数理解析研究所講究録
第 575 巻 1985 年 198-212

Fibered 2-knots and Thurston Norm

東大理　斎藤 昌彦（Masahico Saito）

§0. Introduction

S^4 の中の smooth knot K ($\cong S^2$) が fibered であるとは，$S^4 \setminus K$ が S^1 上の fiber bundle であり，fiber は M°，ただし $M^\circ = \mathrm{punc}\, M = M \setminus \mathrm{Int}\, B^3$，$M$ は closed orientable 3-manifold のときをいう。このとき，diffeomorphism $h: M^\circ \to M^\circ$ によって

$$S^4 \setminus K = M^\circ \underset{h}{\times} S^1 = M^\circ \times I / \sim$$

$$((x, 0) \sim (h(x), 1),\ x \in M^\circ)$$

と書けるが，この h を monodromy という。

また，K の Alexander polynomial $f(t)$ は，

$$f(t) = \det(tI - h_*)$$

で与えられる。ただし，h_* は，h が $H_1(M^\circ, \mathbb{Q})$ に誘導する automorphism である。

Polynomial $f(t)$ が fibered 2-knot の Alexander polynomial となるための条件は，

(☆) $f(1)=\pm 1$, 最高次と最低次の項の係数が ± 1

であることが知られている。本稿では, fibered 2-knot の新しい構成法を考えるが, まず今まで知られている構成法を以下にまとめてみる。

(0) Zeeman の twist spun knot [Z]

$K \subset S^3$ を classical knot とするとき,

$$(S^4, \tilde{K}) = \{(S^3, K) \setminus \mathrm{Int}(B^3, B^1)\} \underset{\tau^k}{\times} S^1 \cup S^2 \times D^2$$

(τ^k は K を k 回"回転"する写像, $k \neq 0$)

で与えられる。Fiber は $(N^k)^0$, N^k は S^3 の K に沿った k-fold cyclic branched covering である。この covering の transformation が $\tilde{K}$ の monodromy となる。したがって Alexander polynomial $f(t)$ は $(t^k - 1)$ を割り切る。[L], [M], [P] に於てこの方法が一般化された:

$$(S^3 \setminus K) \underset{g}{\times} S^1 \underset{A}{\cup} Tw, \quad Tw \text{ は "twin" ([M])}$$

とくに g = identity のときには, fiber は $((N^k)_p)^0$, $(N^k)_p$ は N^k の branch set (K の lift) に沿って surgery したものであり, monodromy はやはり finite order を持つ。

(1) Untwisted spin of classical fibered knot

(S^3, K) が classical fibered knot のときには,

$$(S^4, \tilde{K}) = \{(S^3, K) \setminus \mathrm{Int}(B^3, B^1)\} \times S^1 \cup S^2 \times D^2$$

も fibered knot となり, fiber は $(\underset{2g}{\#} S^2 \times S^1)^0$, ($g$ は K の genus)

Alexander polynomial は K のそれに等しい。

(2) Asano-Yoshikawa の方法 [A-Y]

条件(☆)を満たす任意のpolynomial $f(t)$ に対し，$f(t)$ を Alexander polynomial として持つ fibered 2-knot が存在することが，[A-Y]に於て，次の様にして証明された。

$h: F_m \to F_m$ を rank m の free group F_m の automorphism で，次の条件(i)，(ii)を満たすものとする。

(i) h のabel化 $h_*: \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^m$ に対し，$\det(tI - h_*) = f(t)$

(ii) 群 $\langle t, x_1, \cdots x_m \mid t, t x_i t^{-1} h(x_i)^{-1} \quad (i=1, \cdots m) \rangle$ は "Andrews-Curtis moves" [A-C] で trivial presentation になる。

このとき，V_m を4次元handle body，$\bar{h}: V_m \to V_m$ を，$\bar{h}_* = h: \pi_1(V_m) \to \pi_1(V_m)$ となるdiffeomorphism とするとき，$V_m \underset{h}{\times} S^1$ に (1点)$\underset{h}{\times} S^1$ に沿って 2-handle を attach すると B^5 になり，そのboundary に求める fibered 2-knot が実現される。

この方法でも fiber は $(\underset{m}{\#} S^2 \times S^1)^\circ$ になっている。

以上の構成法で，(0)では fiber としては いろいろな3-manifold ができるが Alexander polynomial には $(t^n - 1)$ を割り切るという制限がつき，一方(1)(2)では Alexander polynomial は豊富にできるが fiber としては $(\# S^2 \times S^1)^\circ$ しかできないことがわかる。

§1. Thurston norm との関係

F を orientable surface とし，$F=\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ を各 component とするとき，$\chi_-(F)=\sum_{i=1}^{n}\max\{0,-\chi(F_i)\}$ を F の complexity という。M を closed orientable 3-manifold とするとき，$a\in H_2(M,\mathbb{Z})$ に対し，$x(a)=\min.\{\chi_-(F)\mid [F]=a,\ F\subset M$ は closed orientable surface embedded in $M\}$ と定義すると，x は pseudo-norm になり，$H_2(M,\mathbb{R})$ に連続に拡張する。これを Thurston norm という。また，M が条件

(＊) x は $H_2(M:\mathbb{Z})$ 上の norm である

　（$\Leftrightarrow$ $H_2(M,\mathbb{Z})$ の 0 でない元を represent する任意の embedded surface の Euler 数が負である）

を満たすとき，$\mathrm{Image}(\mathrm{Diff}(M)\to \mathrm{Aut}\,H_2(M,\mathbb{Z}))$ は有限である。（以上 Thurston [T]）

したがって fibered 2-knot $K\subset S^4$ の fiber M° に対し，M が条件（＊）を満たすならば，K の Alexander polynomial は，ある n に対し，(t^n-1) を割り切らなければならない。これは §0 の (0) に対応している。逆に豊富な Alexander polynomial をもつ fibered 2-knot の fiber は (＊) を満たさないものでなければならないが，実際 §0 の (1), (2) では fiber はすべて $(\#S^2\times S^1)^\circ$ (homology を represent する surface はすべて S^2) であった。以上のことから，与えられた Alexander polynomial をもつ

fibered 2-knot で，fiber が irreducible であるものが存在するか，という問題を考える。

§2. Main Theorem

$f(t)$ が classical fibered knot の Alexander polynomial となるための条件は，

($☆_0$) $f(t) \doteq f(t^{-1})$ $(\Leftrightarrow f(t) = f(t^{-1}) \cdot t^k$ for some $k \in \mathbb{Z})$

かつ（☆）を満たす

である。

<u>Theorem.</u> $f(t)$ を ($☆_0$) を満たす任意の polynomial とするとき，Alexander polynomial が $f(t)$ で，fiber は M^0, M は irreducible となる fibered 2-knot が存在する。

<u>Outline of proof.</u> (S^3, K) を Alexander polynomial が $f(t)$ となる classical fibered knot とし，$(S^4, \overline{K})$ をその untwisted spin（§0, (1)）とする。

$(S^4, \overline{K}) = \{(S^3, K) \setminus \mathrm{Int}(B^3, B^1)\} \times S^1 \cup S^2 \times D^2$

$N(K)$ を（S^3 内での）K の tublar neighbourhood で，$N(K) \supset B^3$ を満たすものとし，p を S^1 の1点，T を $(\partial N(K)) \times p$ $(\subset S^4 \setminus \overline{K})$ とする。

$$
\begin{array}{c}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \rotatebox{90}{$\in$} \\
(S^4, \overline{K}) = \{ (S^3, K) \setminus \mathrm{Int}(B^3, B^1) \} \times S^1 \cup S^2 \times D^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cup \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \partial N(K) \times p \; = T \quad (\cong T^2)
\end{array}
$$

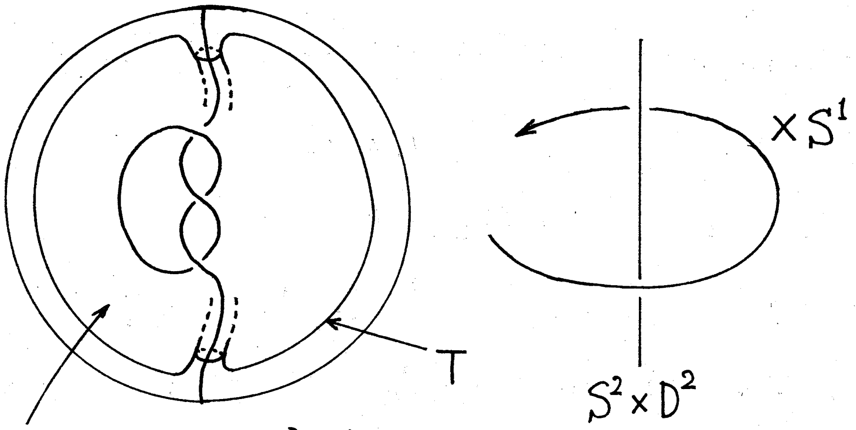


fig. 1

Tは次の性質をもつ：

① $(S^4, \overline{K})$のすべてのfiber S ($\cong (\#_{2g} S^2 \times S^1)^0$, gはKのgenus) にtransverse

② unknotted (i.e. $S^1 \times D^2$をbound, [H-K]) in S^4

S^4内でのTのtublar neighbourhoodを$N(T)$, $\partial N(T)$上のsimple closed curves m, l_1, l_2を

$$
\begin{cases}
m = \partial D^2 \subset D^2 \times T^2 \cong N(T) & : H_1(S^4 \setminus T, \mathbb{Z}) \text{の generator} \\
l_1 \subset S \ (\overline{K}\text{の一枚のfiber}) & \Big\} \; 0 \text{ in } H_1(S^4 \setminus T, \mathbb{Z}) \\
l_2 = (S\text{上の1点}) \times (\text{fiberの方向}) &
\end{cases}
$$

ととる。

また，$S^1 \times S^1 \times D^2$ の boundary 上に simple closed curves m', l_1', l_2' を

$$
\begin{array}{ccccc}
S^1 & \times & S^1 & \times & D^2 \\
\Psi & & \Psi & & \cup \\
p_1 & & p_2 & & \partial D^2 \\
 & & & & \Psi \\
 & & & & p_3
\end{array}
\quad \supset \quad
\begin{cases}
m' = p_1 \times p_2 \times \partial D^2 \\
l_1' = S^1 \times p_2 \times p_3 \\
l_2' = p_1 \times S^1 \times p_3
\end{cases}
$$

ととり，diffeomorphism $h ; \partial(S^1 \times S^1 \times D^2) \to \partial(S^4 \setminus \mathrm{Int}\, N(T))$

を $\begin{cases} h(m') = m + k\, l_1 , & k \in \mathbb{Z} \\ h(l_1') = l_1 , & h(l_2') = l_2 \end{cases}$

を満たすものとする。②より，$\{S^4 \setminus \mathrm{Int}\, N(T)\} \underset{h}{\cup} (S^1 \times S^1 \times D^2)$ は再び S^4 となり，①と h のとり方により，$\bar{K}$ のすべての fiber に同じ surgery をしたことになるので，この h による S^4 の surgery の結果，新らしい S^4 の中の fibered 2-knot $\tilde{K}$ が得られる。

（$\tilde{K}$ は，$\bar{K}$ の fibering に対して "equivariant Dehn surgery" をしてできた 2-knot である。）

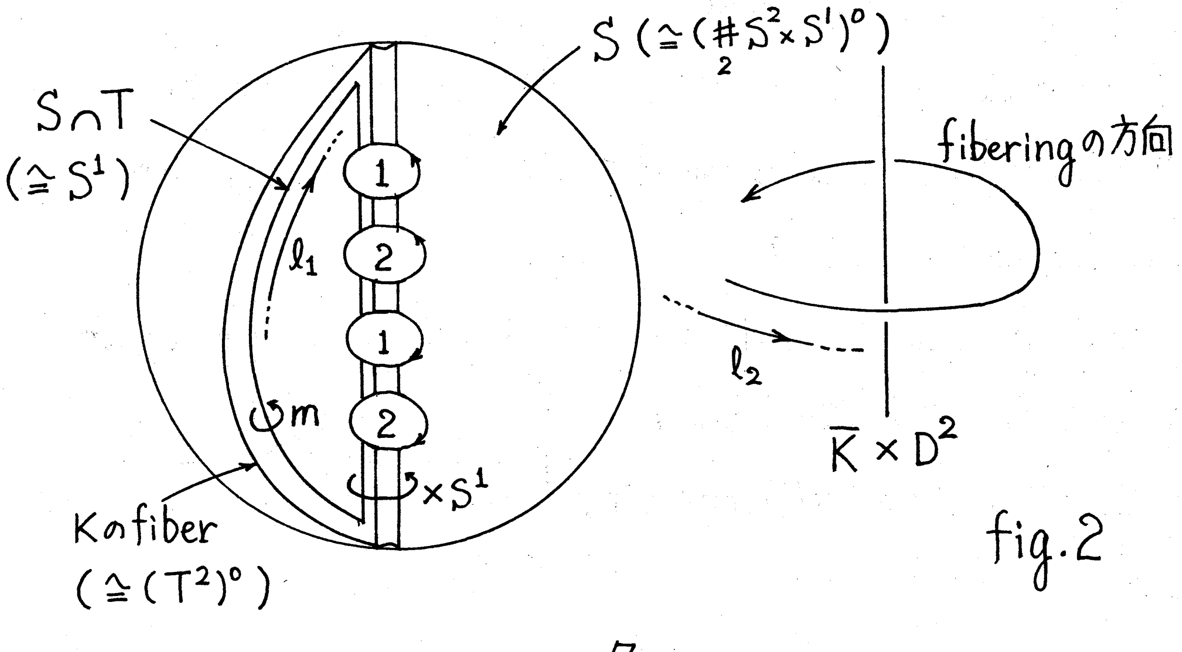


fig.2

fig. 2 は K の genus が 1 のときを示している。1 の ball, 2 の ball 同志を同一視すると $(\#_2 S^2\times S^1)^\circ$ になっている。この中に K の fiber の一枚 ($\cong (T^2)^\circ$) が入っていて, その上に $S\cap T$ がある。

k による surgery でできた fibered 2-knot $\tilde{K}$ の fiber は, S を, $S\cap T$ に沿って $(1/k)$-surgery したものである。 fig. 3 はその fiber M を示している。

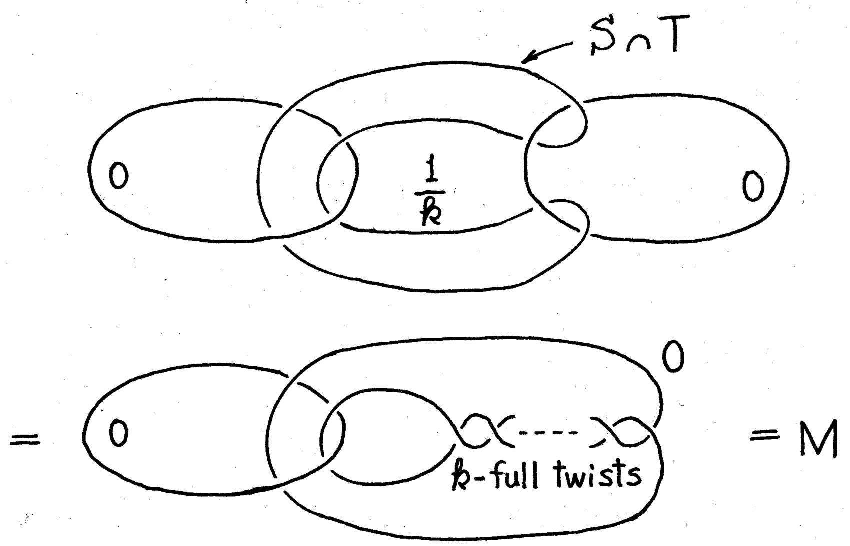


fig. 3

monodromy の不変性: $\bar{K}$ の monodromy を $F_1 : S\circlearrowleft$, $\tilde{K}$ の monodromy を $F_2 : M^\circ\circlearrowleft$ とするとき, $S\setminus\mathrm{Int}N(S\cap T)\cong M^\circ\setminus\mathrm{Int}N(M^\circ\cap T)$ であり, $F_1|_{S\setminus\mathrm{Int}N(S\cap T)} = F_2|_{M^\circ\setminus\mathrm{Int}N(M^\circ\cap T)}$ が成り立つ。

$H_1(S:\mathbb{Z})$, $H_1(M^\circ:\mathbb{Z})$ の生成元として, それぞれ $S\setminus\mathrm{Int}N(S\cap T)$, $M^\circ\setminus\mathrm{Int}N(M^\circ\cap T)$ 内の loop をとることができるので, 上のことから, $(F_1)_* = (F_2)_*$ となる。 $\bar{K}$ の Alexander polynomial は K のそれに等しいので, $\tilde{K}$ の Alexander polynomial も $f(t)$ となる。

Mの irreducibility：（宮崎桂氏の指摘による） Mを以下の様に記述しなおす。（以下簡単のためKの genus を1とする。） $L=L_1\cup L_2$ を 2-component unlink とし，$g:\partial N(L_1)\to\partial N(L_2)$ を，L_1 の meridian-longitude pair を L_2 の meridian-longitude pair にうつす diffeomorphism とするとき，$S^3\setminus\mathrm{Int}\{N(L_1)\cup N(L_2)\}$ の boundary を g で同一視してできる 3-manifold は $\#_2 S^2\times S^1$ である：

$$S^3\setminus\mathrm{Int}\{N(L_1)\cup N(L_2)\}/g \cong \#_2 S^2\times S^1$$

これを $\bar{K}$ の fiber S と思うと，その中に，$S\cap T$ は fig.4の様に入っている。Mは $S\cap T$ に沿って surgery して得られるから，fig.5の link $L'=L_1'\cup L_2'$ に対し，$g':\partial N(L_1')\to\partial N(L_2')$ を g から得られる diffeomorphism とするとき，

$$M\cong S^3\setminus\mathrm{Int}\{N(L_1')\cup N(L_2')\}/g'$$

となる。L' は unsplittable link であり，このようにしてできる 3-manifold は irreducible であることが Brakes [B] によってわかっている。したがって M は irreducible である。

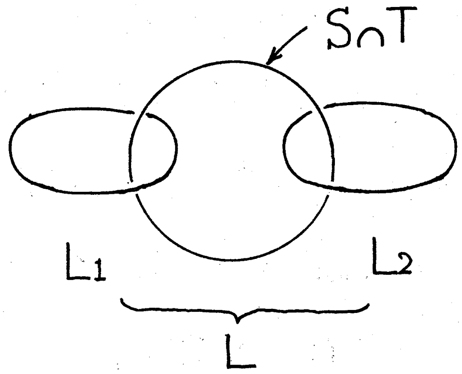


fig.4

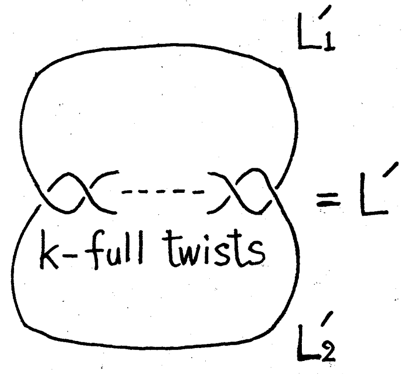


fig.5

§3. Other Examples

以上の構成法を用いて，さらに別のfiberを持つfibered 2-knotを構成することができる。

$K_1, K_2 \subset S^3$ を（unknotでない）classical fibered knotsとするとき，fig.6のように，$S^3 \setminus K_1 \# K_2$ 内に，disjointにembedされた，$K_1 \# K_2$ のすべてのfiberにtransverseに交わる3つのtori T_0, T_1, T_2 が存在する。§2と同様に，$K_1 \# K_2$ のuntwisted spin $\overline{K_1 \# K_2}$ を考え，T_0, T_1, T_2 が $S^4 \setminus \overline{K_1 \# K_2}$ 内に入っていると思い，それらに沿って"equivariant Dehn surgery"をすることによって，新らしいfiberができる。fig.7はこの結果できたfiberを示している。

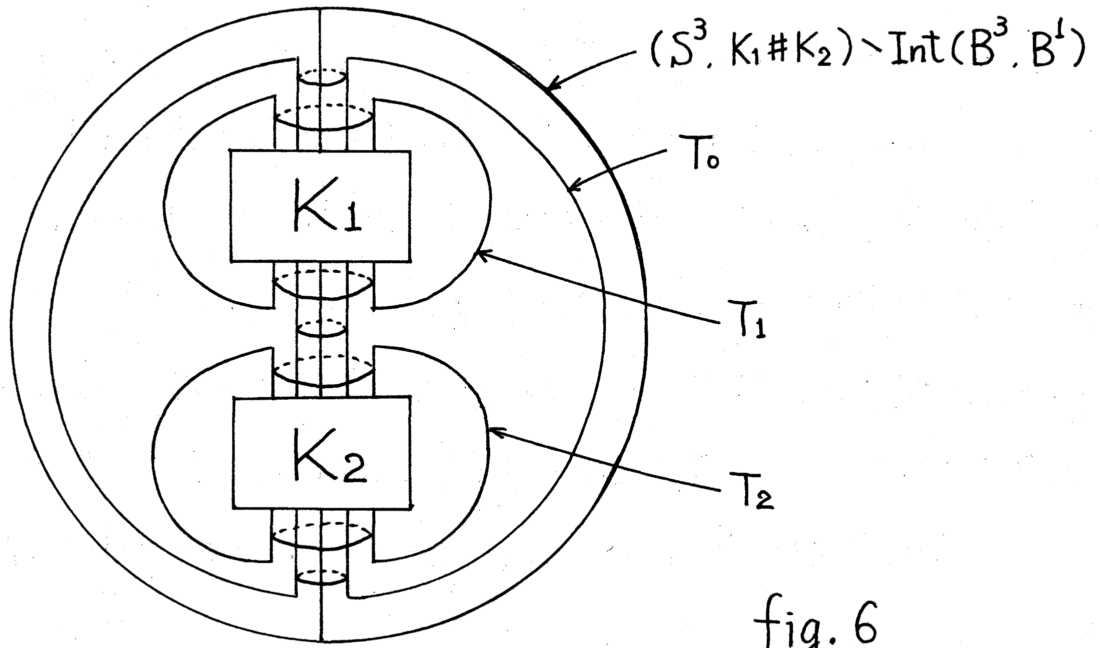
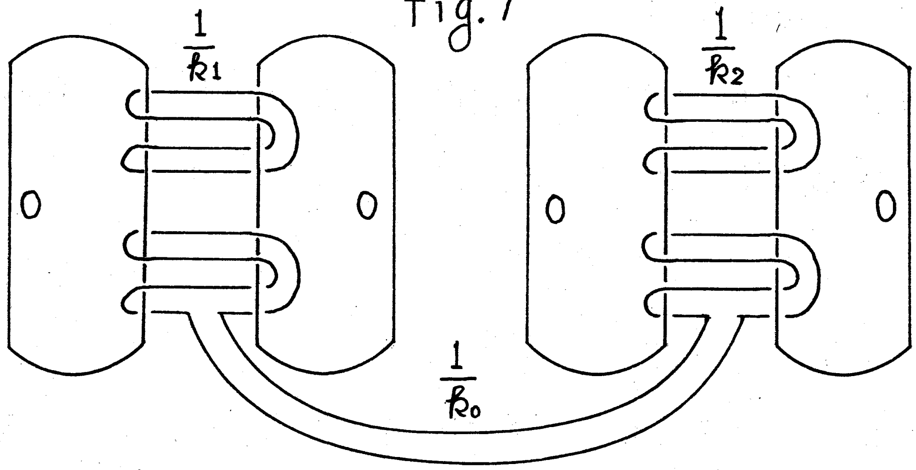


fig. 6

fig.7



ただし, fig.7では, K_1とK_2のgenusがいずれも1であり, T_0, T_1, T_2に沿ってそれぞれ係数$1/k_0$, $1/k_1$, $1/k_2$のsurgeryをしてできたfiberである。同様にK_1, K_2のgenusを変えたり, connected sumの数を増して多くのtoriに沿ってsurgeryすることにより, いろいろな3-manifoldをfiberとして持つfibered 2-knotを構成することができる。

また, periodic monodromyをもつclassical fibered knot (torus knot)のcomplementの中に, すべてのfiberにtransverseなimmersed torusをつくり, これのuntwisted spinを考え, 4次元でembedded torusになおしてsurgeryする方法も考えられるが, この場合はできた2-knotもperiodic monodromyをもつため, §0.(0)の方法で構成される2-knotと一致してしまう可能性がある。

§4. Final Remark

§2. の Theorem の仮定の polynomial についての条件 ($☆_0$) でなく, 一般に ($☆$) で成り立つような fibered 2-knot を構成するために, §0. (2) の構成法を応用することが考えられる。 すなわち, $h : F_m \to F_m$ を rank m の free group F_m の automorphism で, §0. (2) の条件 (i) (ii) に加え, 次の条件 (iii) も満たすものとする:

(iii) h は 1 ではない fixed point γ ($\gamma \in F_m$, $h(\gamma) = \gamma$) をもち, $\pi_1(V_m) \cong F_m$ で γ を represent する simple closed curve $\bar{\gamma}$ を $\partial V_m \cong \#_m S^2 \times S^1$ にとると, $S^4 = (\#_m S^2 \times S^1)^0 \underset{\bar{h}}{\times} S^1 \cup S^2 \times D^2$ 内に embedded torus $T_{\bar{\gamma}} = \bar{\gamma} \underset{\bar{h}}{\times} S^1$ がとれるが, この $T_{\bar{\gamma}}$ が S^4 の中で unknotted であるようにできる。(V_m, $\bar{h}$ 等については §0 (2) 参照)

このとき, §0 (2) の方法で構成した fibered 2-knot に対して, §2. と同様に $T_{\bar{\gamma}}$ に沿って "equivariant Dehn surgery" をすることによって新らしい fibered 2-knot が得られる。

ところが $\det(tI - h_*)$ が ($☆$) を満たすような h は, あまり fixed point を持たないことが知られている。(c.f. [G-T], [G], [S]) とくに, 次のような予想がある。

$m \times m$-integer matrix で determinant が ± 1, 固有値を $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ とするとき, $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_i| < 1$ ($i = 2, \cdots m$) をみたすものを "P-V matrix" といい, automorphism $h : F_m \to F_m$ に対して

abel化 $h_*: \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^m$ が P-V matrix となるとき h を"P-V automorphism"という。Stallings [S] は「rank が3以上の P-V automorphism の fixed point は1だけである」という予想をした。具体的に与えられた automorphism に対して fixed point を求める方法は知られている [G] が，一般にはこの予想は未解決である。もしこの予想が正しければ，P-V matrix の characteristic polynomial となるような polynomial に対しては，上に述べたような構成法は使えないことがわかる。条件（☆）を満たし，かつ (i)(ii)(iii) をも満たす polynomial を characteristic polynomial として持つような free group の automorphism はまだ見つかっていない。したがってこの構成法で新らしい fibered 2-knot ができるかどうかは不明である。

References

[A-C] J.J. Andrews & M.L. Curtis
Free Groups and Handle Bodies, Proc. Amer. Math. Soc. 16, (1965) 192-195

[A-Y] K. Asano & K. Yoshikawa
On Polynomial Invariants of Fibered 2-knots. Pacific J. of Math. 97, 2, (1981) 267-269

[B] W.R. Brakes
Property R and Superslices. Quart. J. Math. Oxford

(2) 31 (1980) 263-281

[G] S. M. Gersten

On Fixed Points of Certain Automorphisms of Free Groups.

Proc. London Math. Soc. (3). 48 (1984) 72-90

[G-T] R. Z. Goldstein & E. C. Turner

Automorphisms of Free Groups and Their Fixed Points.

Inv. Math. 78, 1-12 (1984)

[H-K] F. Hosokawa & A. Kawauchi

Proposals for Unknotted Surfaces in Four-spaces.

Osaka J. Math. 16 (1979) 233-248

[L] R. A. Litherland

Deforming Twist-spun Knots. Trans. Amer. Math. Soc.

250, (1979) 311-331

[M] J. M. Montesinos

On Twins in the 4-sphere I, II. Quart. J. Math.

Oxford. 34, 171-199, 35, 73-83 (1983, 4)

[P] S. P. Plotnick

Fibered Knots in S^4 — twisting, spinning, rolling, surgery,

and branching. Four manifold theory, A.M.S. Contemporary

Math. (1982) 437-460

[S] J. R. Stallings

Topologically Unrealizable Automorphisms of Free Groups.
Proc. of Amer. Math. Soc. (1) 84 (1982) 21-24
[T] W. P. Thurston
A Norm for the Homology of 3-manifolds. Preprint.
[Z] E. C. Zeeman
Twisting Spun Knots. Trans. Amer. Math. Soc. 115
(1965) 471-495