数理解析研究所講究録
第 575 巻 1985 年 147-155

Tangle と 2-variable polynomial

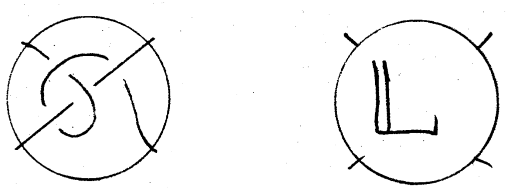
北大・理　児玉 宏児 (Kodama Kouzi)

向きづけられたlinkのpolynomialに対応するTangleのpolynomialを定義しTangleの操作についての性質とlinkのpolynomialとの関係を見る。また、Linkをcode付のgraphに対応させた時のpolynomialの性質も見る。

§0. まずは準備から……

Def. Tangle：disk上のproperな2本のarcsと0本以上のloopsによるdiagram。arcsの端点は、右上、右下、左上、左下に出るようにする。一般のTangleを示す時にはTangleの置き方を示すために文字"L"を書く。

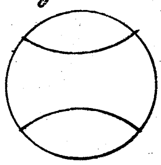
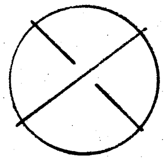
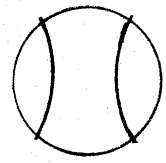
例.



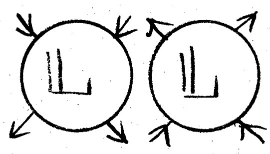
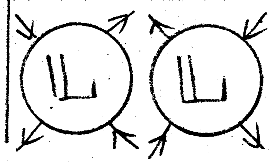
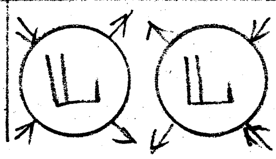
こんな具合い

境界を止めたまま内部のisotopyで移り合うものは同じTangleと見なすことにする。

Def. tangle e_0, e_1, e_∞ を次の様に定める

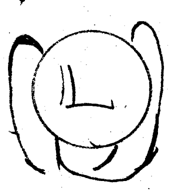
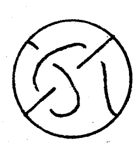
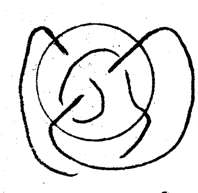
e_0:  e_1:  e_∞: 

Tangleの各arcsとloopsに向きを入れて考える。この時Tangleの4つの端点での向きの入り方は次の3つのtype。

orientation type	$\pm$ type	$=$ type	$\mp$ type
Tangle			

各orientation typeのtangleの集合を$\mathcal{T}_\pm, \mathcal{T}_=, \mathcal{T}_\mp$と書く。
特に問題がなければori. typeは明示せず単に$\mathcal{T}$と書く。

Def. $D: \mathcal{T} \to \{\text{link diagram}\}$ がdiagram construction
山 の部分が空白になっているlink diagramに与えられたtangleをはめ込んでdiagramを完成させる。

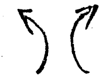
例：D:  とすると D() = 

☆ $\Lambda = \mathbb{Z}\langle x, y, z\rangle$ 変数x, y, zのLaurent polynomial環

Def. oriented linkのpolynomial

link Lのpolynomial $Q_L \in \Lambda$ をdiagramの交点の近くでの変形に関して次の様にする。

$$x Q_{L_+} - y Q_{L_-} = z Q_{L_s}$$

L_+ :  L_- :  L_s : 

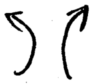
また、k-component trivial link に関しては

$$Q_L = \left(\frac{x-y}{z}\right)^{k-1}$$

§1. Tangle の polynomial ——本題に入ります——

Def. oriented tangle T に対し $P(T)$ ($\in \Lambda \times \Lambda \times \Lambda$ 多項式の三つ組) を交点の近くでの変形に対して次の様にとる。

$$x P(T_+) - y P(T_-) = z P(T_s)$$

T_+ :  T_- :  T_s : 

また、e_0, e_1, e_∞ の各 tangle に対して、

$$P(e_0) = (1,0,0),\quad P(e_1) = (0,1,0),\quad P(e_\infty) = (0,0,1)$$

☆ $P(T)$ の成分を先頭から $P_0(T)$, $P_1(T)$, $P_\infty(T)$ と書く。

Prop. 1

(i) $P(T)$ は well defined

(ii) T の ori. type

$$\pm \Rightarrow P_0(T) = 0$$

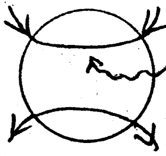
$$= \Rightarrow P_1(T) = 0$$

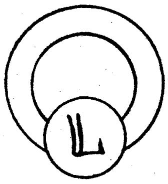
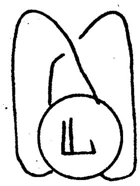
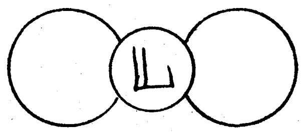
$$\mp \Rightarrow P_\infty(T) = 0$$

(iii) D: diagram construction

$$Q_{D(T)} = P_0(T)\, Q_{D(e_0)} + P_1(T)\, Q_{D(e_1)} + P_\infty(T)\, Q_{D(e_\infty)}$$

注、(i) $e_0\oplus$, $e_1\ominus$, $e_\infty\textcircled{T}$ は実際にはない。(iii)の $QD(e_0\oplus)$, $QD(e_1\ominus)$, $QD(e_\infty\textcircled{T})$ は形式的に書いてある。

例, e_0, $\oplus$type  向きのつけようがない

☆ D_0:  D_1:  D_∞: 

$\delta: \frac{x-y}{z}$ とすると

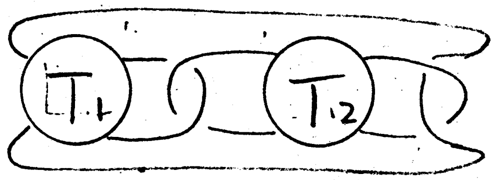
	T の ori. type
$QD_0(T) = \delta P_0(T) + P_1(T) + P_\infty(T)$	$\ominus$ or $\textcircled{T}$
$QD_1(T) = P_0(T) + \delta P_1(T) + P_\infty(T)$	$\oplus$ or $\textcircled{T}$
$QD_\infty(T) = P_0(T) + P_1(T) + \delta P_\infty(T)$	$\oplus$ or $\ominus$

上の三つの式は $P_0(T), P_1(T), P_\infty(T)$ に関して独立になっている。Tangle の Polynomial として P_0, P_1, P_∞ の三つ組の代わりに QD_0, QD_1, QD_∞ の三つ組を用いても良いことが分かる。上式はこの変換式と見なせる。(O.K?)

Prop.2 $D: \underbrace{T\times\cdots\times T}_{n個} \longrightarrow$ link diagram とすると

$$QD(T_1,\cdots,T_n) = \sum_{t_1,\cdots,t_n=0,1,\infty} P_{t_1}(T_1)\cdots P_{t_n}(T_n)\, QD(e_{t_1},\cdots,e_{t_n})$$

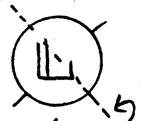
例, $n=2$

$D(T_1, T_2) =$ 

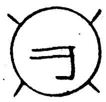
各々の tangle に関して Prop.1(iii) に従って書き下せば良い。

Def、 tangle の operation を定義する。

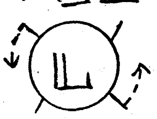
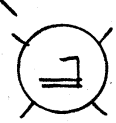
(1) σ：左上と右下を結ぶ対角線を軸にπ回転

$T =$  (disk上に"山"が書かれていると思って.)

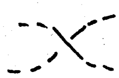
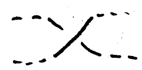
$\sigma \downarrow$ (σを作用させると…)

$T\sigma =$  (←こうなってしまう。)

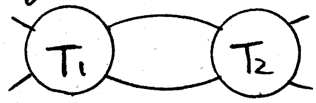
(2) τ：平面上でπ回転

$T =$  $\longrightarrow$  $= T\tau$

(3) ！：紙面に関するreflection

$T =$  各交点で $\longrightarrow$  $= T!$

(4) ＋：2つのtangleを横に並べてつなぐ

$T_1 + T_2 =$ 

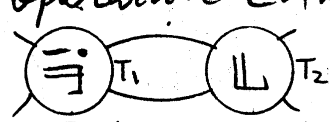
注) ① σ, τ は2面体群 D_4 を生成する

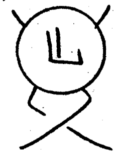
② ! と D_4の元の作用は可換になっている。

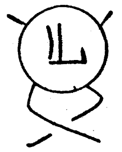
i.e. $x \in D_4$. $(Tx)! = (T!)x$

③ ! と D_4 の元の作用を + に優先させることにする

④ Conwayのoperationとの対応は次の様になる.

$(T_1, T_2) =$  $= T_1\sigma! + T_2$

$T_+ =$  $= (T\sigma + e_1!)\sigma$

$T_- =$  $= (T\sigma + e_1)\sigma$

これらの操作の結果ともとのtangleとの対応からpolynomialを評価する。

Prop.3　T, T_1, T_2 : tangle

① $x \in D_4$

$$P(Tx) = \sum_{t=0,1,\infty} P_t(T)\, P(e_t x)$$

② $$P(T!) = \sum_{t=0,1,\infty} P_t(T)(y,x,-z)\, P(e_t !)$$

③ $$P(T_1+T_2) = \sum_{t_1,t_2=0,1,\infty} P_{t_1}(T_1)\, P_{t_2}(T_2)\, P(e_{t_1}+e_{t_2})$$

$\sigma\tau$は水平軸中心のπ回転、$\tau\sigma$は垂直軸中心のπ回転、τ^2は紙面上のπ回転。これらをe_0, e_1, 及びe_∞に作用させても同じtangle（arcに入る向きが逆になる程度）となるので

Prop.4　T, T_1, T_2 ; tangle

(1) $P(T) = P(T\sigma\tau) = P(T\tau\sigma) = P(T\tau^2)$

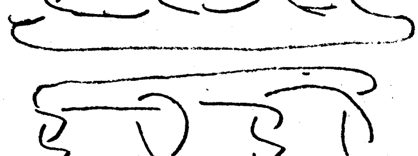
$P(T_1+T_2) = P(T_2+T_1)$

(2) (1)を用いると

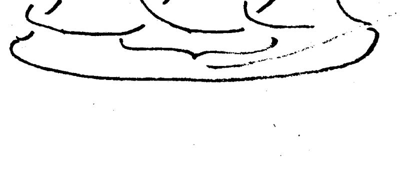
$QD(T) = QD(T\sigma\tau) = QD(T\tau\sigma) = QD(T\tau^2)$

例. 11-151と11-152は同じpolynomialを持つ

11-151



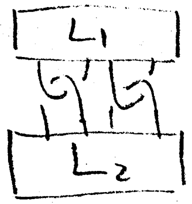
11-152



ここが入れかわっている

例　$L = L_1 \cup L_2$: link

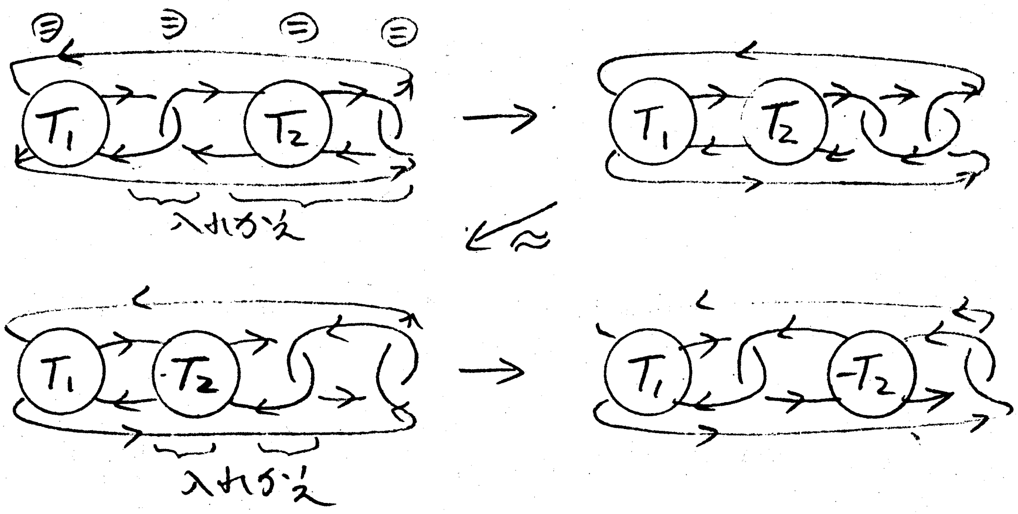
(1) $lk(L_1, L_2) = 0$　かつ　(2)



こんな具合いに2ヶ所で引っ掛かっていると…

$\Rightarrow Q_{L_1 \cup L_2} = Q_{L_1 \cup -L_2}$

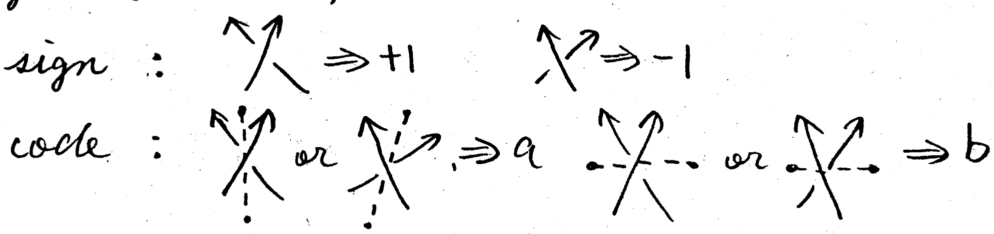
i.e.　一方のorientationを逆にしてもpolynomialは不変



§2.　Link の graph　(graphとの対応についても少々)

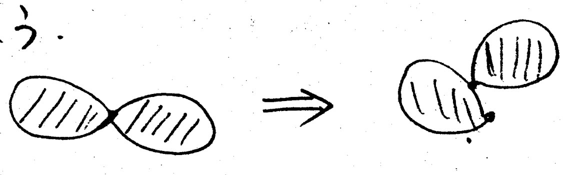
Def.　oriented link diagram の graph

link diagram L が分ける S^2 の領域を2色にぬり分け、一方の色の領域について、各領域に graphの頂点、領域をつなぐ diagramの交点には辺を対応させる。各辺には次の様にして sign と code をつける。

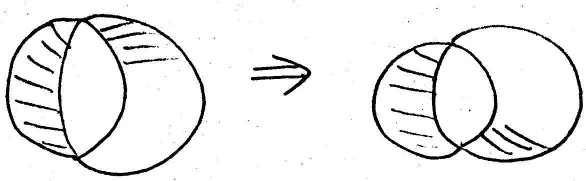


Def.　2-isomorphic

次の操作を有限回行なって移り合う2つのgraphを2-isomorphicと云う.

(1)  連結度1の部分をつけかえる

(2)

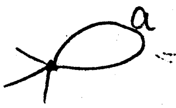
 連結度2の部分をつけかえる

Prop. 5

(1) G ($\subset S^2$) signed coded graph が link の graph

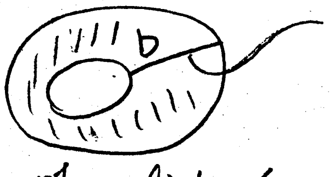
$\Leftrightarrow$

(a) 各vertexのまわりでaのcodeのedgeは偶数個



self loop は 2個と見る

(b) S^2-G の各領域から見てbのcodeのedgeは偶数個

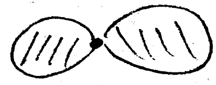


この様な所は2個と見る

(2) この時. link diagram と graph は link の ori. reversing と graph の dual (sign はそのまま code は a, b と交換) を除いて一意的に対応がつけられる

(2) は link と graph の対応から明らか. (1) は graph の各辺での link との対応が全体として矛盾しないことを見ればOK.

この対応で link の polynomial は signed coded graph $G(\subset S^2)$ の polynomial と見なせる (もちろん G が link と対応する時だけ)

また link diagram の Reidemeister moves に対応しての graph の変化では当然 polynomial は不変となる。
ところで、Th. 4.(2) の意味をこの graph 上で考えると、
$G \subset S^2$ の embedding の差と 2-iso の差は connected sum された link の diagram の作り方 ( の所) の差 又は Th. 4. 2 に示される tangle の回転 ( の所) と対応がつく。graph の embedding を変えても、2-iso だけ変化させても link に対応し、しかも、polynomial は不変なことが分かる。