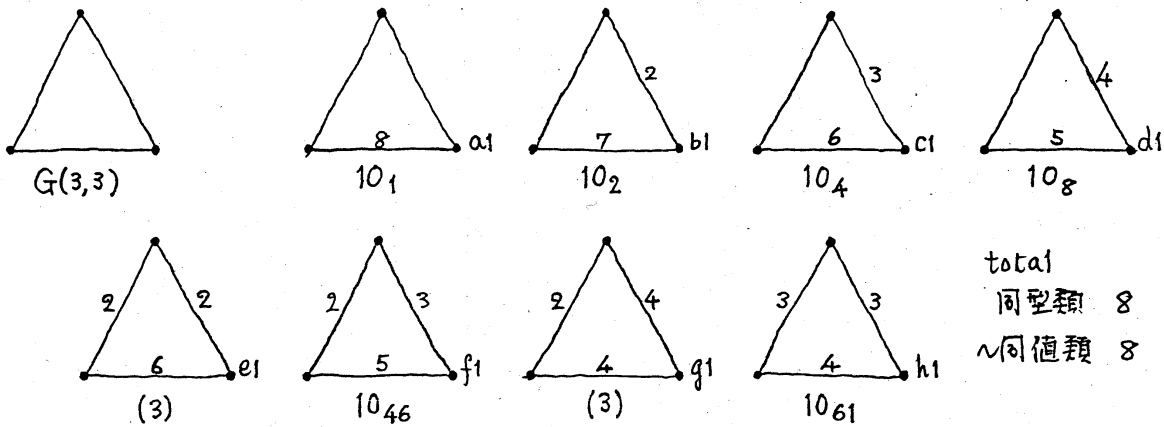
これは base とする size 10 の multigraph は 1つ



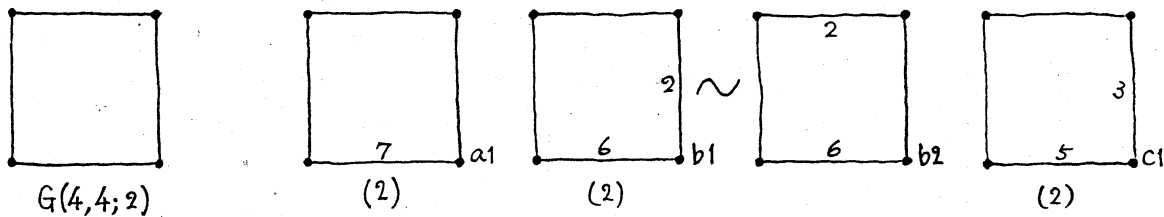
10 の整数分解の表 (base となる simple graph の size ε に対応)

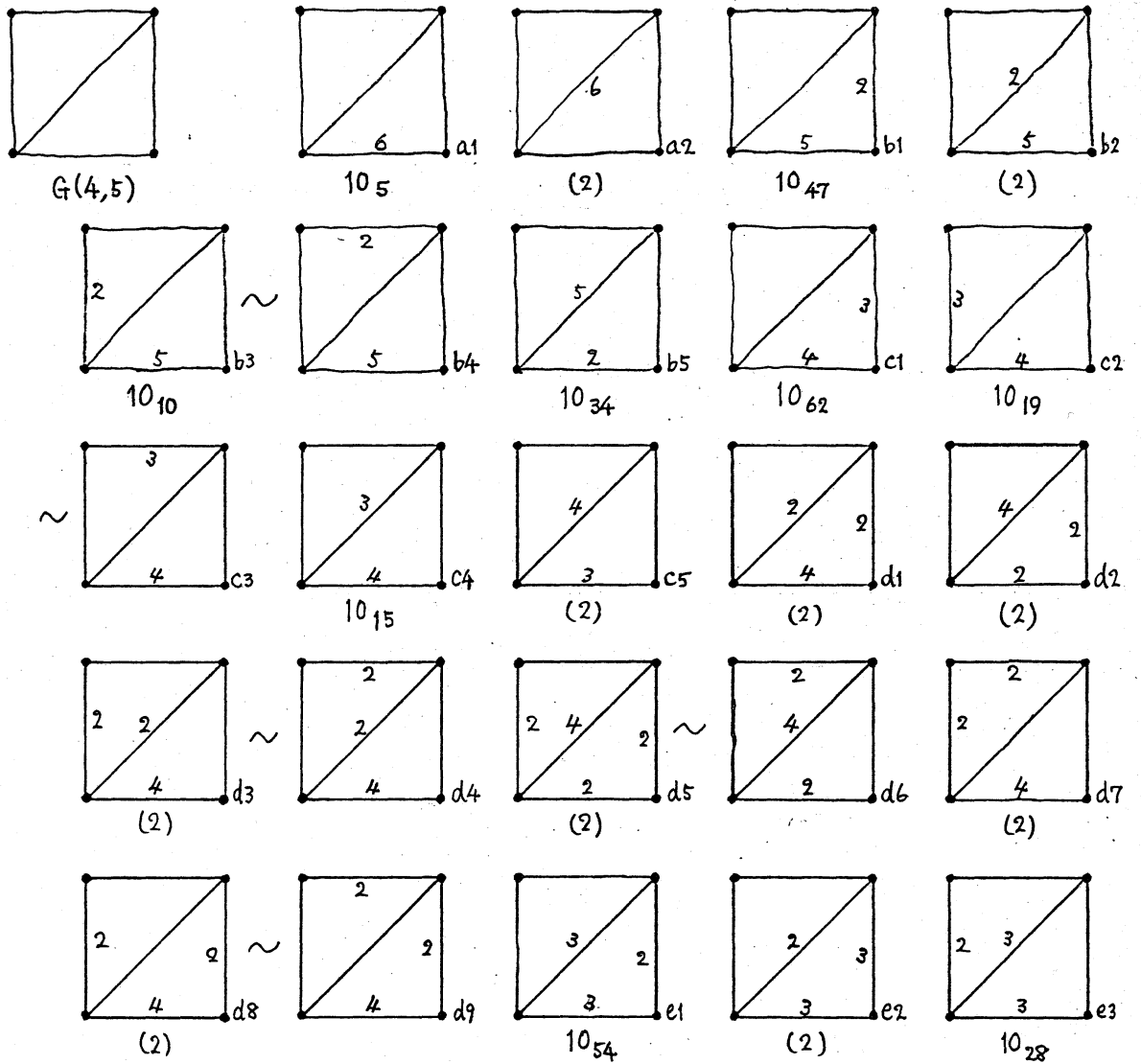
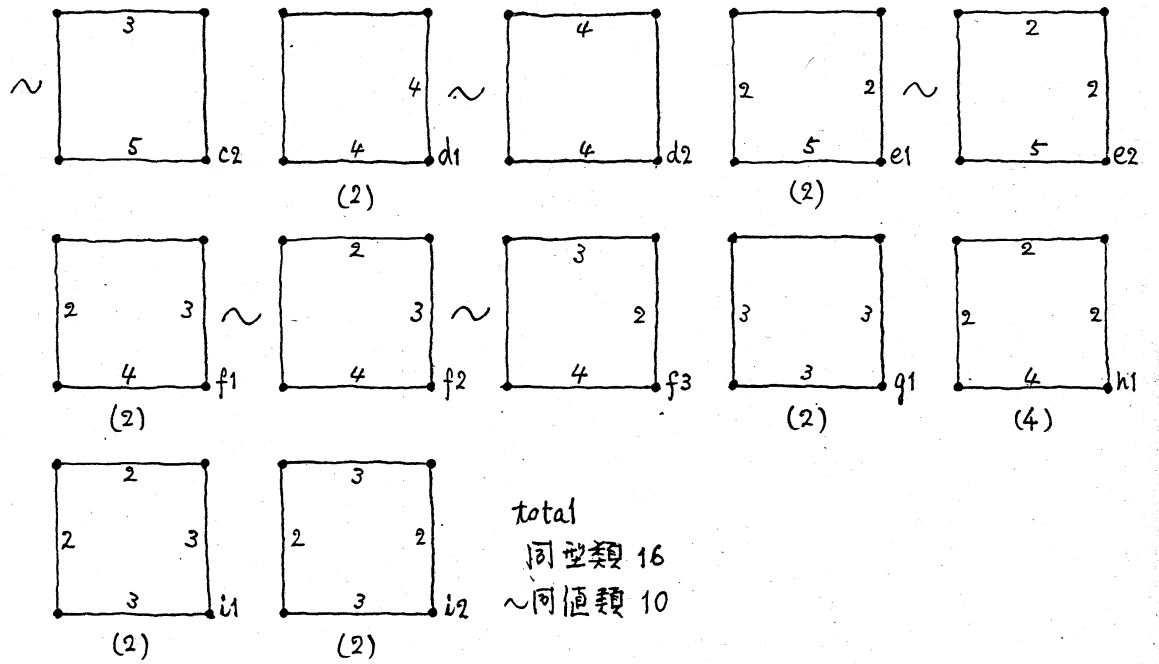
<p>$\varepsilon = 3$</p> <p>a: 1 1 8 b: 1 2 7 c: 1 3 6 d: 1 4 5 e: 2 2 6 f: 2 3 5 g: 2 4 4 h: 3 3 4</p>	<p>$\varepsilon = 4$</p> <p>a: 1 1 1 7 b: 1 1 2 6 c: 1 1 3 5 d: 1 1 4 4 e: 1 2 2 5 f: 1 2 3 4 g: 1 3 3 3 h: 2 2 2 4 i: 2 2 3 3</p>	<p>$\varepsilon = 5$</p> <p>a: 1 1 1 1 6 b: 1 1 1 2 5 c: 1 1 1 3 4 d: 1 1 2 2 4 e: 1 1 2 3 3 f: 1 2 2 3 g: 2 2 2 2 2</p>	<p>$\varepsilon = 6$</p> <p>a: 1 1 1 1 1 5 b: 1 1 1 1 2 4 c: 1 1 1 1 3 3 d: 1 1 1 2 2 3 e: 1 1 2 2 2 2</p>
<p>$\varepsilon = 7$</p> <p>a: 1 1 1 1 1 1 4 b: 1 1 1 1 1 2 3 c: 1 1 1 1 2 2 2</p>	<p>$\varepsilon = 8$</p> <p>a: 1 1 1 1 1 1 1 3 b: 1 1 1 1 1 1 2 2</p>	<p>$\varepsilon = 9$</p> <p>a: 1 1 1 1 1 1 1 1 2</p>	

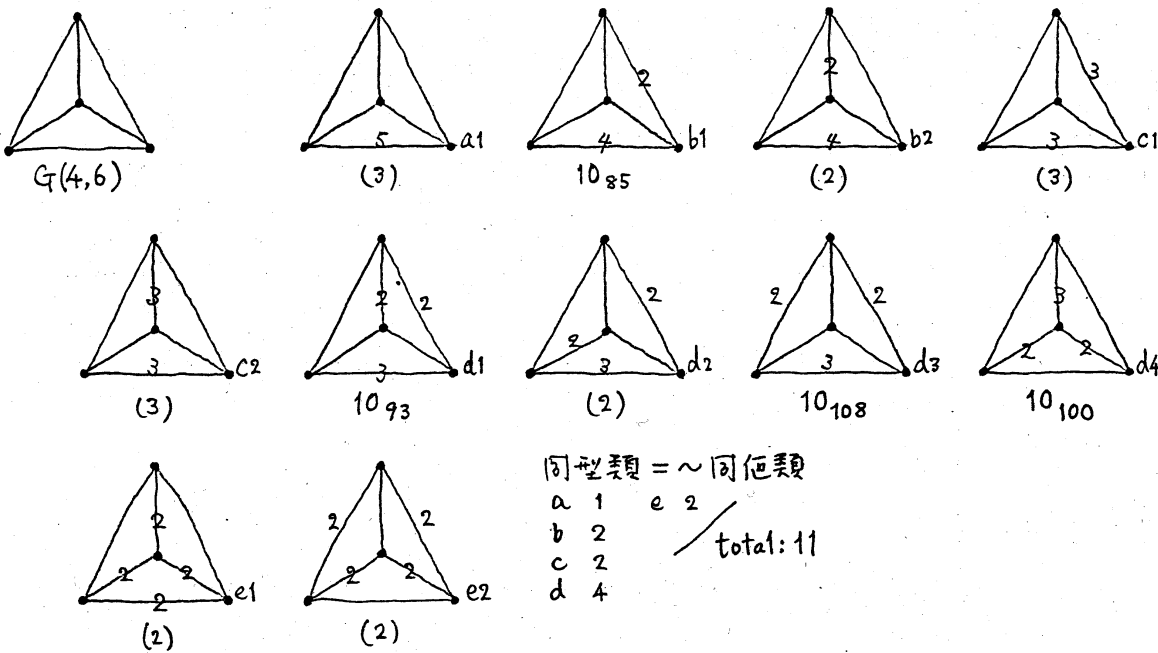
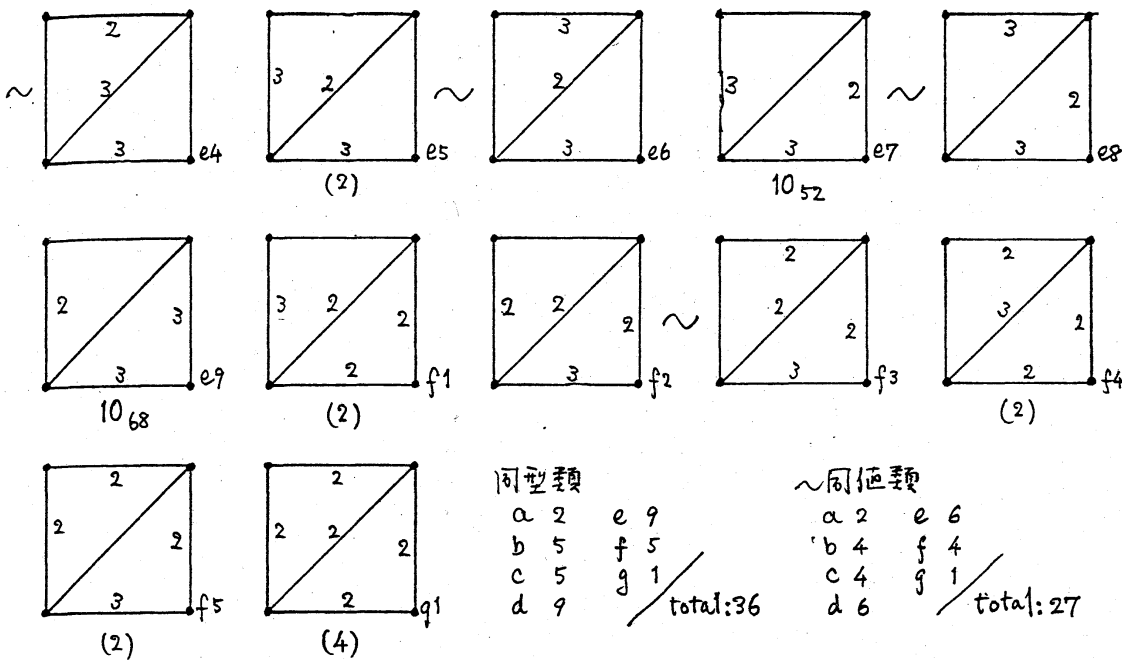
$v = 3$



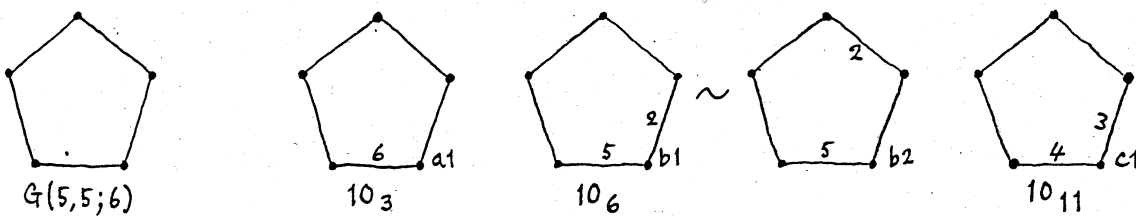
$v = 4$

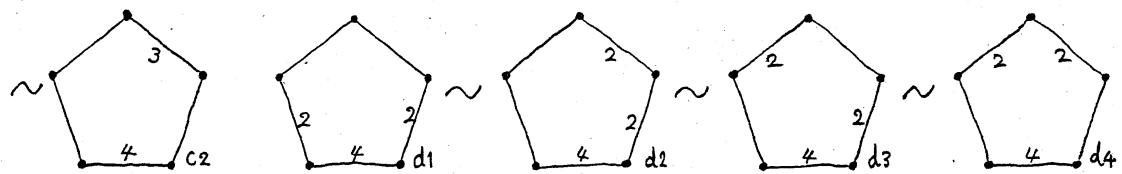




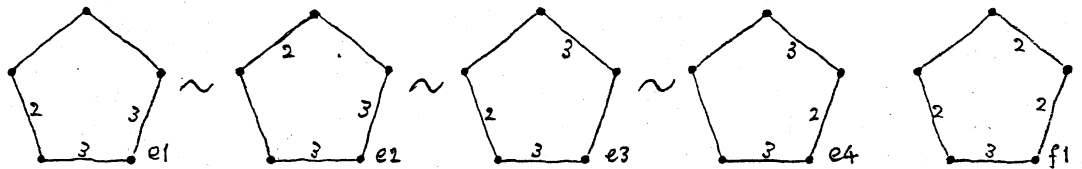


$v = 5$



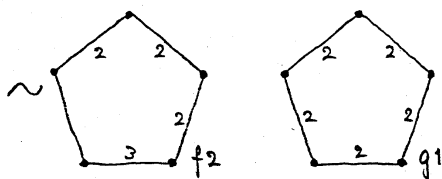


(3)



10₇₆

(2)



(5)

同型類

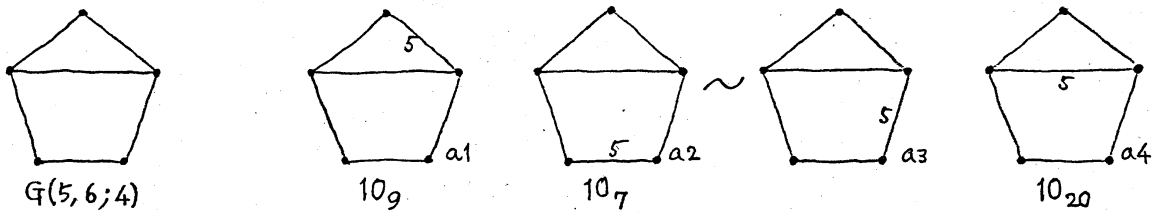
a 1 e 4
b 2 f 2
c 2 g 1
d 4

total: 16

同位類

a 1 e 1
b 1 f 1
c 1 g 1
d 1

total: 7

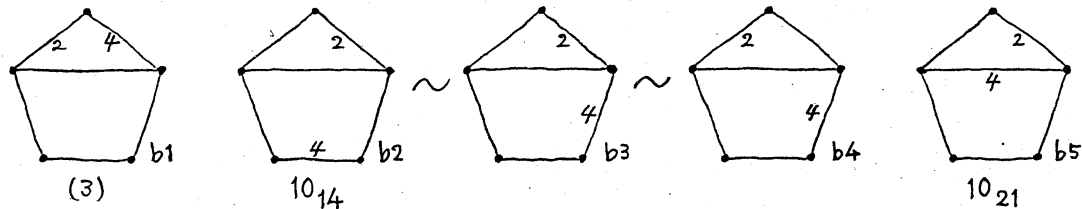


G(5, 6; 4)

10₉

10₇

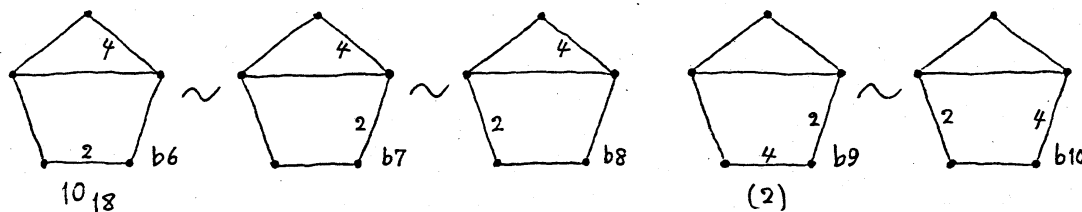
10₂₀



(3)

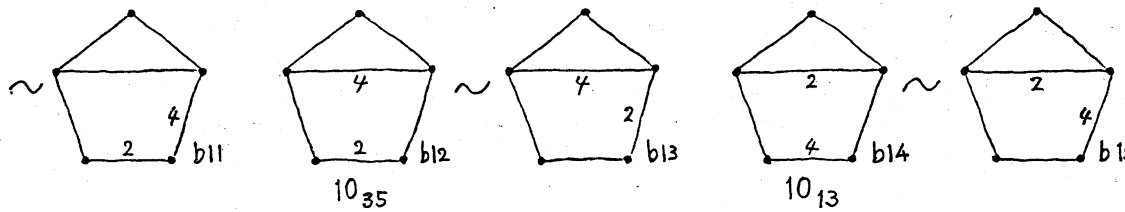
10₁₄

10₂₁



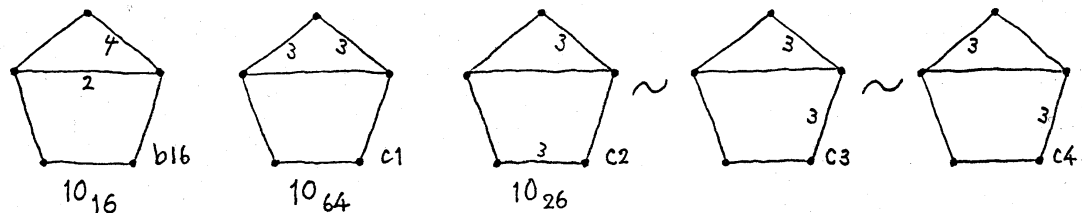
10₁₈

(2)



10₃₅

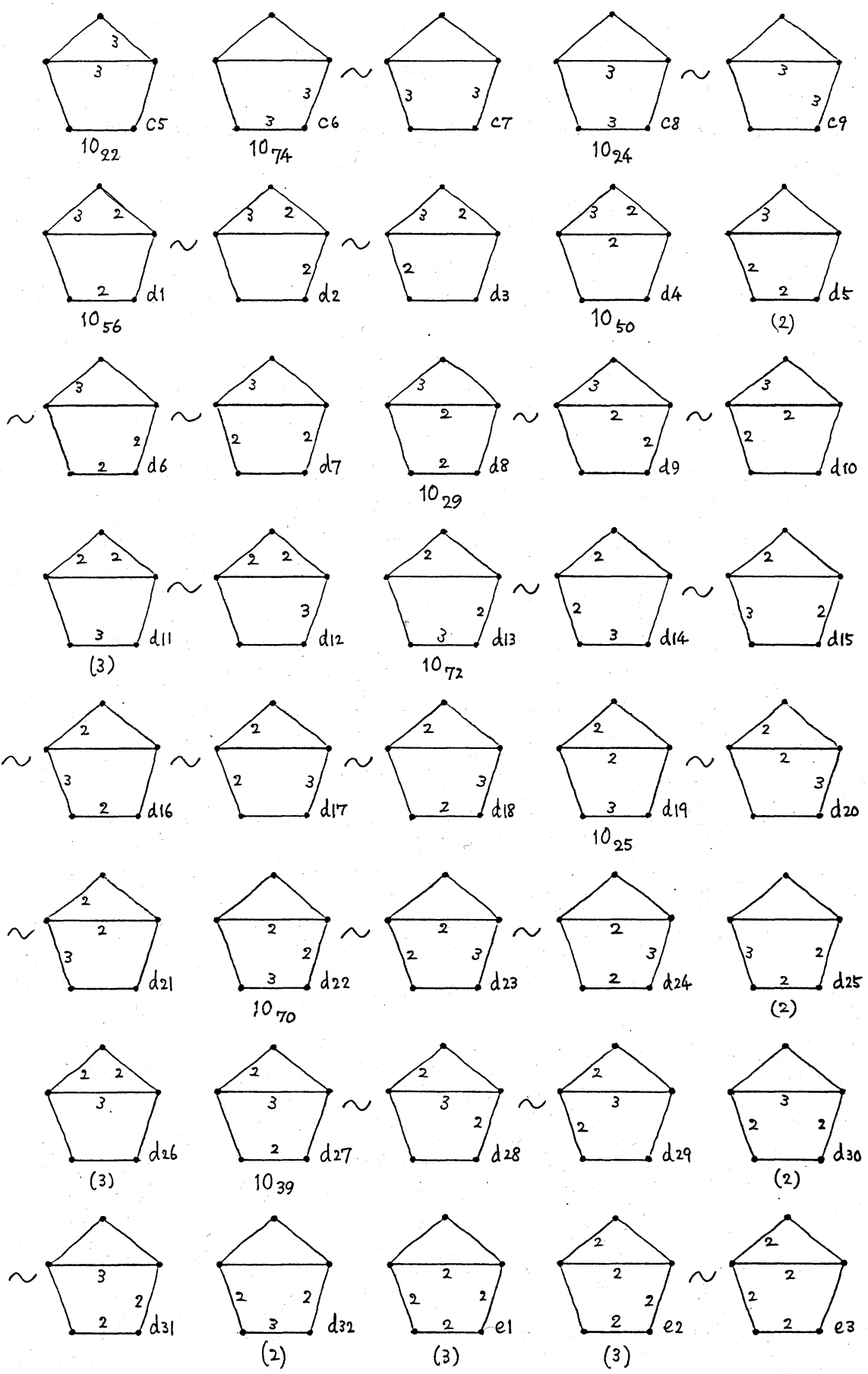
10₁₃

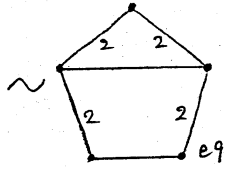
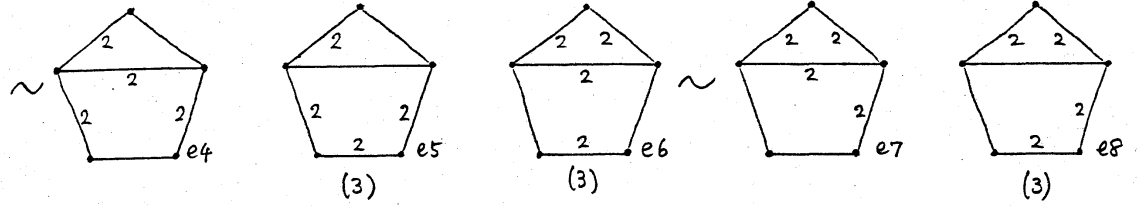


10₁₆

10₆₄

10₂₆



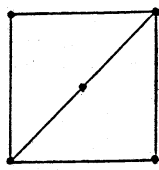


同型類

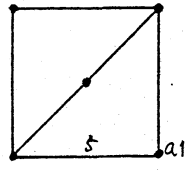
a 4 e 9
b 16
c 9
d 32
total: 70

~同位類

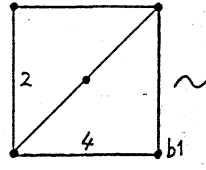
a 3 e 5
b 8
c 5
d 13
total: 34



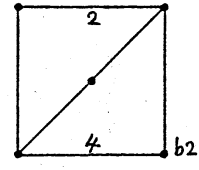
G(5,6;5)



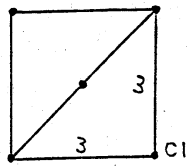
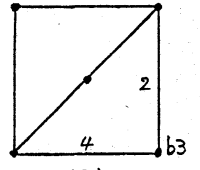
(3)



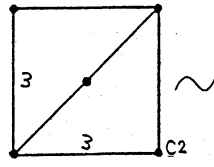
1049



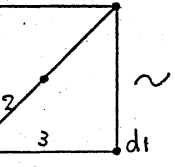
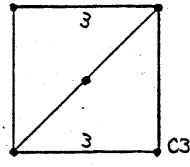
(3)



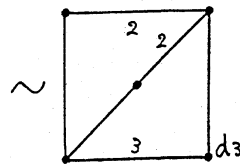
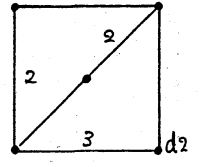
(3)



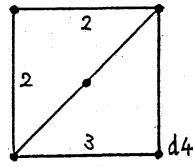
(3)



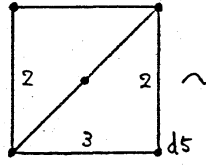
1066



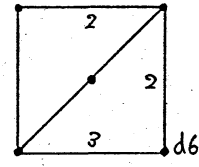
(3)



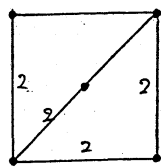
(3)



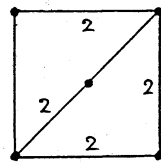
1090



(3)



(3)

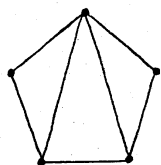


同型類

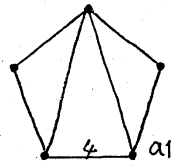
a 1 e 3
b 3
c 3
d 6
total: 16

~同位類

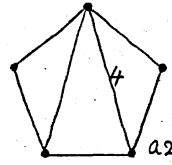
a 1 e 2
b 2
c 2
d 3
total: 10



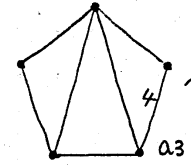
G(5,7;1)



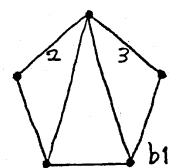
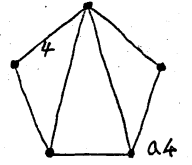
1063



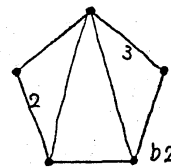
1036



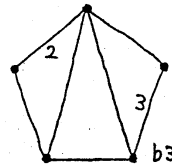
(2)



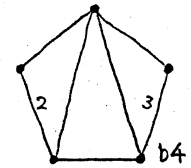
(2)



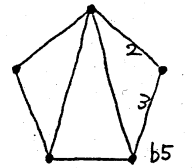
(2)



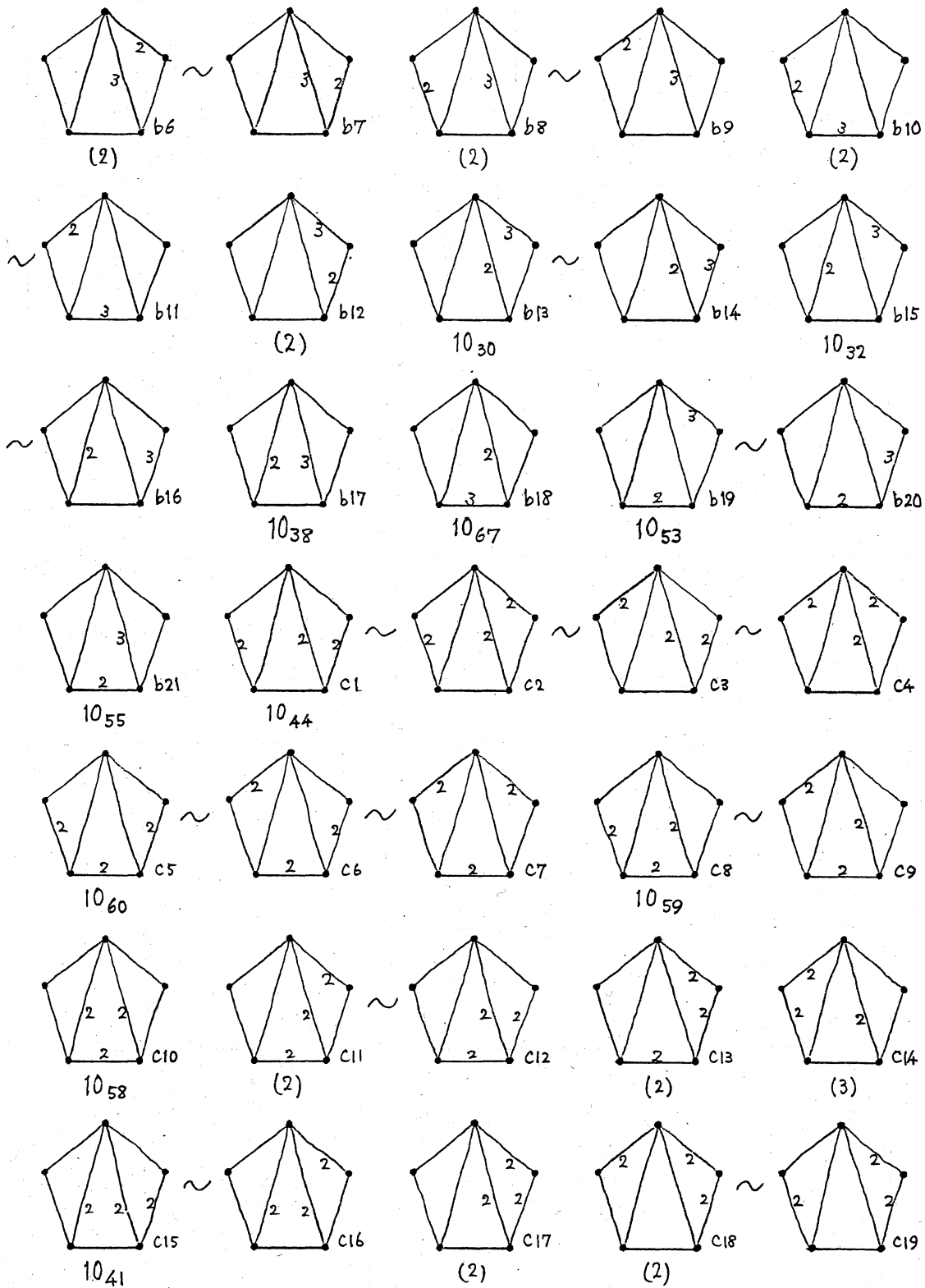
(2)



(2)



(2)

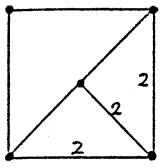


同型類

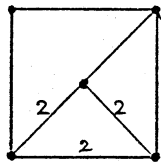
a 4
b 21
c 19 / total: 44

~同値類

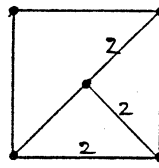
a 3
b 12
c 10 / total: 25



(3)



10_{111}



10_{98}

同型類

a 3

b 12

c 12

total: 27

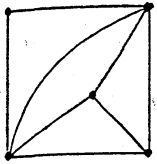
~同値類

a 3

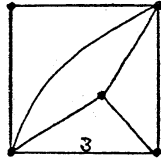
b 10

c 10

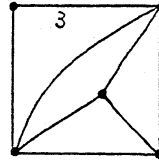
total: 23



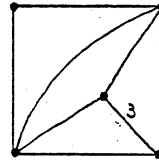
$G(5,8;1)$



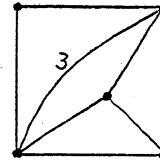
(2)



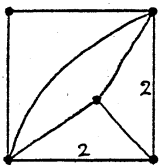
(2)



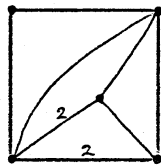
(2)



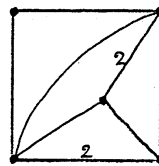
(2)



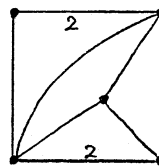
(2)



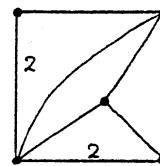
10_{101}



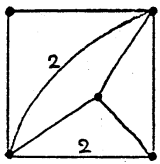
10_{97}



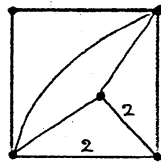
(2)



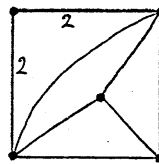
(2)



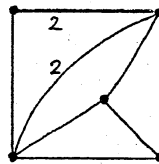
10_{87}



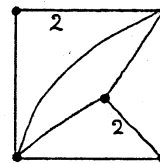
(2)



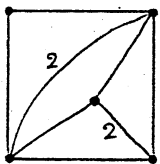
(4)



(2)



(2)



(3)

同型類

a 4

b 11

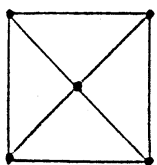
total: 15

~同値類

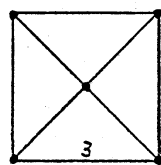
a 4

b 10

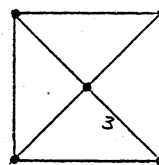
total: 14



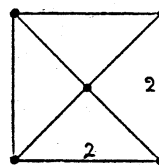
$G(5,8;2)$



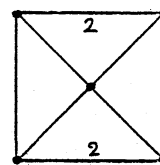
10_{114}



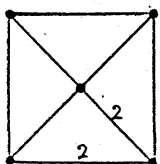
10_{112}



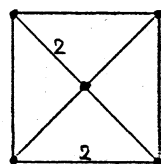
(2)



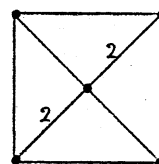
10_{120}



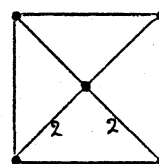
(2)



10_{119}



(3)



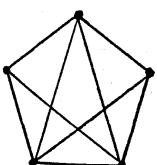
10_{116}

同型類 = ~同値類

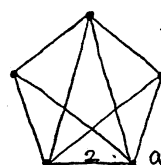
a 2

b 6

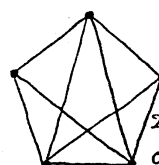
total: 8



$G(5,9)$



10_{122}

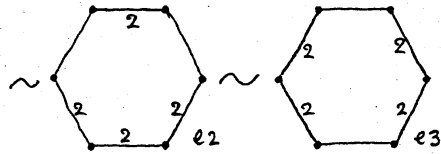
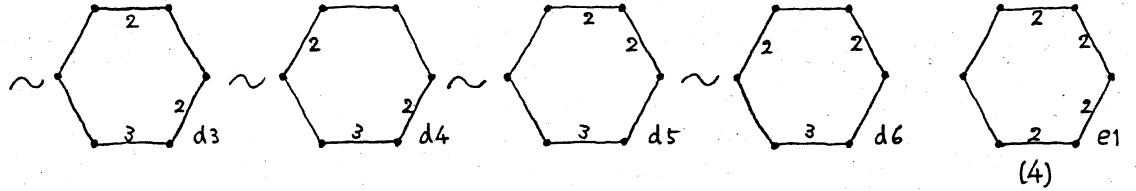
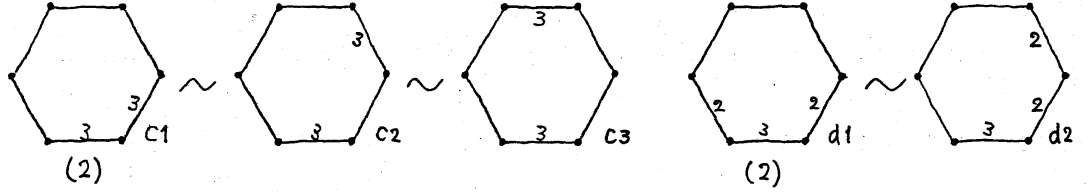
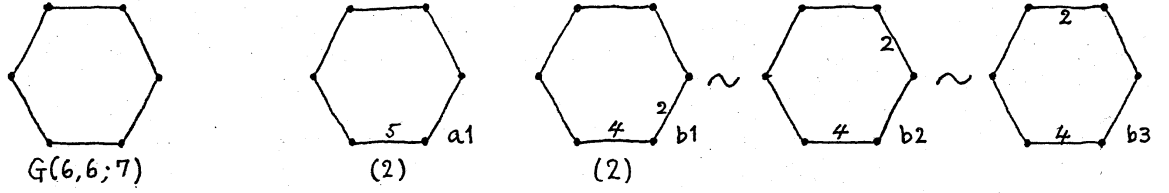


(2)

同型類 = ~同値類

a 2 / total: 2.

$v = 6$



同型類

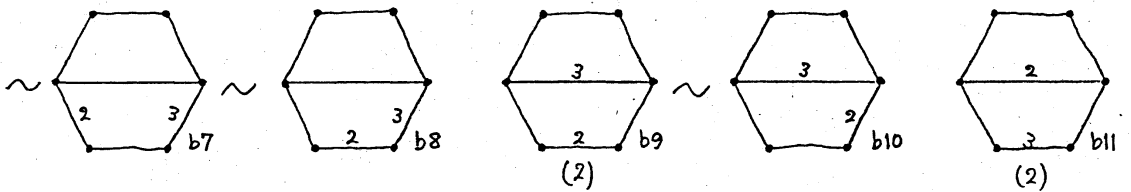
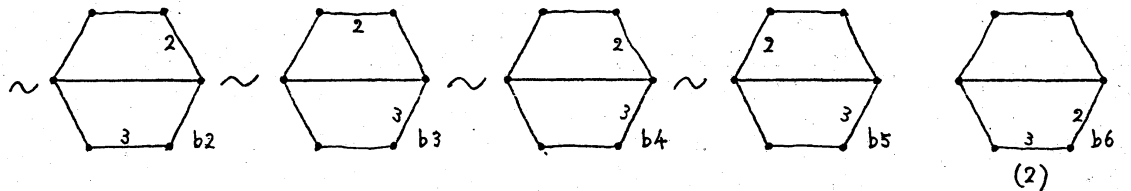
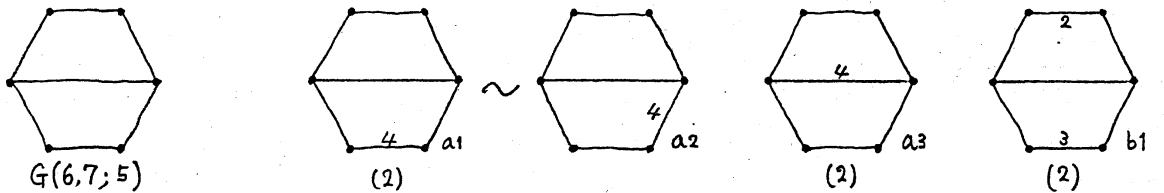
a 1
b 3
c 3
d 6

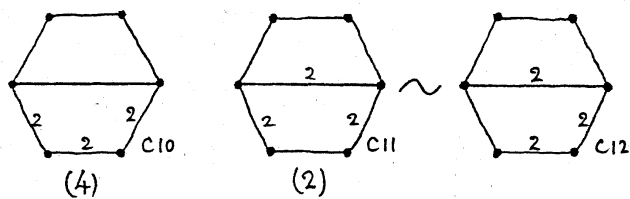
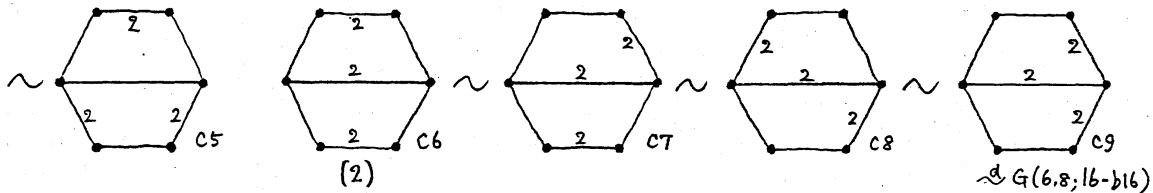
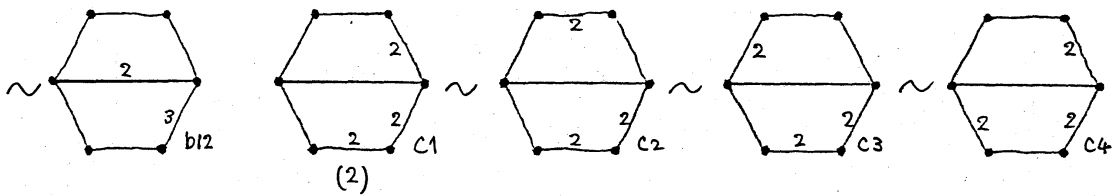
e 3
total: 16

同値類

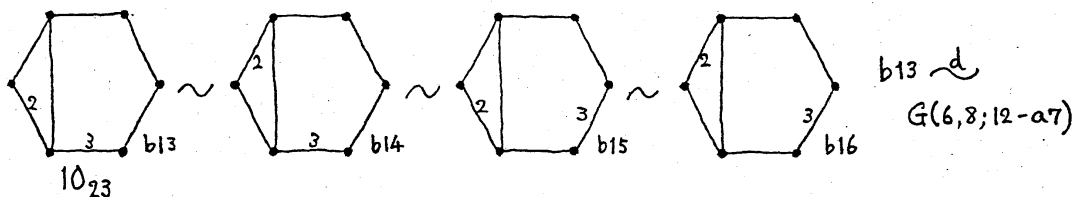
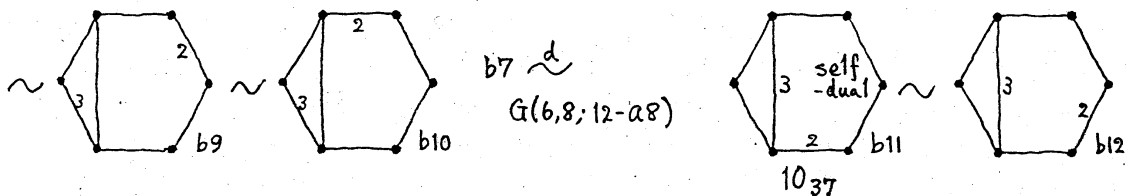
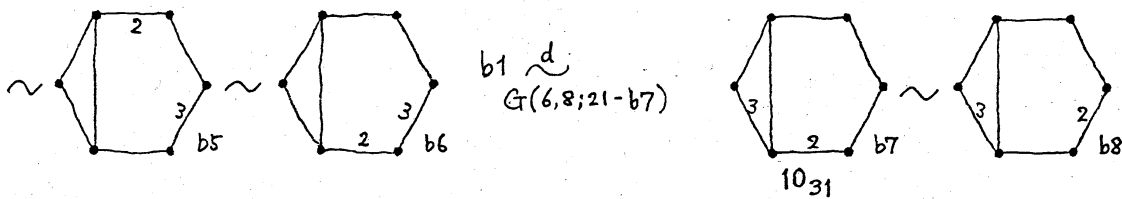
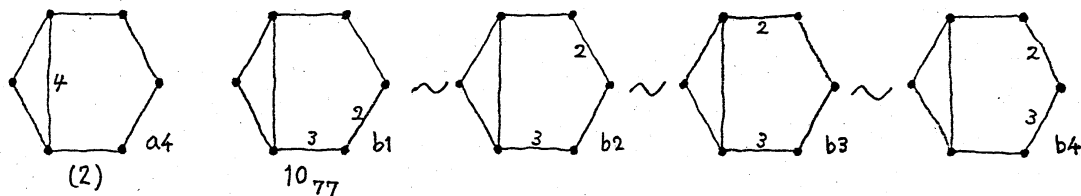
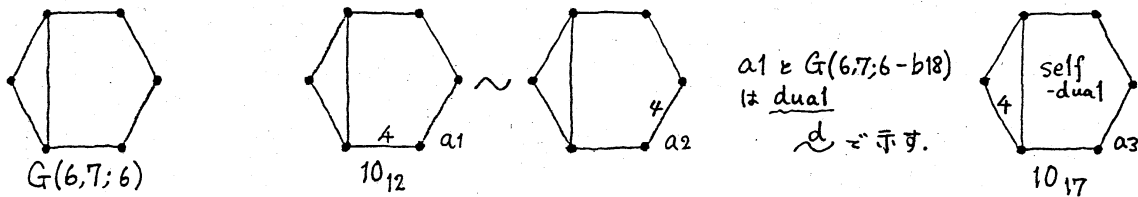
a 1
b 1
c 1
d 1

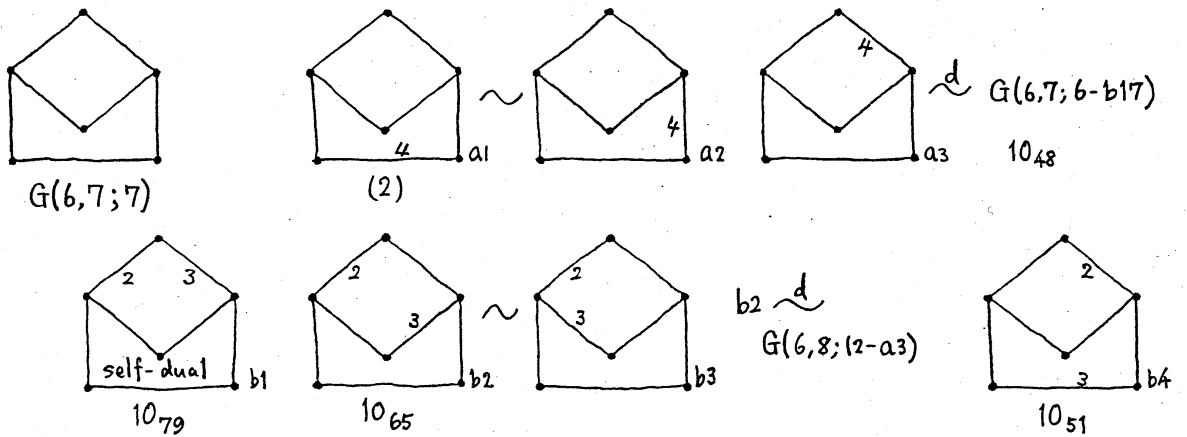
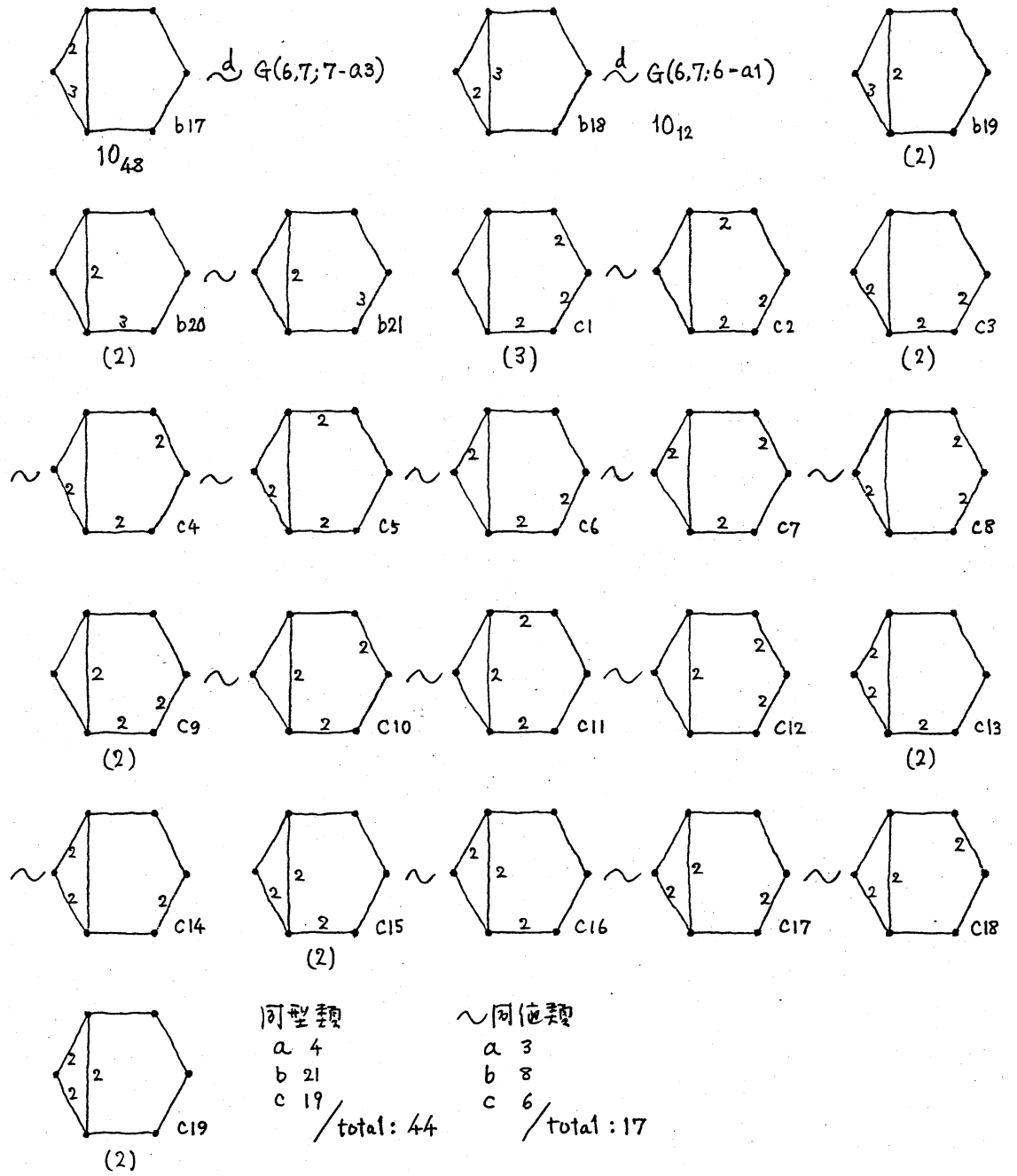
e 1
total: 5

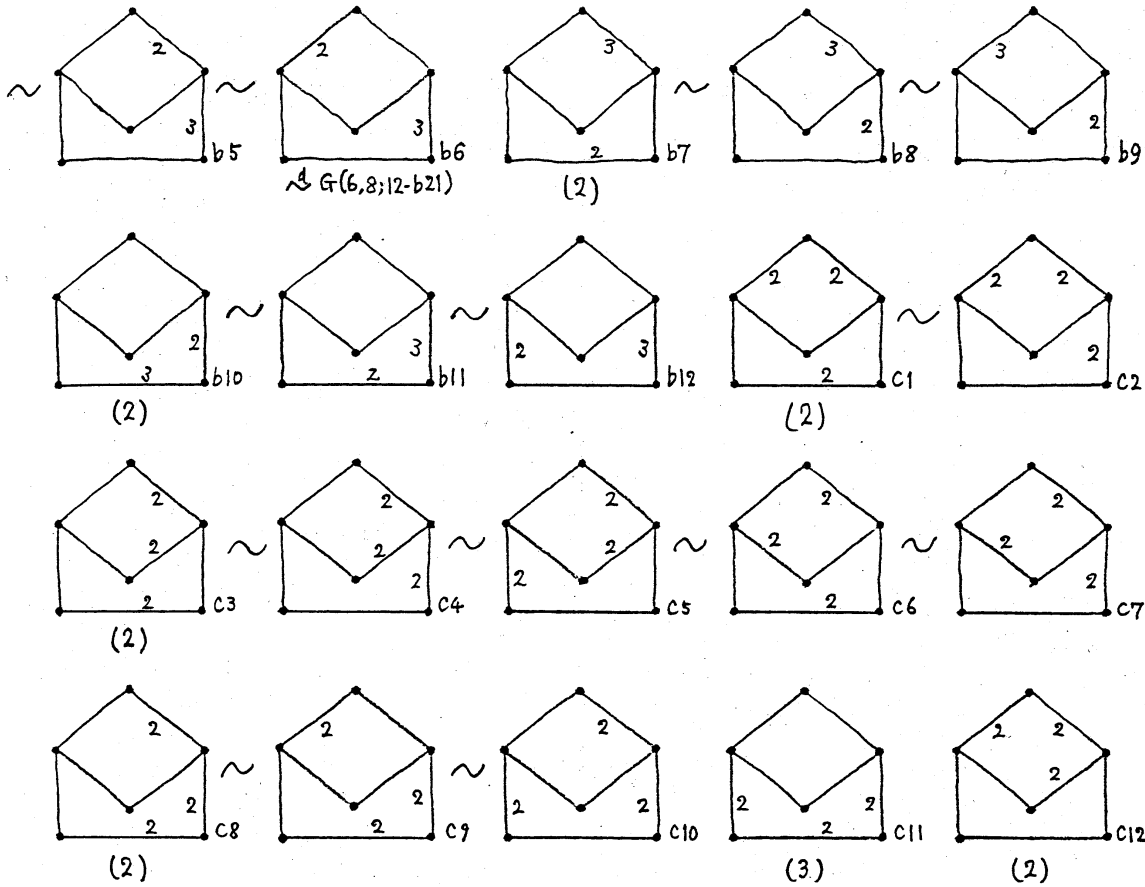




同型類 ~同値類
 a 3 a 2
 b 12 b 4
 c 12 c 4
 Total: 27 Total: 10





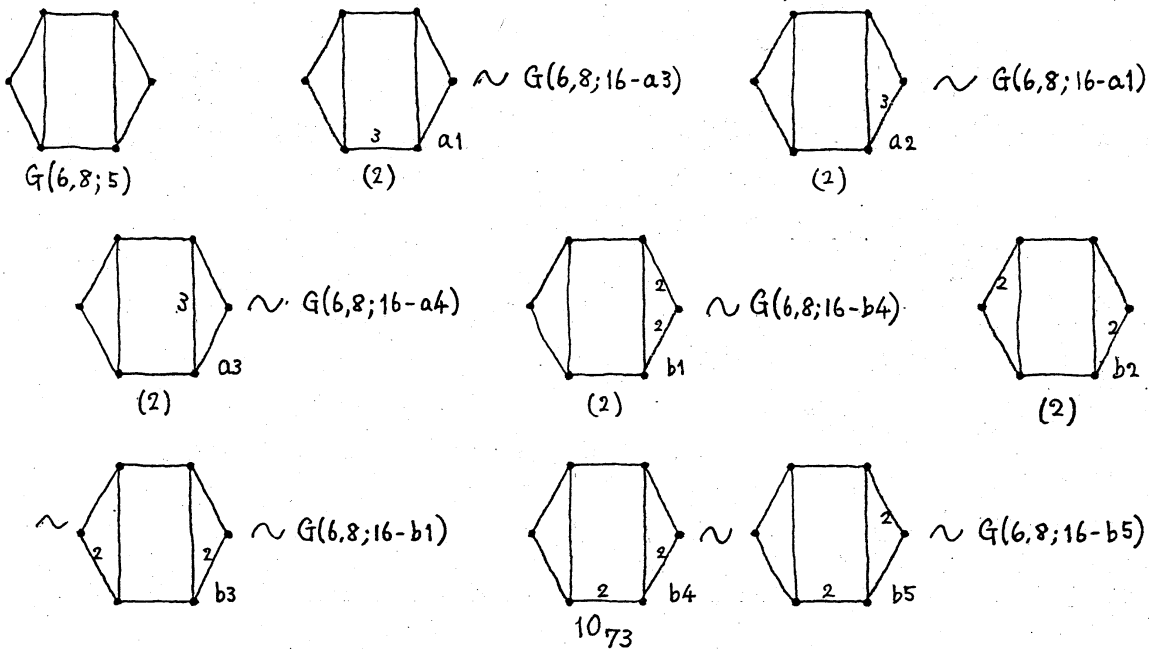


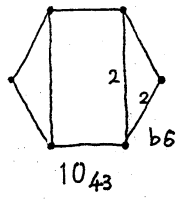
同型類

a 3
 b 12
 c 12
 / total: 27

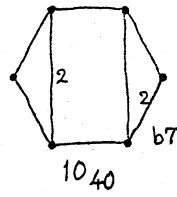
\sim 同位類

a 2
 b 4
 c 5
 / total: 11

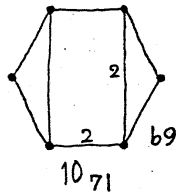
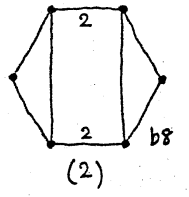




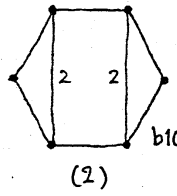
$\sim G(6,8;16-b_9)$



$\sim G(6,8;16-b_{11})$

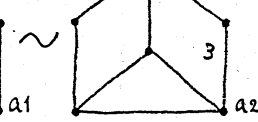
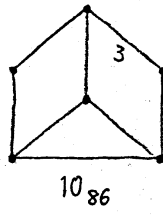
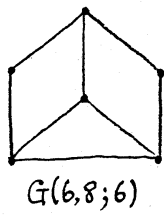


$\sim G(6,8;16-b_{14})$



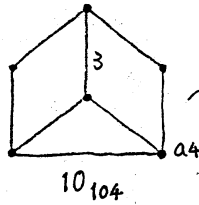
$\sim G(6,8;16-b_{16})$

同型類	\sim
a 3	3
b 10	8
total: / 13	/ 11

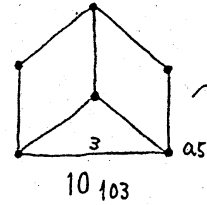


$\sim G(6,9;16-a_3)$

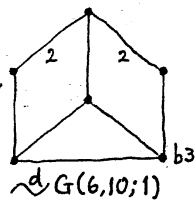
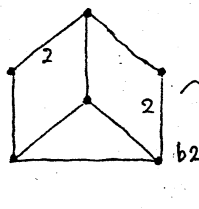
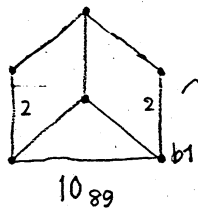
$\sim G(6,8;7-b_7)$



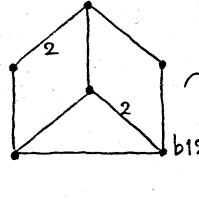
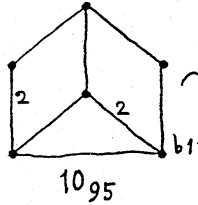
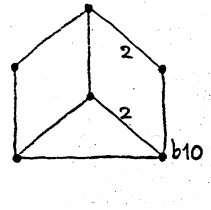
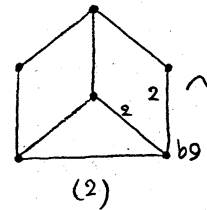
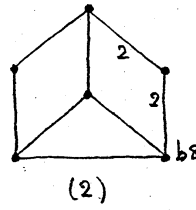
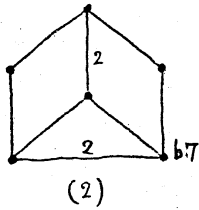
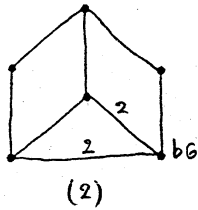
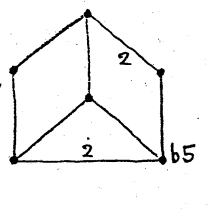
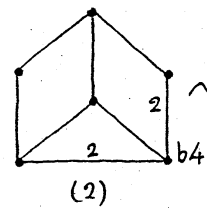
$\sim G(6,8;7-b_1)$



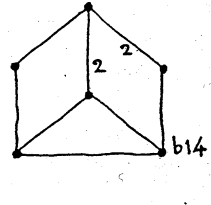
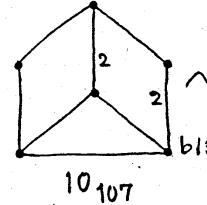
$\sim G(6,8;7-b_2)$



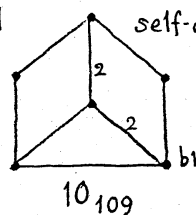
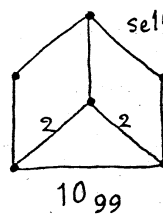
$\sim G(6,10;1)$



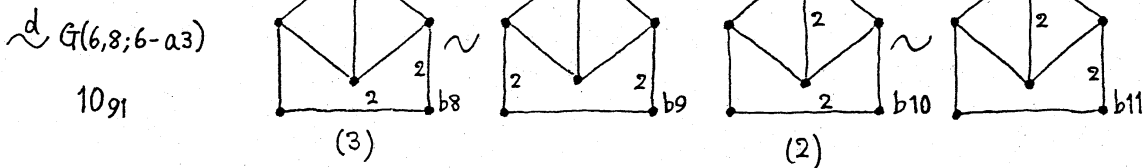
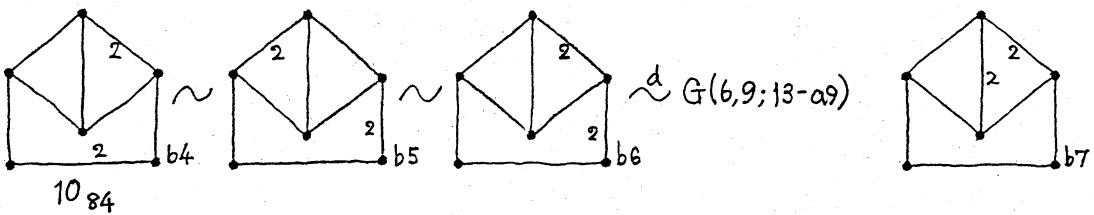
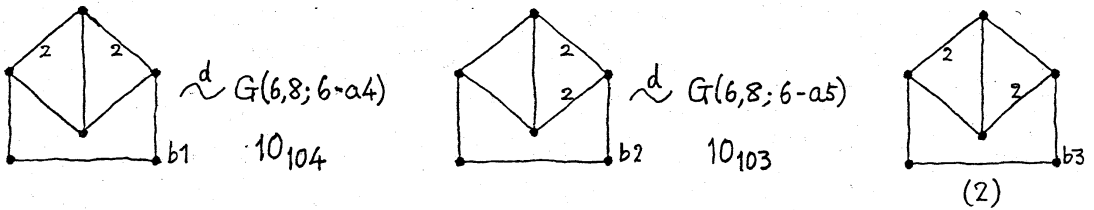
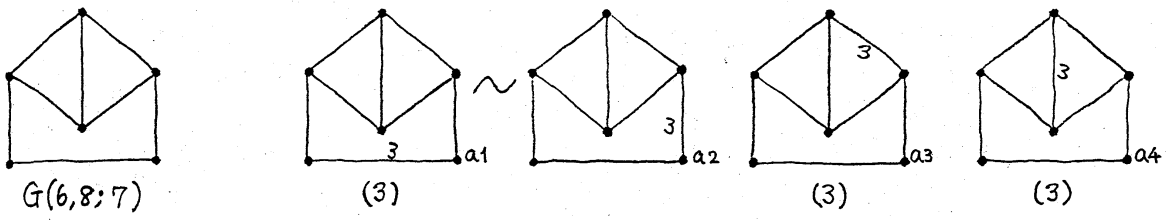
$\sim G(6,9;20-a_1)$



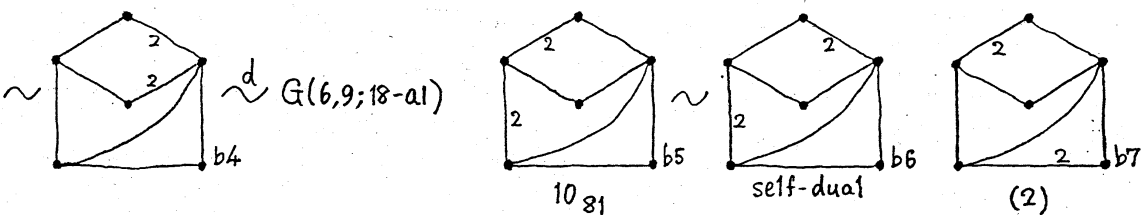
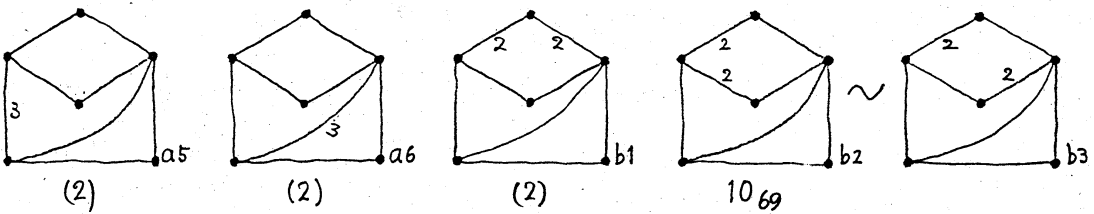
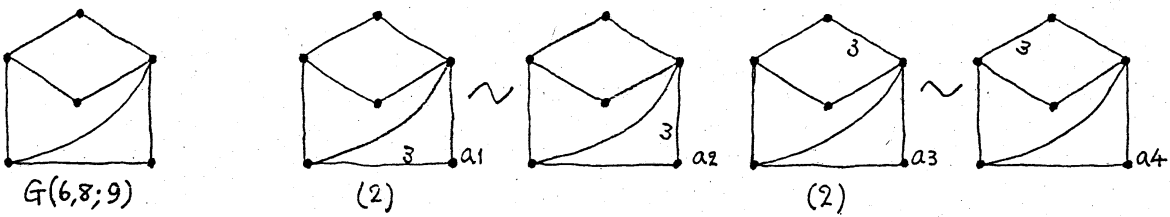
$\sim G(6,9;13-a_5)$

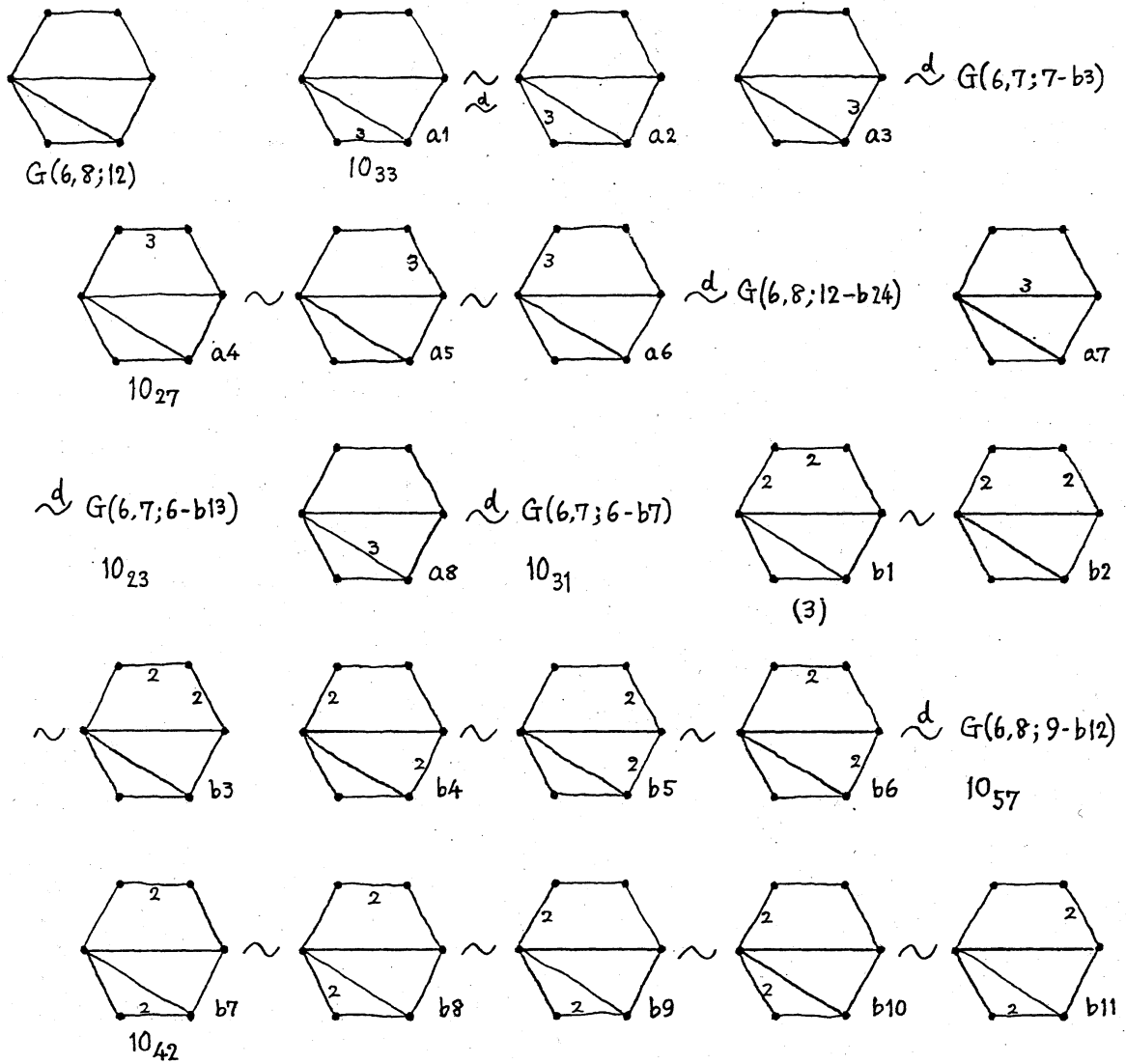
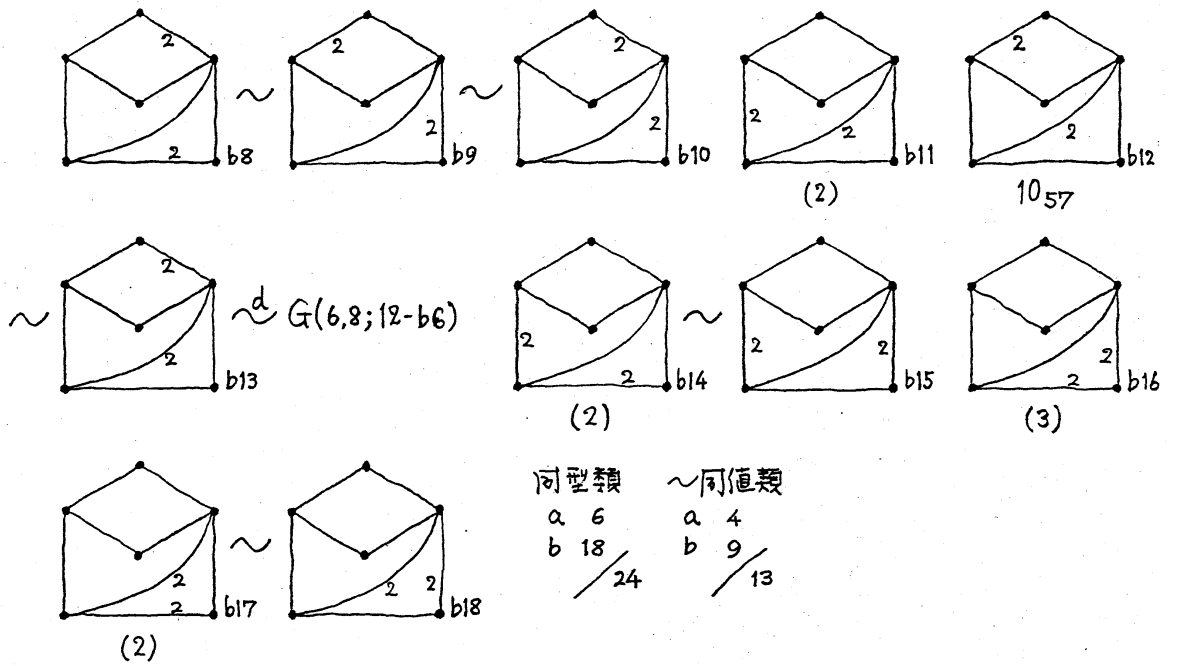


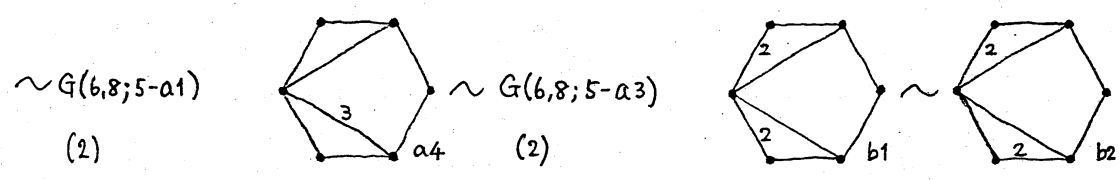
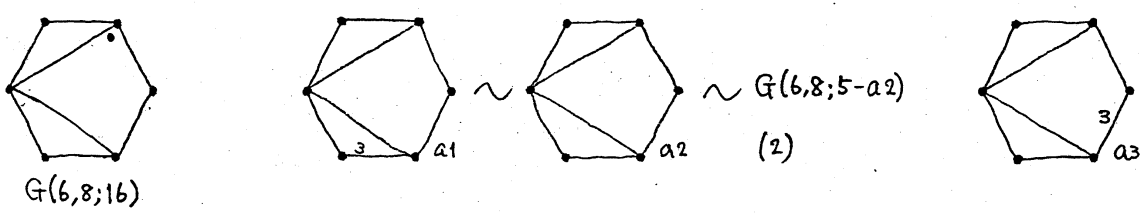
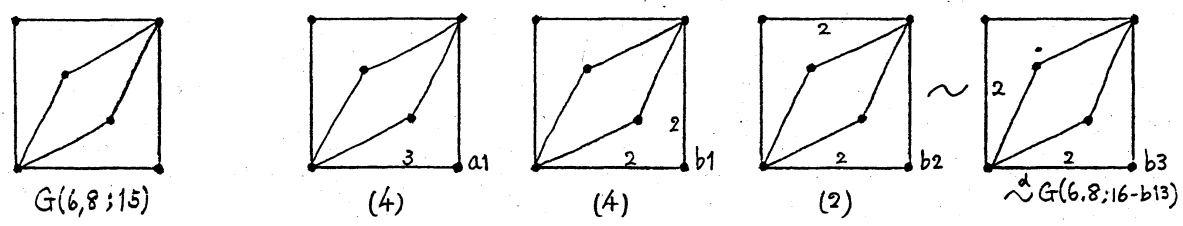
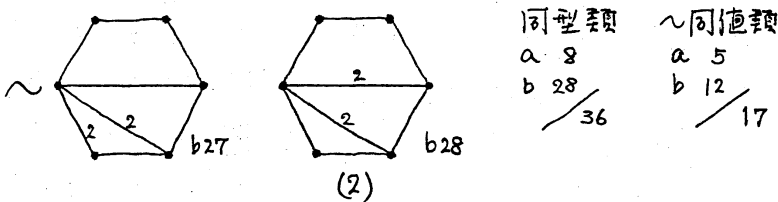
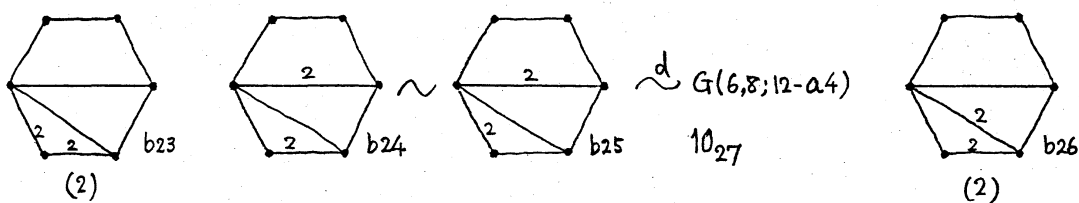
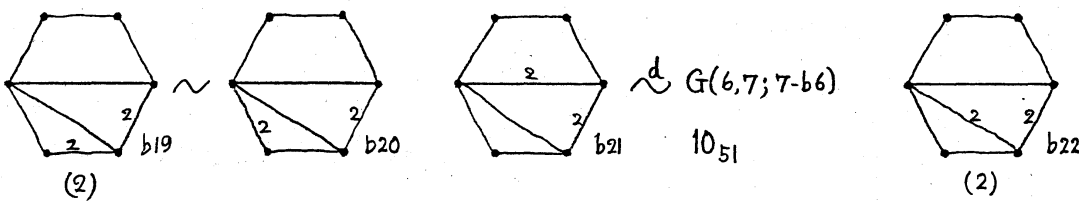
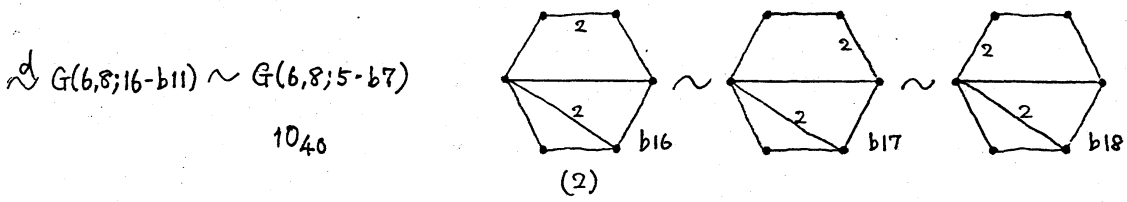
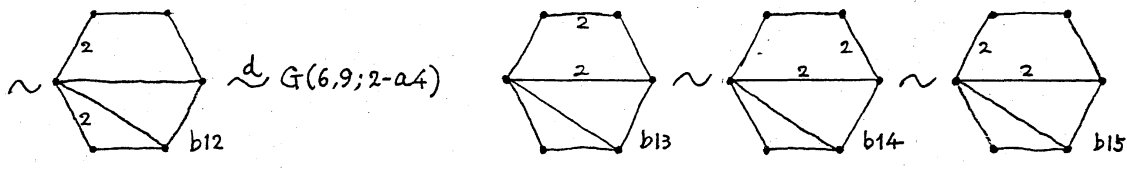
同型類	\sim
a 5	a 4
b 16	b 10
total: / 21	/ 14.

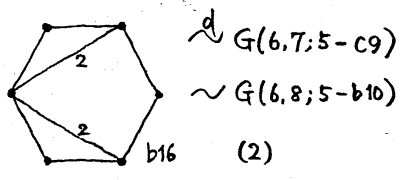
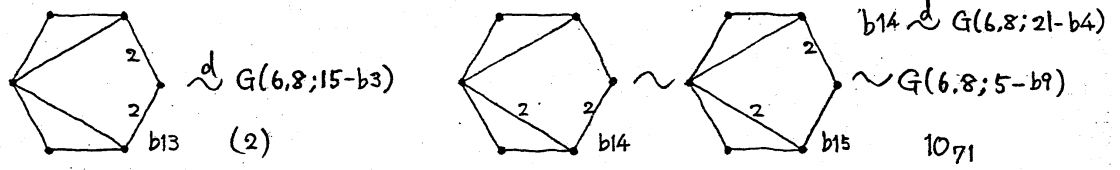
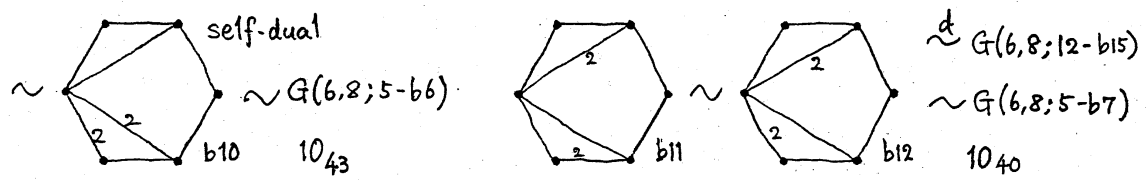
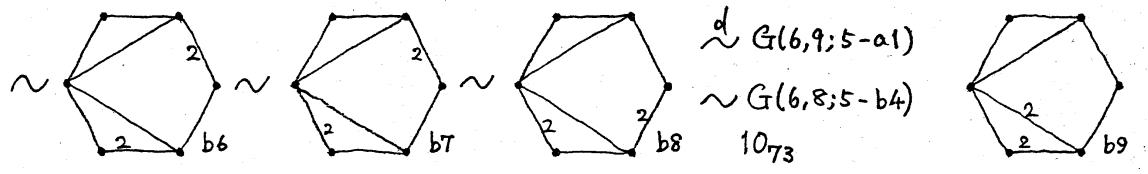
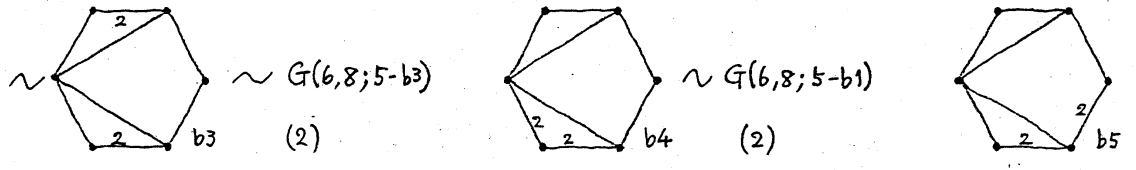


同型類 ~同値類
 a 4 a 3
 b 11 b 7
 / 15 / 10

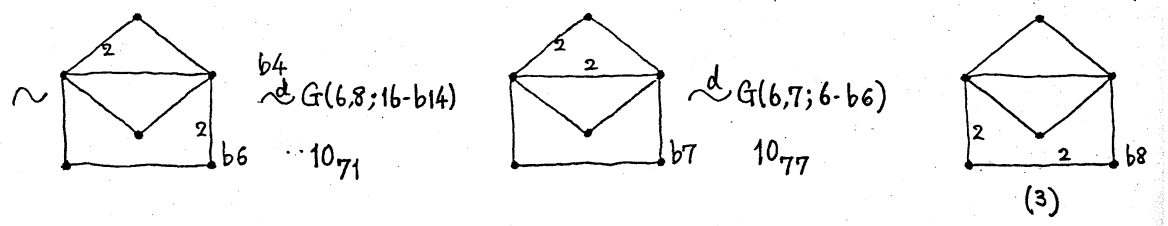
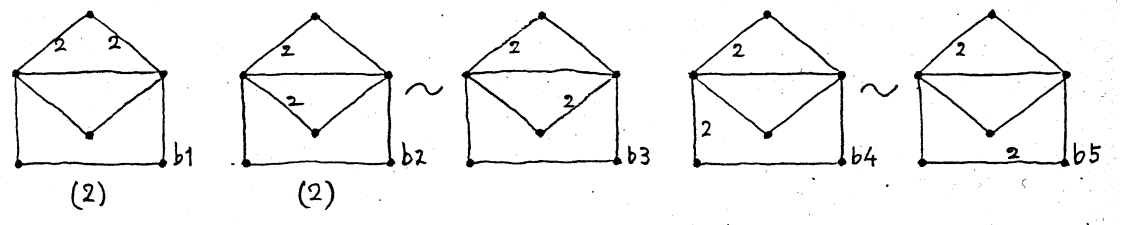
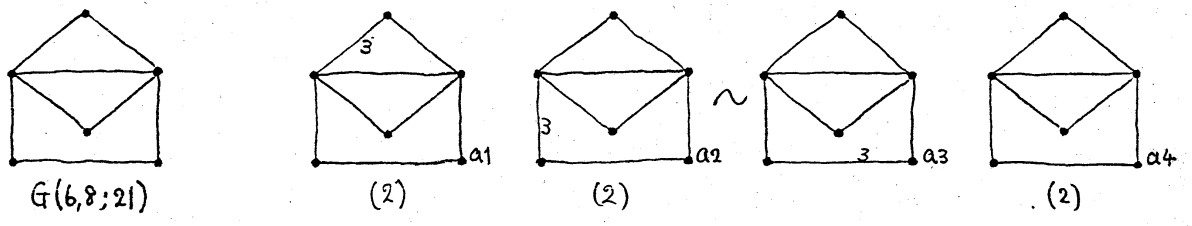


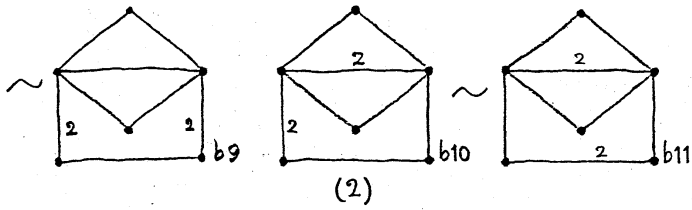




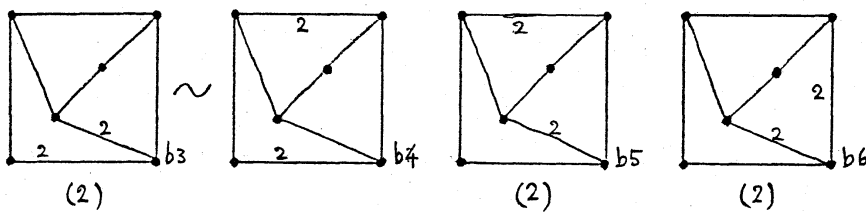
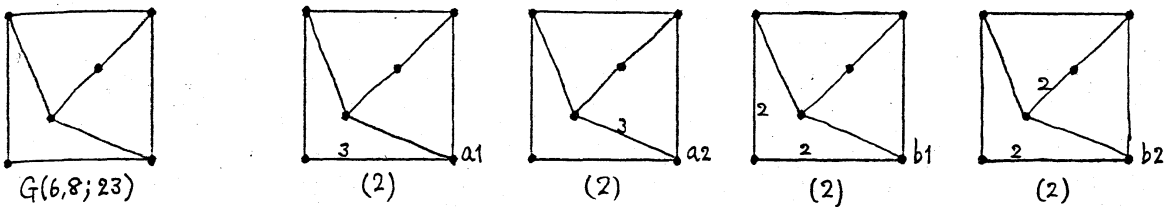


同型類 \sim 同型類
 $\begin{matrix} a & 4 \\ b & 16 \\ \hline & 20 \end{matrix}$ $\begin{matrix} a & 3 \\ b & 8 \\ \hline & 11 \end{matrix}$ (上の関係から, $G(6,8;16)$ は 10-crossings の knots, links の enumeration に 不要)

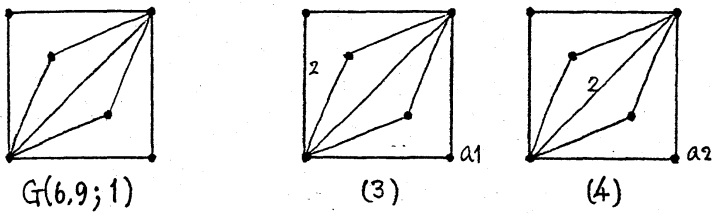




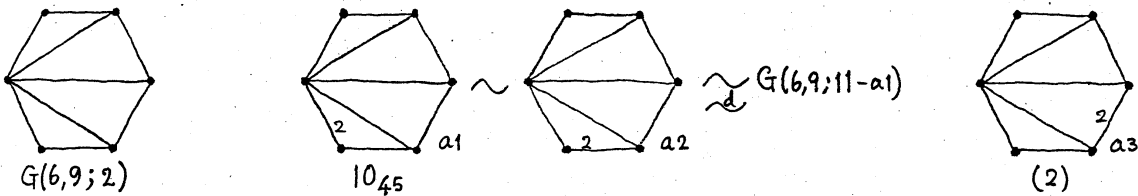
同型類 $\begin{matrix} a & 4 \\ b & 11 \\ \hline & 15 \end{matrix}$ \sim 同値類 $\begin{matrix} a & 3 \\ b & 6 \\ \hline & 9 \end{matrix}$



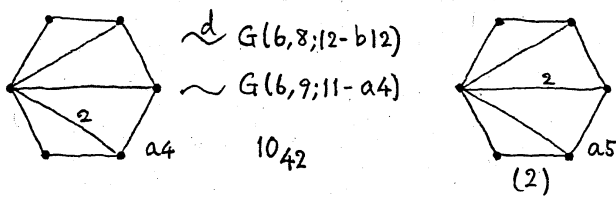
同型類 $\begin{matrix} a & 2 \\ b & 6 \\ \hline & 8 \end{matrix}$ \sim $\begin{matrix} a & 2 \\ b & 5 \\ \hline & 7 \end{matrix}$



同型類 = \sim 同値類 $\begin{matrix} a & 2 \\ \hline & 2 \end{matrix}$

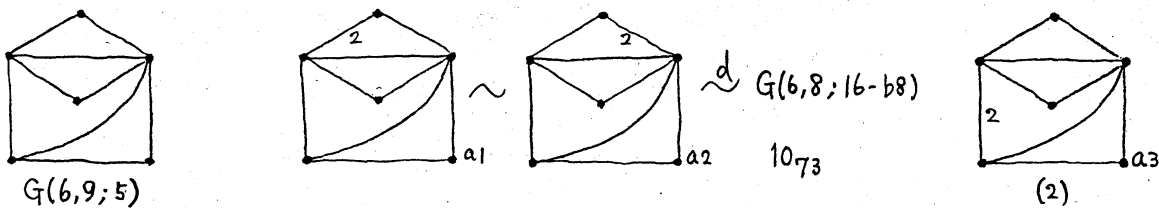


\sim $G(6,9;11-a1)$

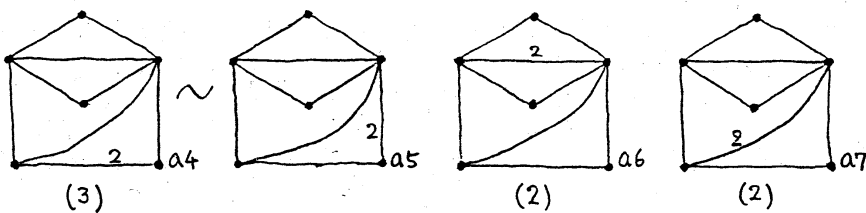


\sim $G(6,8;12-b12)$
 \sim $G(6,9;11-a4)$

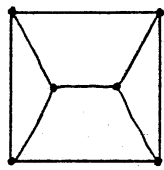
同型類 $\begin{matrix} a & 5 \\ \hline & 5 \end{matrix}$ \sim 同値類 $\begin{matrix} a & 4 \\ \hline & 4 \end{matrix}$



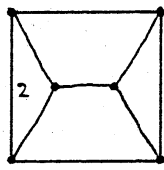
\sim $G(6,8;16-b8)$



同型類 $\begin{matrix} a & 7 \\ \hline & 7 \end{matrix}$ \sim $\begin{matrix} a & 5 \\ \hline & 5 \end{matrix}$

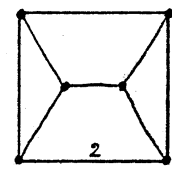


$G(6,9;7)$



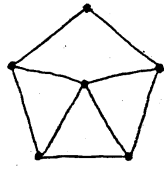
10_{121}

$\sim^d G(6,10;8)$

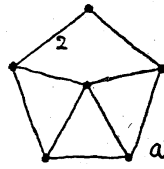


(2)

同値類 = \sim

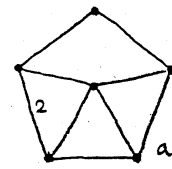


$G(6,9;8)$



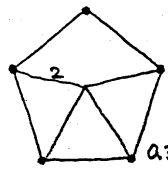
10_{113}

$\sim^d G(6,10;3)$

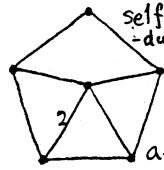


10_{117}

$\sim^d G(6,9;10-a_3)$

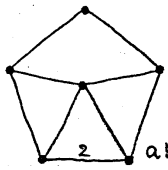


(3)



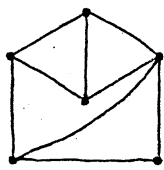
10_{118}

self-dual

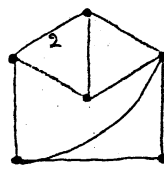


(2)

同型類 = \sim

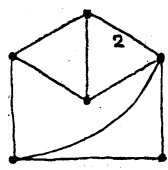


$G(6,9;9)$

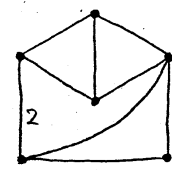


(2)

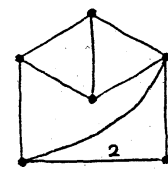
\sim



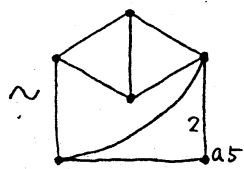
(2)



(2)

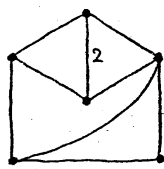


(2)

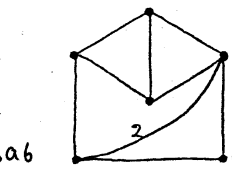


\sim

a_5



(2)

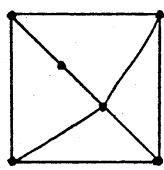


(3)

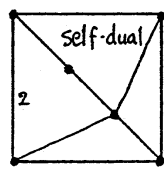
同型類 \sim 同値類

a_7

a_5

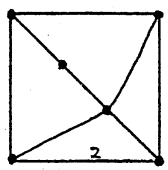


$G(6,9;10)$

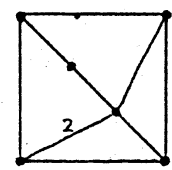


10_{115}

self-dual

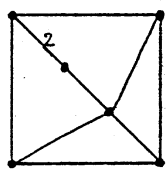


(2)

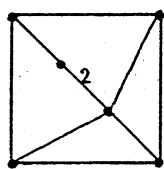


$\sim^d G(6,9;8-a_2)$

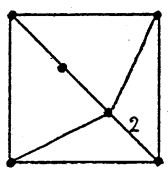
10_{117}



(2)



\sim

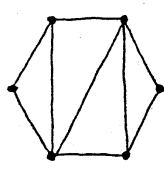


(2)

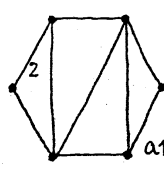
同型類 \sim 同値類

a_6

a_5

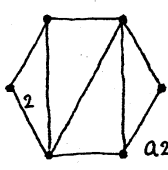


$G(6,9;11)$



10_{45}

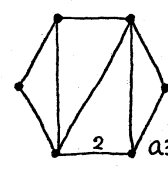
\sim



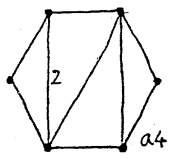
a_1

$\sim^d G(6,9;2-a_1)$

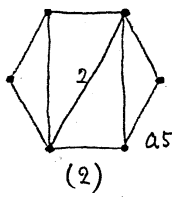
10_{45}



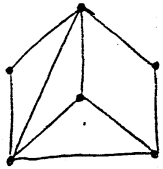
(2)



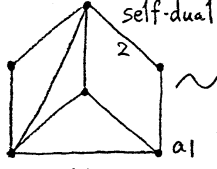
$\sim G(6,9;2-a4)$
10₄₂



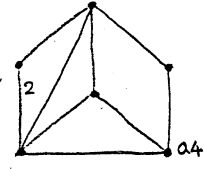
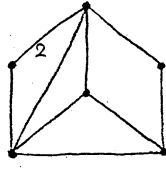
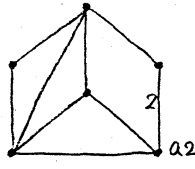
同型類 \sim 同値類
a 5 a 4



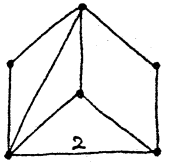
$G(6,9;13)$



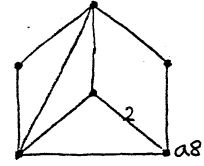
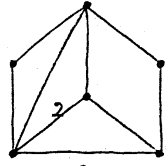
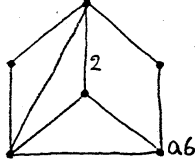
10₈₈



(2)



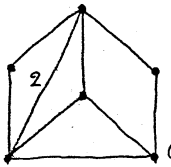
$\sim^d G(6,8;6-b13)$
10₁₀₇



(2)

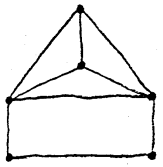
(2)

(2)

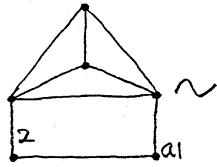


$\sim^d G(6,8;7-b6)$
10₈₄

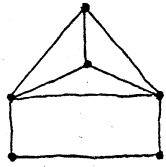
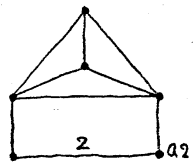
同型類 \sim 同値類
a 9 a 7



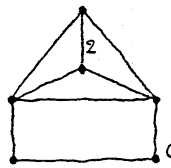
$G(6,9;16)$



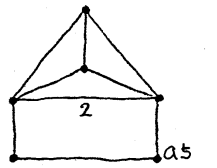
(3)



$\sim^d G(6,8;6-a2)$
10₈₆

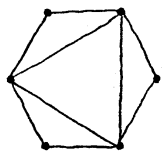


(2)

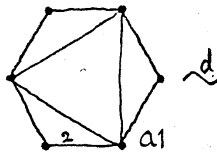


(3)

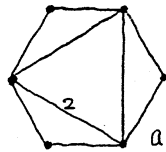
同型類 \sim 同値類
a 5 a 4



$G(6,9;18)$

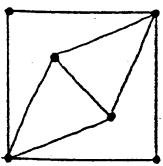


$\sim^d G(6,8;9-b4)$
10₆₉

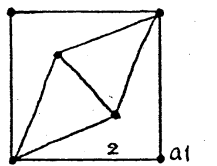


(2)

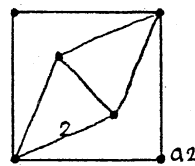
同型類 = \sim
a 2



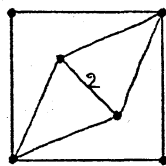
$G(6,9;19)$



(2)

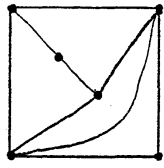


(2)

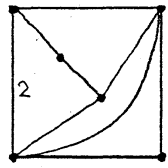


(4)

同型類 = \sim
a 3

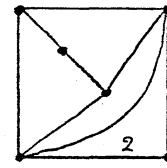


$G(6,9;20)$

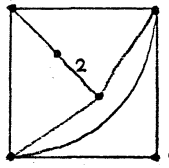


$\sim^d G(6,8;6-b11)$

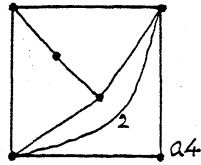
10_{95}



(2)



(3)

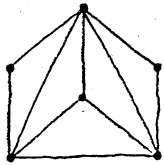


(2)

同型類 \sim 同値類

$a \underline{4}$

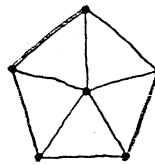
$\nu = 10$



$G(6,10;1)$

$\sim^d G(6,8;6-b3)$

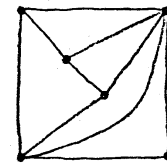
10_{89}



$G(6,10;2)$

self-dual

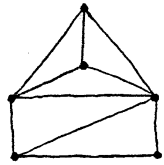
10_{123}



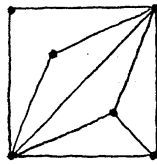
$G(6,10;3)$

$\sim^d G(6,9;8-a1)$

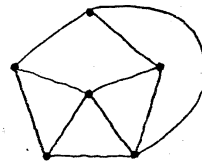
10_{113}



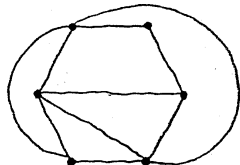
$G(6,10;4)$ (2)



$G(6,10;5)$ (3)



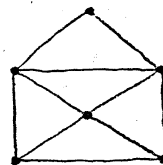
$G(6,10;7)$ (2)



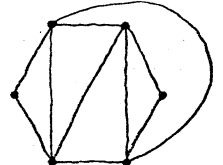
$G(6,10;8)$

$\sim^d G(6,9;7-a1)$

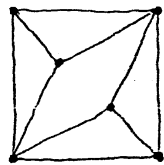
10_{121}



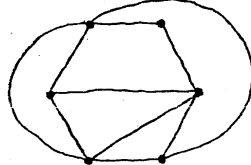
$G(6,10;10)$ (2)



$G(6,10;11)$ (2)



$G(6,10;14)$ (4)



$G(6,10;15)$ (2)

注：上の図表中， \sim 同値類の数は，ここに示した数より大きくないことを示す。

$G \sim^d G'$ の記号は， G の dual G^* と G' が \sim 同値であることを示す。

特に終り目となる場合の dual の調べは十分でない。

引用文献

- [A] R.J.Auman : Asphericity of alternating knots, Ann.of Math., 64(1956), 374-392.
- [An] A.L.Anger : Machine calculation of knot polynomials, Princeton Univ.Senior Thesis, 1959.
- [A-B] J.W.Alexander & G.B.Briggs : On types of knotted curves, Ann.of Math., 28(1927), 562-586.
- [Co] J.H.Conway : An enumeration of knots and links and some of their related properties, In : Computational problems in Abstract Algebra(ed.J.Leech), Proc.Conf.Oxford 1967, Pergamon Press, New York 1967, 329-358.
- [Cr] R.H.Crowell : Non-alternating links, Illinois J.Math., 3 (1959), 101-120.
- [D-T] C.H.Dowker & M.B.Thistlethwaite : Classification of knot projections, Topology and its Appl., 16(1983), 19-31.
- [G] L.Goeritz : Knoten und quadratische Formen, Math.Z., 36 (1933), 647-654.
- [H] F.Harary : Graph Theory, Addison-Wesley, Reading,MA.,1969.
- [H-P-R-S] F.Harary, E.M.Palmer, R.W.Robinson & A.J.Schwenk : Enumeration of graphs with signed points and lines, J.Graph Theory, 1(1977), 295-308.
- [H-N-C] F.Harary, R.Z.Norman & D.Cartwright : Structural Models, John-Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1965.
- [Ki] T.P.Kirkman : The enumeration,description and construction of knots of fewer than ten crossings, Trans.Roy.Soc. Edinburgh, 32(1885), 281-309.
- [Ko.1] 小林一章 : グラフと絡み輪に関する多項式, 数理解析研究所講究録 #566 (1985), 130-144.
- [Ko.2] 小林一章 : 結び目理論に現れるグラフについて, 本講究録.

- [L] C.N.Little : On knots with a census to order 10, Trans.Conn Acad.Sci., 18(1885), 374-378. Alternate \pm knots of order 11, Trans.Roy.Soc.Edinburgh, 36(1890), 253-255. Non-alternate \pm knots, ibid. 39(1900), 771-778.
- [N1] 中西康剛 : Knots α enumeration α 話題から, 数理解析研講究録 # 369(1979), 110-121.
- [N2] 中西康剛 : Alexander invariants of Links, 神戸大学修士論文, 1980.
- [P1] K.A.Perco : On the classification of knots, Proc.Amer.Math Soc., 45(1974), 262-266.
- [P2] K.A.Perco : Invariants of 11-crossing knots.(to appear).
- [Re] K.Reidemeister : Knotentheorie, Ergebn.Math.Grenzgeb., Bd.1, Springer, Berlin, 1932.
- [Ro] D.Rolfsen : Knots and Links, Publish or Perish, Berkeley, CA., 1976.
- [S] 鈴木晋一 : On the Kirchhoff-Goeritz matrix of a signed graph (in Japanese), 箱根セミナ-報告集, 1985.
- [Ta] P.G.Tait : On knots I, II, III. In : Tait's Scientific Paper I, Camb.Univ.Press, London, 1898.
- [Th] M.B.Thistlethwaite : Knot Tabulations, In : Aspects of Topology, London Math.Soc.Lecture Note Series #93, Camb.Univ.Press, 1985, pp.1-76.
- [To] 徳田広太郎 : 結び量と Goeritz 行列について, 日本大学農獣医学部研究紀要, 10(1974), 19-24.
- [Y-K] T.Yajima & S.Kinoshita : On the graphs of knots, Osaka Math.J., 9(1957), 155-183.