数理解析研究所講究録
第575巻 1985年 241-252

三次元開多様体の芯

広島大理 垣水修 (Osamu Kakimizu)

non-compact 3-mfd について，つぎの P. Scott の結果があります：

Theorem (P. Scott [7, 8]). W^3: non-compact 3-mfd s.t. $\pi_1(W)$: 有限生成

$\Longrightarrow$ $W \supset {}^{\exists}N^3$: compact 3-submfd s.t.
$\pi_1(N) \xrightarrow[\cong]{} \pi_1(W)$.

この定理をもとに non-compact 3-mfd について調べてみたことを述べます．以下，

- PL category で論じる，
- "3-mfd" はすべて connected, orientable とする，
- W^3 は，non-compact, irreducible 3-mfd で，

∂W は compact，$\pi_1(W)$ は有限生成であるとする．

Definition. $W \supset N^3$: 3-submfd が W の芯 (core) であるとは、

(1) N : compact, irreducible

(2) $\partial N \supset \partial W$

(3) $\pi_1(N) \xrightarrow[\cong]{} \pi_1(W)$.

• W, N は共に aspherical だから, N は W の deformation retract である.

Theorem 1. W はつねに core をもつ.

証明の方針 Scott の定理から, $\mathrm{Int}\, W \supset {}^{\exists} N_0$ s.t. $\pi_1(N_0) \xrightarrow[\cong]{} \pi_1(W)$ となる. この N_0 を, irreducible で, $\partial N \supset \partial W$ となるものでとり直すことを考える. irreducible な N_0 をとることは容易にできる. ∂W を含むようにとるためには, まず ∂W の各 compo. が incompressible のときを考える. irreducible な N_0 の性質をいくつかしらべておく (cf. Prop. 2). $U \subset W - \mathrm{Int} N_0$ を $U \cap \partial W \neq \emptyset$ なる compo. とする. このとき, $F = U \cap N_0$ は ∂N_0 のひとつの compo. で, $T = U \cap \partial W$ も ∂W のひとつの compo からなり, U が compact になることが示せる. さらに $U \approx F \times [0,1]$ となる. これか

ら，∂Wの各compo Tに対して，Tを含む $W-\mathrm{Int}\,N_0$ のcompoをV_Tとすると，$V_T \approx T\times[0,1]$で，$N=N_0 \cup \bigcup_{\partial W\supset T:\mathrm{compo.}} V_T$ とおけば，求めるcoreになる．

∂Wがcompressibleなcompoをもつときは，Wを，有限個のproperly embeddedなdisjoint disksで切って，各compoがincompressibleなboundaryをもつようにする．この各compoのcoreをとり，つなげれば，Wのcoreが得られる．□

Proposition 2. $W\supset N$をcoreとし，$\mathrm{Cl}(W-N)\supset V$をひとつのcompo.とすると，

(1) $\partial V = V\cap N$は∂Nのひとつのcompoからなる．

(2) Vのendの数はひとつ．

(3) さらに，∂VがWでincompressibleならば，∂VはVのdeformation retractである．

(4) $\pi_1(W)$：indecomposable $(\neq 0, \mathbb{Z})$のとき，∂Nの各compoはWでincompressible．

証明　(1) $V\cap N$が∂Nのふたつ以上のcompoからなるとし，そのひとつをFとする．$\mathrm{Int}\,W$のs.c.c. Jで，$J\cap F=\{a\}$，JとFはaでtransverseに交わるものがとれる．一方，

$\pi_1(N) \xrightarrow[\cong]{} \pi_1(W)$ から，J は $\mathrm{Int}\,N$ 内の s.c.c. に homotopic である．したがって，J と F との intersection number を考えれば矛盾．

(2) $W' = \mathrm{Cl}(W-N)$ とおく．$W' \cup N = W$, $W' \cap N = \mathrm{Fr}\,N$.
D.B.A. Epstein [1] から，W' の end の数は $\dim_{Z_2} H_e^0(W'; Z_2)$ に等しい．

$$
\begin{array}{ccccccc}
H_c^0(W') & \longrightarrow & H^0(W') & \longrightarrow & H_e^0(W') & \longrightarrow & H_c^1(W') \\
\wr\| & & & & & & \wr\| \\
H_3(W', \partial W') & & & & & & H_2(W', \partial W') \\
\wr\| & & & & & & \wr\| \\
H_3(W, N) = 0 & & & & & & H_2(W, N) = 0
\end{array}
$$

これから U はちょうどひとつの end をもつことがわかる．

(3) Van Kampen の定理からわかる．

(4) は，つぎの事実からわかる：

M^3 : compact irreducible 3-mfd について，
$\pi_1(M)$: indecomposable $(\neq 0, Z)$
$\Longleftrightarrow$ ∂M の各 compo が incompressible. □

Theorem 3. $\pi_1(W)$: indecomposable $(\neq Z)$ のとき，N_0, N_1 を W のふたつの core とすると，isotopy $h : W \times [0,1] \to W$ で，$h_0 = \mathrm{id}$, $h_1(N_0) = N_1$, $h_t | (W-K) \cup \partial W = \mathrm{id}$ （K は W の compact polyhedron） となるものがある．

• $\pi_1(W)$ が $\mathbb{Z}$ または decomposable のときは，Th. 3 は成りたたない．しかし，一般につぎのことはいえる：

Theorem 4. $W \supset N_0, N_1$ をふたつの core とする

$$\Longrightarrow \quad N_0 \approx N_1 .$$

Th. 3, 4 を示すためには，つぎの定理が必要となる．

Theorem 5. M^3 : compact, irreducible 3-mfd.
$M \supset N_0, N_1$: compact, irreducible 3-submfds s.t.
$N_0 \cap \partial M = N_1 \cap \partial M$ ($= \emptyset$ 可) は，∂M のいくつかの compo からなり，inclusion $\alpha_i : N_i \hookrightarrow M$ に対して，

$$(\alpha_i)_* : \pi_1(N_i) \longrightarrow \pi_1(M) \text{ mono } (i = 0, 1).$$

さらに，$\mathrm{Im}(\alpha_0)_*$ と $\mathrm{Im}(\alpha_1)_*$ が $\pi_1(M)$ で conjugate で，
$\pi_1(N_0) \cong \pi_1(N_1)$: indecomposable ($\neq \mathbb{Z}$).

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} \exists h : M \times [0,1] \longrightarrow M \text{ isotopy s.t.} \\ h_0 = id,\ h_1(N_0) = N_1,\ h_t | \partial M = id. \end{array}$$

証明の方針　まず，証明に用いるふたつの定理をあげておく．

Theorem (J. Simon [9], W.H. Jaco [3]).

M^3 : compact, irreducible 3-mfd. $M \supset N^3$: compact, irreducible 3-submfd s.t. $N \cap \partial M$ は ∂M のいくつかの compo からなり, $N \cap \partial M$ および $\mathrm{Fr}\, N = \partial N - (N \cap \partial M)$ は M で共に incompressible とする. このとき, $\tilde{M} \xrightarrow{p} M$ を M の covering で, $p_* \pi_1(\tilde{M}) = \pi_1(N)$ となるものとすると, $\tilde{M}$ の mfd compactification が存在する. i.e.

$\exists \hat{M}$: compact, irreducible 3-mfd, $\partial M \supset X$: compact set s.t. $\tilde{M} = \hat{M} - X$.

Theorem (F. Waldhausen [11 , Prop. 5.4]).

M^3 : compact, irreducible 3-mfd.

$\mathrm{Int}\, M \supset F, G$: 2-sided incompressible closed surfaces, s.t. F と G は transverse に交わり, $F \cap G$ は disjoint な circles で, その各 compo は F で (したがって G で) essential とする. このとき,

$\exists f : F \times [0,1] \longrightarrow M$ homotopy s.t. $f_0 = id$, $f(F \times 1) \subset G$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} F \supset \exists F' : \text{subsurface}, \ \exists e : F' \times [0,1] \to M \text{ embedding} \\ \text{s.t. } e_0 = id, \ F' \cap G = \partial F', \ G' \cap F = \partial G' \\ G' \equiv e(F' \times 1 \cup \partial F' \times [0,1]) \subset G . \end{array}$$

このふたつの定理を用いて, Th. 5 の証明をつぎのような

方針でおこなう．まず，M の isotopy(rel ∂M) で，N_0 を動かして，$\partial N_0 \cap \partial N_1$ は disjoint な circles からなり，その circles の個数が最小であるようにする．簡単のため N_0, N_1 は $\mathrm{Int}\, M$ 内にあるとする．$p : \tilde{M} \longrightarrow M$ を covering で，$p_* \pi_1(\tilde{M}) = \pi_1(N_1)$ なるものとすると，上記の Simon の定理から，$\tilde{M} = \hat{M} - X$ s.t. $\hat{M}$: compact, irreducible 3-mfd $\partial \hat{M} \supset X$: compact subset．となる．このとき N_1 の lift を $\hat{N}_1$ とすると，$\hat{M} = \hat{N}_1 \cup \partial \hat{N}_1 \times [0,1]$ とみなせる．$\mathrm{Im}(\alpha_0)_*$ と $\mathrm{Im}(\alpha_1)_*$ とが $\pi_1(M)$ で conjugate なことから，N_0 の lift $\hat{N}_0$ が存在する．さらに $\hat{N}_0$ は $\hat{M}$ の deformation retract になっている．このことから，isotopy $\hat{g} : \hat{M} \times [0,1] \longrightarrow \hat{M}$ s.t. $\hat{g}_0 = id$, $\hat{g}_1(\hat{N}_0) = \hat{N}_1$ の存在がいえる．さらに，この $\hat{g}$ を用いて，homotopy $g : N_0 \times [0,1] \longrightarrow M$ s.t. $g_0 = id$, $g_1 : N_0 \approx N_1$ となるものが得られる．$\partial N_0 = A_1 \cup \cdots \cup A_m$, $\partial N_1 = B_1 \cup \cdots \cup B_m$, $B_i = g_1(A_i)$ とおく．このとき，つぎを示す．

$A_i \cap B_i = \emptyset \quad (\forall i)$.

A_i と B_i は $C_i = A_i \times [0,1]$ を M で bound している．

$C_i \cap A_j = \emptyset = C_i \cap B_j \quad (\forall i \neq j)$

これらの証明に上記の Waldhausen の定理を用いる．これから，M の isotopy $\{h_t\}$ で，$h_1(A_i) = B_i \ (\forall i)$ とできる．さらにこのとき，$h_1(N_0) = N_1$ となっている．$\square$

Corollary. Th.5は，Mがnon-compactでも成りたつ．

• Th.3は，このcorollaryから直ちにわかる．

Th.4の証明の方針　$\pi_1(W)$がfree groupならば，N_0とN_1はgenusの等しいhandlebodyである．そこで，

$$\pi_1(W) \cong G_1 * \cdots * G_n * \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{r\text{コ}} \qquad \begin{array}{l} G_i : \text{indecomposable} \neq \mathbb{Z} \\ n \geq 1,\ r \geq 0 \end{array}$$

と仮定する．このとき，N_0内のproper disjoint disks $\{D_j\}$およびN_1内のそれ$\{E_j\}$でつぎをみたすものがとれる．

$$N_0 - \bigcup_j D_j \times (-1,1) = L_1 \cup \cdots \cup L_n,$$
$$N_1 - \bigcup_j E_j \times (-1,1) = M_1 \cup \cdots \cup M_n, \quad \text{s.t.}$$

L_i, M_iはcompact, irreducible 3-mfds，
$\pi_1(L_i) \cong G_i \cong \pi_1(M_i)$，$\pi_1(L_i)$と$\pi_1(M_i)$は$\pi_1(W)$で互いにconjugate．

これからまず，isotopy $h : W \times [0,1] \longrightarrow W$で$h_0 = id$，$h_1(L_i) = M_i$ $(\forall i)$となるものの存在を示し，つぎに$\bigcup_i L_i$と$\bigcup_i M_i$にattachされている1-handles$\{D_j \times [-1,1]\}$，$\{E_j \times [-1,1]\}$のattachのされかたをみて$N_0 \approx N_1$を示す．

isotopy hの構成は帰納法による．まずTh.5から，isotopy $h^{(1)} : W \times [0,1] \longrightarrow W$で$h^{(1)}_0 = id$，$h^{(1)}_1(L_1) = M_1$とな

るものがある．このとき $h_1^{(1)}(N_0), h_1^{(1)}(L_1), \cdots, h_1^{(1)}(L_n)$ は N_0, $L_1, \cdots, L_n$ と同様の性質をもつから，簡単のため $h_1^{(1)}(N_0)=N_0$, $h_1^{(1)}(L_i)=L_i$ とする．i.e. $L_1=M_1$ であったとする．このとき，つぎがわかる： L_2 と M_2 は $W-L_1$ の同一の compo に入る．その compo を W_2 とすると，$\pi_1(L_2)$ と $\pi_1(M_2)$ は $\pi_1(W_2)$ で conjugate になる．したがって Th. 5 から，isotopy $h^{(2)}: W\times[0,1]\longrightarrow W$ で $h_0^{(2)}=id$, $h_1^{(2)}(L_2)=M_2$, $h_t^{(2)}|M_1=id$ となるものがある．以下帰納的に isotopy h を得る．

h の存在から，$L_i=M_i\subset W$ $(\forall i)$ と仮定してよい．$N_0\approx N_1$ を示すには，各 compo $F\subset\partial N_0$ に対して，$F\cap G\neq\emptyset$ となる ∂N_1 の compo が唯一つあるから，$F\approx G$ を示せばよい．W の end を $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k$ とする．$Cl(W-N_i)=A_1^i\cup\cdots\cup A_k^i$，$A_j^0$ と A_j^1 の end は ε_j とする．このとき，$\partial A_j^0\approx\partial A_j^1$ を示せばよい．これは

$$H^1(\partial A_j^0)\xleftarrow[\cong]{}H^1(A_j^0)\xrightarrow[\cong]{}H^1(\varepsilon_j)\xleftarrow[\cong]{}H^1(A_j^1)\xrightarrow[\cong]{}H^1(\partial A_j^1)$$

を示すことによってわかる．□

Theorem 6. $\pi_1(W)$: indecomposable $(\neq\mathbb{Z})$ のとき，

$W=\bigcup_i V_i^3$ s.t.

(1) $W\supset V_i$: compact, irreducible 3-submfd

(2) $V_i\subset V_{i+1}-\mathrm{Fr}\,V_{i+1}$

(3) $V_i = N_i \cup$ (1-handles) s.t.

N_i は W_i の core， $N_i \subset N_{i+1} - \mathrm{Fr}\, N_{i+1}$

$\mathrm{Cl}(N_{i+1} - N_i) \approx \mathrm{Fr}\, N_i \times [0, 1]$.

• Th. 6 で，$\pi_1(W) = 0$ のときは，つぎの McMillan, Jr. の定理 [5] になります：

“ irreducible contractible open 3-mfd は，handlebody の増大列の union として表わせる。”

Th. 6 の証明に必要な lemma をひとつあげておく．

Lemma. U : irreducible 3-mfd，
∂U : connected $(\neq S^2)$，$\pi_1(\partial U) \xrightarrow[\cong]{} \pi_1(U)$． このとき，
$\mathrm{Int}\, U \supset F$: 2-sided incompressible closed surface
$\Longrightarrow$ F : parallel to ∂U.

Th. 6 の証明の方針　$W \supset N$ を core とすると，Prop. 2 から，$\mathrm{Cl}(W - N) \supset U$ compo に対して，U は irreducible 3-mfd $\partial U = U \cap N$ は ∂N のひとつの compo，$\partial U \xrightarrow{\cong} U$，$U$ の end の数はひとつである．各 U に対して Th. 6 を示せばよい．

まずつぎがいえる：

• $\mathcal{U}=\bigcup_i K_i$ s.t.

(1) $\mathcal{U}\supset K_i$: compact, irreducible 3-submfd

(2) $\partial K_i\supset\partial\mathcal{U}$, $Fr K_i=\partial K_i-\partial\mathcal{U}$: connected

(3) $K_i\subset K_{i+1}-Fr K_{i+1}$.

つぎに，$V_0=K_0$ とおき，$V_0,\cdots,V_{m-1}$ まで得られたとして，V_m を作ろう． $V_{m-1}\subset K_m-Fr K_m$ としてよい．帰納法の仮定から，$V_{m-1}=N_{m-1}\cup$(1-handles)，N_{m-1} は $\partial\mathcal{U}$ の collar.
$\mathcal{U}'=Cl(\mathcal{U}-N_{m-1})$，$K'=Cl(K_m-N_{m-1})$ とおく． K' に $\mathcal{U}'$ のなかで cut and paste をそれ以上はおこなえなくなるまでほどこし，K' から K^* を得たとする．$Cl(\mathcal{U}'-K^*)$ の唯一の non-compact compo を Y とし，$N'=Cl(\mathcal{U}'-Y)$ とおく．
$N'\cap Y$ は K^* のひとつの compo で $\mathcal{U}'$ のなかで incompressible であり，したがって上記の lemma から N' は $\mathcal{U}'$ における $\partial\mathcal{U}'$ の collar である．$N_m=N_{m-1}\cup N'$ とおくと $\partial\mathcal{U}$ の collar になる． ここで，K' から K^* を得た process を考えると， $K'\subset K^*\cup$(1-handles)$\subset N'\cup\bigcup_i H_i$ (H_i : 1-handle) となっていることがわかる．したがって，

$V_m=N_m\cup\bigcup_i H_i$ とおけばよい．□

References

[1] D.Epstein : Ends, Topology of 3-Manifolds and Related Topics, ed. M.K.Fort (Prentice-Hall, 1962), 110-117.

[2] D.E.Galewski, J.G.Hollingsworth and D.R.McMillan,Jr. : On the fundamental group and homotopy type of open 3-manifolds, Gener. Top. and its Appl. 2 (1972), 299-313.

[3] W.H.Jaco : Lectures on Three-Manifold Topology, AMS Regional Conference Series in Math. 43 (1980).

[4] D.McCullough : Compact submanifolds of 3-manifolds with boundary (preprint, 1985).

[5] D.R.McMillan, Jr. : Cartesian product of contractible open manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 510-514.

[6] ——— : Some contractible open 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. lo2 (1962), 373-382.

[7] G.P.Scott : Finitely generated 3-manifold groups are finitely presented, J. London Math. Soc. 6 (1973), 437-440.

[8] ——— : Compact submanifolds of 3-manifolds, J.London Math. Soc. 7 (1973), 246-250.

[9] J.Simon : Conpactifications of covering spaces of compact 3-manifolds, Michigan Math. J. 23 (1976), 245-256.

[10] T.Tucker : Non-compact 3-manifolds and the missing -boundary problem, Topology 13 (1974), 267-273.

[11] F,Waldhausen : On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. 87 (1968), 56-88.

[12] J.H.C.Whitehead : A certain open manifold whose group is unity, Quart. J. Math. Oxford 6 (1935), 268-279.