

アルフ不変量と T ジーナス

大阪市大理 杉下 幸司 (Kouji Sugisita)

絡み輪のアルフ不変量は固有な絡み輪 (proper link) に対して定義される。ここでは絡み輪が許容的なとき、そのアルフ不変量は成分数が 3 以下の部分絡み輪のアルフ不変量の和で表されることを述べる。すなわち、

定理 1 $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ を成分数が 3 以下の許容的な絡み輪とする。このとき次の公式が成り立つ。

$$a(L) = \sum_i a(L(i)) + (n-1) \sum_i a(L(2)) + \frac{n^2-n+2}{2} \sum_i a(L(1))$$

但し、 $a(L)$ は L のアルフ不変量。 \sum_i は成分数が i であるような部分絡み輪全てについての和。式は mod 2 である。

ここで全ての K_i, K_j に対して $lk(K_i, K_j) = 0$ となる絡み輪を許容的という。

まず絡み輪のアルフ不変量を定義しよう。その為に結び目 K と絡み輪 L が 有関係 (related) であることを定義する。 L が $S^3 \times [0]$ にあり、 K が $S^3 \times [1]$ にあり、更に $S^3 \times [0, 1]$ に局所平坦な穴あき円板 A があって $\partial A = L \cup (-K)$ となるとき、 K は L と有関係であるという。さて L が固有な絡み輪のとき、 L のアルフ不変量を L と有関係な結び目のアルフ不変量で定義する。絡み輪が固有な場合、それと有関係である2つの結び目のアルフ不変量は等しいことが知られている (Robertello) ので、絡み輪のアルフ不変量はちゃんと定義できる。

証明の前に定理1の応用を述べよう。 $c(L)$ を成分数が n の絡み輪 L の Conway 多項式の z^{n+1} の係数とすると次の定理が成り立つ。

定理 2 L が許容的ならば、

$$a(L) = \sum c(L(3)) + \sum c(L(2)) + \sum c(L(1)) \pmod{2}.$$

更に定理1と定理2を繰り返し使うと次を得る。

定理 3 L が成分数が 4 以上の許容的な絡み輪ならば、 $c(L) = 0 \pmod{2}$ 。

定理 2 は定理 1 と村上 [1] によって示された次の定理によって示される。

定理 (村上) L が純粹に固有な (purely proper) な絡み輪ならば、 $a(L) = \sum c(L) \pmod{2}$ 。

但し、 Σ は自分自身を含めた全ての部分絡み輪についての和。

また Brunnian 絡み輪について次が成り立つ。

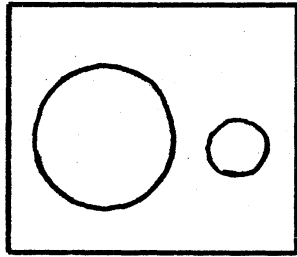
引理 L が成分数が 4 以上の Brunnian 絡み輪ならば

$$a(L) = 0 \pmod{2}.$$

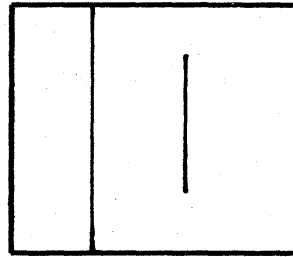
次に許容的な絡み輪 $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ の T ジーナスを定義する [2]。これを使って定理 1 は示される。

L の各成分 K_i に特異円板 D_i をはり、 $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ とおく。 D の特異線の原像は適当な変形をすると次の

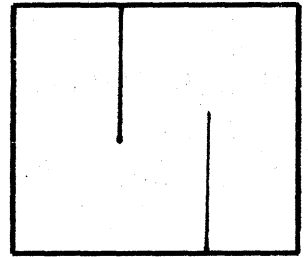
5種類になる。



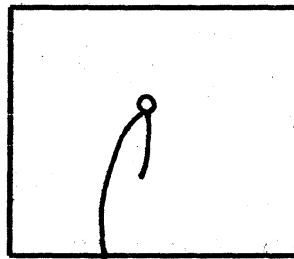
(a)



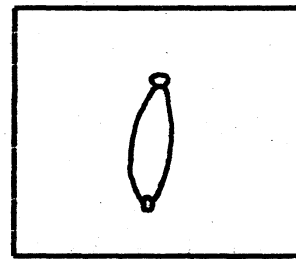
(b)



(c)



(d)



(e)

○は分枝点

(a) を輪状特異線 (loop)、(b) をリボン特異線 (ribbon)、(c) を留め金特異線 (clasp)、(d) を1点分枝特異線 (branch with one-point)、(e) を2点分枝特異線 (branch with two points)、と呼ぶ。

さて、D上の3重点を2つの型に分ける為に特異線の本像(2つの線から成っている)に次のように外線 (b-line)、内線 (i-line)と名付ける。(b)、(d)につ

いては端点が境界まで延びている方を外線、他方を内線と呼ぶ。(a)、(c)、(e)についてはどちらか一方を外線、他方を内線と呼ぶ。

3重点の原像は特異線の原像の交点になっている。今外線と外線の交点になっているとき外外型、外線と内線の交点になっているとき内外型、内線と内線の交点となっているとき内内型と呼ぶ。

3重点 p の3つの原像を P_1, P_2, P_3 とする。 P_i ($i=1, 2, 3$) が内外型であるとき p を I 型の3重点と呼ぶ。一方、 P_1 が外外型、 P_2 が内外型、 P_3 が内内型のとき p を II 型の3重点という。

さて、絡み輪 L に次の条件を満たす特異円板

$D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ をはる。

(1) $\partial D_i = K_i$ ($i=1, \dots, n$)。

(2) 各 D_i は留め金特異線を持たない。

(3) $D_i \cap D_j$ にも留め金特異線はない。

L が許容的なとき上の条件を満たす D があることの証明は略する [3]。

このとき $T(L, D, \rho)$ で D 上の I 型3重点の個数

を表す。尚、 ρ は (a), (e) の型の特異線の場合、内線・外線の名付け方に任意性があり付け方によって I 型 3 重点の個数が異なるときがある、その名付け方を表すものとする。今、上の条件 (1), (2), (3) を満たす様々な特異円板を L にはり、更に ρ を色々とったときの $T(L, D, \rho)$ の最少値を $T(L)$ で表し、 L の T ジーナスと呼ぶ。絡み輪の T ジーナスについて [2] で結び目の T ジーナスについて論じたと同様にして次が成り立つ [2]。

定理 4

(1) $T(L)$ は絡み輪同境の不変量。

(2) $g^*(L) \leq T(L)$ 。

但し、 $g^*(L)$ は L の 4 次元ジーナス。

また、T ジーナスは絡み輪のアルフ不変量を表している。すなわち、

定理 5 $T(L, D, \rho) = a(L) \pmod{2}$ 。

特に $T(L) = a(L) \pmod{2}$ 。

証明の概略： L に先の条件(1),(2),(3)を満たす特異円板 D をはる。今、 L を融合して(fusion)得られる結び目を K とする。融合帯(fusion bands)は D 上の3重点の個数を変えないようにとれる。 D と融合帯の結び目を D' とすると $T(L, D, \rho) = T(K, D', \rho)$ である。また、 K は L と有関係であるから $a(L) = a(K)$ である。よって結び目の場合に示せば充分。以下、概略を述べる。(詳しくは[2]を参照して下さい。) K は特異円板 D' を利用して次の様な絡み輪 B と有関係であることが示せる。 B は $T(K, D', \rho)$ 個のボローミアン輪といくつかの結んでいない結び目との分離和(split union)である。I型の3重点1個に対応してボローミアン輪1個が対応している。II型の3重点1個に対して成分数が3である自明な絡み輪(trivial link)1つが応じている。ボローミアン輪のアルフ不変量は1であり、アルフ不変量は分離和について足し算が成り立つので $T(K, D', \rho) = a(K) \pmod{2}$ となる。

定理1の証明： 絡み輪 L に先の条件を満たす特異円板 $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ をはっているものとする。

$D_i \cap D_j \cap D_k$ となっている I 型 3 重点の個数を $T(i, j, k)$ で表す。 $D_i \cap D_j \cap D_k$ となっている I 型 3 重点の個数と $D_i \cap D_j \cap D_k$ となっている I 型 3 重点の個数との和を $T(i, j)$ で表す。また、 $D_i \cap D_j \cap D_k$ となっている I 型 3 重点の個数を $T(i)$ で表す。但し、ここでの i, j, k は全て互いに異なるものとする。

D 上の I 型 3 重点の個数を調べると次の様になる。但し、以下の式は mod 2 である。

$$a(L) = T(L, D, \rho) = \sum T(i, j, k) + \sum T(i, j) + \sum T(i) \quad \dots (1)$$

さて、部分絡み輪について調べてみると、

$$a(K_i) = T(i) \text{ より } \sum T(i) = \sum a(K_i). \quad \dots (2)$$

また、 $a(K_i \cup K_j) = T(i, j) + T(i) + T(j)$ より

$$\sum a(K_i \cup K_j) = \sum T(i, j) + (n-1) \sum T(i) \text{ だから、}$$

$$\sum T(i, j) = \sum a(K_i \cup K_j) + (n-1) \sum a(K_i). \quad \dots (3)$$

更に、 $a(K_i \cup K_j \cup K_k) = T(i, j, k) + T(i, j) + T(j, k) + T(k, i) + T(i) + T(j) + T(k)$ より

$$\sum a(K_i \cup K_j \cup K_k) = \sum T(i, j, k) + (n-2) \sum T(i, j) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \sum T(i)$$

従って、

$$\begin{aligned} \sum T(i, j, k) &= \sum a(K_i \cup K_j \cup K_k) + (n-2) \sum a(K_i \cup K_j) \\ &\quad + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \sum a(K_i) \quad \dots (4) \end{aligned}$$

(2), (3), (4) 式を(1) 式に代入すると定理 1 の公式を得る。

参考文献

- [1] H. Murakami: The Arf invariant and the Conway polynormial of links, Math. Semi. Note Kobe Univ. vol.11(1983), 335-344.
- [2] Murakami and Sugishita: Triple Points and Knot Cobordism, Kobe J. Math. 1 (1984), 1-16
- [3] K. Sugisita: Triple Points and Knot Cobordism, Master Thesis, Osaka City Univ. (1983)