数理解析研究所講究録
第575巻 1985年 231-240

基本群で分類できる 3-branchfold の 或る class.

九大理学部　竹内 義浩 (Yoshihiro Takeuchi)

Xを連結、可分なn次元距離空間、bをXから自然数$\mathbb{N}$への関数とする。

<u>定義.</u> (X, b) が orbifold とは、任意の点$x \in X$に対して、xの開近傍X_xと直交群O(n)の有限部分群G_xが存在して、$X_x \cong \mathbb{R}^n / G_x$ かつ 任意の点$z \in X_x$に対して、$b(z) = \# G_x(z)$となる時をいう。但し、$G_x(z)$はG_xにおけるzの isotropy subgroup を表す。

特に、Mを連結, 第2可算 n次元多様体とし、GをM上に真性不連続に作用する群で次の条件(*)を満たすものとする。

(*) 任意の点$z \in M$ に対して、G(z)-不変な開近傍 M_z とO(n)の有限部分群G_z'が存在して、$(M_z, G(z)) \cong (\mathbb{R}^n, G_z')$ となる。

この時、$X = M/G$,
$$\begin{array}{cccc} b: & X & \to & \mathbb{N} \\ & \Psi & & \Psi \\ & x & \to & \# G(z) \end{array} \quad (\text{但し、} G \cdot z = x.)$$

とすると (X, b) は orbifold となる。

Orbifold (X, b) に対し上記のような (M, G) が存在する時，(X, b) は uniformizable と言い (M, G) を (X, b) の uniformization と言う。

Σ_X を $\{x \in X \mid b(x) \geqq 2\}$ なる集合、$\Sigma^{(i)}_X$ を Σ_X の i 次元 stratum 全体の集合とする。

dim $X = n$ とすると $\Sigma^{(n-1)}_X = \phi$ の時 (X, b) を branchfold と言う。

次のように、定義する。

$X_0 := X - \Sigma_X.$

$\Omega(X, b)$
$:= \{\mu_j \mid \mu_j$ は l_j のまわりの normal loop. $l_j \in \Sigma^{(n-2)}_X\}$

$H := \pi_1(X_0).$

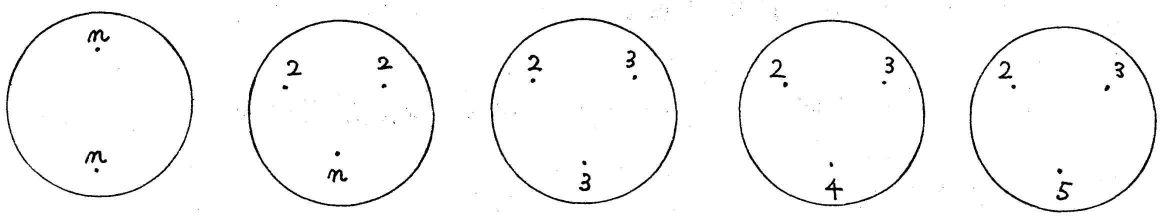
$H\langle\mu^b\rangle := \{\mu_j^{b_j} \mid \mu_j \in \Omega(X, b)\}$ を含むHの最小の正規部分群

但し，$b_j = b(l_j).$

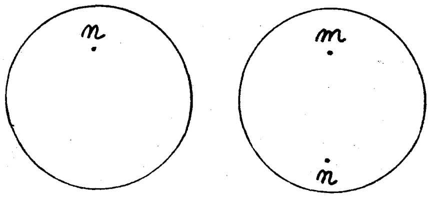
$(\hat{M}, \hat{G})$ を (X, b) の universal uniformization とする時，

$\pi_1(X, b) := \hat{G}$ であるが，これは $H / H\langle\mu^b\rangle$ と一致する。

elliptic spheres

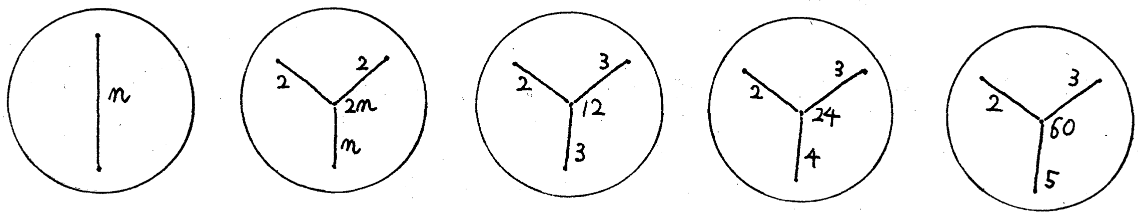


bad spheres



$m \neq n$

elliptic spheres 上の cone C (S^2, a)



以後 X として compact 3-manifold M のみを考え 3-branchfold (M, b) についてのみ考察する。

<u>定義.</u> (M, b) が irreducible とは (M, b) 内の任意の elliptic sphere がそれ上の cone を bound する時を言う。

以後 $f:(M,b)\to(N,c)$ と書いて次のような map とする。

(1) $f: M\to N$ は連続写像。

(2) 任意の $x\in X$ に対し、$c(f(x))$は$b(x)$を割り切る。

以下の事実が成り立つ。

☆ $f_*:\pi_1(M,b)\to\pi_1(N,c)$ なる準同型が well-defined.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M,b) & \to & \pi_1(N,c) \\ \Cup & & \Cup \\ [\sigma] & \to & [f\cdot\sigma] \end{array}$$

☆ f と g が homotopic ならば $f_*=g_*$.

☆ $f(M_0)\subset N_0$ ゆえ $(f\mid M_0):M_0\to N_0$,

$$(f\mid M_0)_\#:\ \pi_1(M_0)\to\pi_1(N_0)$$

が well-defined また,

f と g が homotopic ならば $(f\mid M_0)_\#=(g\mid M_0)_\#$.

<u>定義.</u> $f:(M,b)\to(N,c)$ に対して、次のように定義する。

f が proper とは任意の $x\in X$ に対して $c(f(x))=b(x)$となる時をいう。

f が normal とは任意の $\mu\in\Omega(M,b)$に対して、ある $\nu\in\Omega(N,c)$ が存在して $f(\mu)$と ν が N_0 で free homotopic となる時をいう。

f が embedding とは、$f: M\to N$ が embedding かつ f は proper である時をいう。

f が isomorphism とは、f: M → N が homeomorphism かつ f は proper である時をいう。

f が covering とは f: M → N が covering かつ f は proper である時をいう。

<u>定理.</u> (S^2, a) を an elliptic sphere とし、(M, b) を bad sphere を ふくまない 3-branchfold とする。

f: (S^2, a) → (M, b) を proper, normal かつ cone $C(S^2, a)$ に拡張できない map とするならば、ある elliptic sphere $(S^{2'}, a')$ と $C(S^{2'}, a')$ に拡張できない normal embedding g: $(S^{2'}, a')$ → (M, b) が存在する。

次の事実が成り立つ。

☆ (S^2, a) を elliptic sphere とし、(M, b) を irreducible 3-branchfold とする時、任意の normal かつ proper な map

f: (S^2, a) → (M, b) は $C(S^2, a)$ に拡張できる。

<u>定義.</u>　(M, b), (N, c) を 3-branchfold とする。準同型

$\phi : \pi_1(M_0) \to \pi_1(N_0)$ が

normalとは、任意の$\mu \in \Omega(M, b)$に対して、ある$\nu \in \Omega(N, c)$が存在して、$\phi([\mu]) = [\nu]$ in $\pi_1(N_0)$ となる時をいう。

properとは、任意の$\mu \in \Omega(M, b)$に対して、$\phi([\mu])$の $\pi_1(N, c)$ における order = $[\mu]$の $\pi_1(M, b)$ における order となる時をいう。

次の事実が成り立つ。

☆ ϕ が proper $\Leftrightarrow$ 準同型$\overline{\phi}$; $\begin{array}{ccc} \pi_1(M, b) & \to & \pi_1(N, c) \\ \Psi & & \Psi \\ \overline{\sigma} & \to & \overline{\phi \circ \sigma} \end{array}$

が well-defined.

<u>命題.</u>　(M, b) を uniformizable な 3-branchfold とし (N, c) を uniformizable かつ irreducible な 3-branchfold とする。

$\phi : \pi_1(M_0) \to \pi_1(N_0)$ を proper かつ normal な準同型とすると proper かつ normal な map $f : (M, b) \to (N, c)$ が存在して、$(f \mid M_0)_{\#} = \phi$ かつ $f_* = \overline{\phi}$ が成り立つ。

<u>定理.</u>　(F, b), (G, c) を uniformizable な 3-branchfold とする。$f : ((F, b), \partial(F, b)) \to ((G, c), \partial(G, c))$ は normal map で、f_*と$(f \mid F_0)_\#$は、単射であるとする。このとき a), b) または c) のいずれかが成り立つ。

a) homotopy $f_t : ((F, b), \partial(F, b)) \to ((G, c), \partial(G, c))$ が存在して、$f_0 = f$ かつ f_1 は covering.

b) (F, b) = an annulus.

c) $(F, b) = S^2(n, n)$.

<u>定義.</u>　ω は 次の条件を みたす 3-branchfold (M, b) の class とする。

1) $\Sigma_M^{(1)} \neq \phi$.

2) (M, b) は irreducible.

3) (M, b) は uniformizable.

4) $\partial(M, b)$ の 任意の component (F, b) に対して

$$\mathrm{Ker}(i_* : \pi_1(F, b') \to \pi_1(M, b)) = 1.$$

5) $\partial(M - U(\Sigma_M))$ は incompressible.

<u>定義.</u> $f:(M, b) \to (N, c)$ が fully normal とは、任意の $\nu \in \Omega(N, c)$に対して、ある$\mu \in \Omega(M, b)$が存在して、$f(\mu)$ と ν が N_0 で free homotopic となる時をいう。

<u>定理.</u> (M, b), (N, c) を ω に属する 3-branchfolds とする。$f:((M, b), \partial(M, b)) \to ((N, c), \partial(N, c))$ を fully normal な map で, f_* と $(f \mid M_0)_\#$ は 単射 かつ $f(\partial(M, b)) = \partial(N, c)$ とする時 a) または b) が成り立つ。

a) covering $g:(M, b) \to (N, c)$ が存在して、$g_* = f_*$ かつ $(g \mid M_0)_\# = (f \mid M_0)_\#$.

b) $M - U(\Sigma_M) =$ a closed surface $\times$ I.

<u>定義.</u> (M, b), (N, c) を 3-branchfold とする。準同型 $\phi: M_0 \to N_0$ が fully normal とは、任意の$\nu \in \Omega(N, c)$に対してある$\mu \in \Omega(M, b)$が存在して、$f_*([\mu]) = [\nu]$ in $\pi_1(N_0)$ となる時をいう。

<u>定義.</u> 準同型 $\phi : \pi_1(M, b) \to \pi_1(N, c)$ が

peripheral であるとは $\partial(M, b)$ の任意の component (F, b') に対して、$\partial(N, c)$ のある component (G, c') と $\pi_1(G, c')$ のある subgroup A が存在して、$\phi(i_* \pi_1(F, b'))$ と $j_*(\pi_1(G, c'))$ が $\pi_1(N, c)$ で共役となる時をいう。

fully peripheral であるとは、ϕ は peripheral かつ、$\partial(N, c)$ の任意の component (G, c') に対して、$\partial(M, b)$ のある component (F, b') が存在して、$\phi(i_* \pi_1(F, b'))$と $j_*(\pi_1(G, c'))$が $\pi_1(N, c)$ で共役となる時をいう。

<u>系.</u> (M, b), (N, c) を ω に属する 3-branchfolds とする。

fully normal かつ proper な 同型 $\phi : \pi_1(M_0) \to \pi_1(N_0)$ が存在して、$\phi : \pi_1(M, b) \to \pi_1(N, c)$ が fully peripheral な同型となる時、isomorphism $f : (M, b) \to (N, c)$ が存在する。

参 考 文 献

[1] J.Hempel, 3-manifolds, Annals of Math. Studies No.86.

[2] M.Kato, On proper transformation groups on manifolds, Preprint.

[3] W.Thurston, The geometry and topology of three manifolds, Mimeograph.

[4] F.Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficientry large, Annals of Math. 87(1968) 56-88.