数理解析研究所講究録
第 576 巻 1985 年 10-33

四元数対称空間の四元数部分多様体

東京学芸大　田崎博之 (Hiroyuki Tasaki)

Kähler多様体におけるWirtinger不等式に類似な不等式が四元数Kähler多様体においても成立する。その結果，四元数Kähler多様体内において四元数部分多様体は極小安定になり，さらにコンパクト四元数部分多様体はそれが代表するホモロジー類の中で体積最小になる。そこで，四元数Kähler多様体の典型的なクラスである四元数対称空間において，四元数部分多様体の分類を考える。この分類を複素単純Lie環の指数1の複素単純部分環の分類に帰着させ，古典型の場合にこの分類を完全に行う。また，コンパクト四元数対称空間内の四元数部分多様体が代表するホモロジー類についても若干の考察をする。

1. 四元数Kähler多様体の四元数部分多様体

$4n$次元連結Riemann多様体Mは，Mのある点xにおけるMの

接空間$T_x(M)$と$\mathbb{H}^n$との同一視を通して，Mのxでの線形ホロノミー群が$Sp(n)Sp(1)$に含まれるとき，四元数Kähler多様体と呼ばれる。このとき，Mの各点y及びxとyを結ぶ区分的に可微分な曲線τに対して，τに沿った平行移動をP_τとし，

$$S_y = P_\tau\, Sp(1)\, P_\tau^{-1}$$

とおく。S_yはτの選び方によらず，yのみで定まる。この$S=\{S_y\}_{y\in M}$をMの四元数構造と呼ぶ。M内の連結部分多様体Nは，Nの各点yに対して$T_y(N)$がS_y-不変であるとき，四元数部分多様体と呼ばれる。四元数Kähler多様体の四元数部分多様体は全測地的になることが，Alekseevskii[1]によって示されている。

Krainesは四元数Kähler多様体上に基本4次形式Ωを定義し，四元数Kähler多様体のコホモロジー群に関する性質を[6]で示している。ここでは，ΩをKrainesとは少し異なった方法で定義しておく。$\langle\,,\rangle$を$\mathbb{H}^n$上の標準的な正定値内積とし，X, $Y\in\mathbb{H}^n$に対して，

$$\Omega_I(X,Y)=\langle Xi,Y\rangle$$

とおいて，$\mathbb{H}^n$上の2次交代形式Ω_Iを定める。$\int_{Sp(1)}$を$Sp(1)$上の不変積分で$\int_{Sp(1)}1=1$となるものとする。

$$\Omega=\int_{z\in Sp(1)} z^*\Omega_I^2 \qquad \left(z^*\Omega_I^2(X,Y,Z,W)=\Omega_I^2(Xz,Yz,Zz,Wz)\right)$$

によって$\mathbb{H}^n$上の4次交代形式Ωを定めると，Ωは$Sp(n)Sp(1)$の

作用に関して不変になる。よって$\mathbb{H}^n$と$T_x(M)$との同一視を通して，ΩはM上の平行4次形式に拡張される。これもΩで表わし，Mの基本4次形式と呼ぶ。Ωは平行だから，特に閉形式になる。このΩに関して，次のようなKähler多様体上のWirtinger不等式の類似が成立する。

定理1　Mを四元数構造がSの四元数Kähler多様体とし，ΩをMの基本4次形式とする。このとき，M上の向きのついた$4m$次元の接部分空間ξに対して，

$$\frac{1}{m!}\Omega^m\Big|_\xi \leqq \mathrm{vol}_\xi$$

が成り立つ。等号成立の必要十分条件は，ξがS-不変であり適当な向きを持つことである。

この定理の証明は，等式

$$\frac{1}{m!}\Omega^m = \frac{1}{(2m)!}\int_{z\in Sp(1)} z^*\Omega_I^{2m}$$

に注目して，右辺の被積分関数にWirtinger不等式を使うことによって得られる(Tasaki [10])。

また，$\frac{1}{m!}\Omega^m$がHarvey-Lawson [4]の定義したcalibrationになっていることを定理1は示している。このことから次の定理が成り立つ。

定理2　Mを四元数Kähler多様体とし，Nをその四元数部分多様体とすると，Nは極小安定部分多様体になる。さらにNがコンパクトのときは，Nと同じホモロジー類に属するコ

ンパクトで向きのついた部分多様体N'に対して，

$$\mathrm{vol}(N) \leqq \mathrm{vol}(N')$$

が成り立ち，等号成立の必要十分条件は，N'もまた四元数部分多様体になることである。

<u>証明</u>　ΩをMの基本4次形式とする。コンパクトな$4m$次元四元数部分多様体Nと，Nと同じホモロジー類に属するコンパクトで向きのついた部分多様体N'に対して，

$$\mathrm{vol}(N)=\int_N \mathrm{vol}_N=\int_N \frac{1}{m!}\Omega^m=\int_{N'}\frac{1}{m!}\Omega^m \leqq \int_{N'}\mathrm{vol}_{N'}=\mathrm{vol}(N')。$$

等号成立の必要十分条件は，$\frac{1}{m!}\Omega^m|_{N'}=\mathrm{vol}_{N'}$となることだから，$N'$が四元数部分多様体になることである。$N$がコンパクトでない場合は，コンパクトな台を持つ変分に対して上と同様の議論を適用すれば，Nが極小安定部分多様体になることがわかる。

2. 四元数対称空間

まず，四元数対称空間を次のように定義する。Riemann多様体Mが次の３つの条件を満たすとき，Mを四元数対称空間と呼ぶ。

i) Mは四元数構造Sを持つ四元数Kähler多様体である。

ii) Mは対称空間である。

iii) Mのある点xに対して，Mのxにおける線形ホロノミー

群はS_xを含む。

<u>注</u>　四元数Kähler多様体になる対称空間で，四元数対称空間にならないものが存在する。例：$S^2\times S^2$.

<u>補題3</u>　M′を四元数対称空間とし，MをM′の$\overbrace{\text{四元数}}^{\text{完備}}$部分多様体とする。このとき，Mもまた四元数対称空間になる。

四元数Kähler多様体の四元数部分多様体が全測地的になることと，対称空間においては1点のイソトロピー群がホロノミー群になることを使えば，補題3はわかる。

次に，Wolf[12]にしたがって，コンパクト単純Lie環からコンパクト四元数対称空間を構成する。

$\mathfrak{g}$を階数が1より大きいコンパクト単純Lie環とし，$\langle , \rangle$を$\mathfrak{g}$上の$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$-不変内積とする。$\mathfrak{g}$の極大Abel部分環$\mathfrak{t}$を1つとると，$\mathfrak{t}$の複素化$\mathfrak{t}^{\mathbf{C}}$は$\mathfrak{g}$の複素化$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$のCartan部分環になる。$\mathfrak{t}$の元$\alpha$に対して，

$$\mathfrak{g}_\alpha=\{X\in\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}\,;\,[H,X]=\sqrt{-1}\langle\alpha,H\rangle X\ ,\ \ H\in\mathfrak{t}\}$$

とおく。$\alpha\in\mathfrak{t}-\{0\}$は，$\mathfrak{g}_\alpha\neq\{0\}$のときルートと呼ばれる。ルートの全体を$\Delta$で表わす。$\mathfrak{t}$に辞書式順序を1つ定め，$\delta$を$\Delta$内の最高ルートとする。$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$は，

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}=\mathfrak{t}^{\mathbf{C}}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha$$

と直和に分解される。

$$\mathfrak{g}_1=\mathbb{R}\delta+\mathfrak{g}\cap(\mathfrak{g}_\delta+\mathfrak{g}_{-\delta})$$

とおくと，$\mathfrak{g}_1$は$\mathfrak{g}$の3次元単純部分環になる。さらに，$\mathfrak{g}_1$に対応する$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$の解析的部分群$G_1$は単連結になり，$Sp(1)$と同型になる。

$$\mathfrak{z}=\{X\in\mathfrak{g}\ ;\ [X,\mathfrak{g}_1]=\{0\}\}$$

とすると，

$$\mathfrak{z}=\{H\in\mathfrak{t}\,;\,\langle\delta,H\rangle=0\}+\mathfrak{g}\cap\Bigl(\sum_{\substack{\alpha\in\Delta\\ \langle\alpha,\delta\rangle=0}}\mathfrak{g}_\alpha\Bigr)$$

となる。また，$\mathfrak{k}=\mathfrak{g}_1+\mathfrak{z}$とおくと，

$$\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}\ ;\ [X,\mathfrak{g}_1]\subset\mathfrak{g}_1\}$$

となることがわかる。$\mathfrak{g}_1$と$\mathfrak{z}$は$\mathfrak{k}$のイデアルになる。$\mathfrak{g}$の内部自己同型sを

$$s=\exp\Bigl(\frac{2\pi}{\langle\delta,\delta\rangle}\delta\Bigr)\in\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$$

として定め，

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{g}\cap\Bigl(\sum_{\substack{\alpha\in\Delta-\{\pm\delta\}\\ \langle\alpha,\delta\rangle\neq0}}\mathfrak{g}_\alpha\Bigr)$$

とおくと，

$$s|_{\mathfrak{k}}=id_{\mathfrak{k}}\ ,\quad s|_{\mathfrak{p}}=-id_{\mathfrak{p}},\quad \mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$$

となるので，$(\mathfrak{g},s)$はコンパクト直交対称Lie代数になる。Kを$\mathfrak{k}$に対応する$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$の解析的部分群とすると，$K$は$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$内で最大階数であり，コンパクト対称空間$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})/K$は単連結になる。$G_1$は$K$の正規部分群だから，平行移動を通して$G_1$は$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})/K$上に四元数構造を定める。また，$G_1\subset K$となっていることから，$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})/K$が四元数対称空間になることがわかる。$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})/$

Kは極大Abel部分環$\mathfrak{a}$や$\mathfrak{a}$上の順序のとり方によらず，$\mathfrak{g}$のみに依存して定まる。

<u>定理4</u>　階数が1より大きいコンパクト単純Lie環$\mathfrak{g}$に対して，上で構成した$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})/K$はコンパクト単連結四元数対称空間になる。逆にコンパクト四元数対称空間はこれらに限る。さらに，ノンコンパクト四元数対称空間はこれらのノンコンパクト双対になる。

この定理の本質的な部分はWolf[12]が示している。あとは，Alekseevskii[1]の結果を組み合せると定理4を得る。

定理4より，コンパクト四元数対称空間の表は次のようになる。

	$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$	階数	次元
$G^{\mathbb{C}}_{2,1}$	$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$	1	4
$G^{\mathbb{C}}_{2,n}$ $(n\geqq 2)$	$\mathfrak{sl}(n+2,\mathbb{C})$	2	$4n$
$G^{\mathbb{R}}_{4,3}$	$\mathfrak{o}(7,\mathbb{C})$	3	12
$G^{\mathbb{R}}_{4,n}$ $(n\geqq 4)$	$\mathfrak{o}(n+4,\mathbb{C})$	4	$4n$
$P^n(\mathbb{H})$	$\mathfrak{sp}(n+1,\mathbb{C})$	1	$4n$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{su}(6)+\mathfrak{sp}(1))$	$\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}}$	4	40
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{o}(12)+\mathfrak{sp}(1))$	$\mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}}$	4	64
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{e}_7+\mathfrak{sp}(1))$	$\mathfrak{e}_8^{\mathbb{C}}$	4	112
$(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{sp}(3)+\mathfrak{sp}(1))$	$\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}}$	4	28

$G_2/SO(4)$	$\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$	2	8

ただし，$G_{2,n}^{\mathbb{C}}=SU(n+2)/S(U(n)\times U(2))$，$G_{4,n}^{\mathbb{R}}=SO(n+4)/SO(n)\times SO(4)$，$P^n(\mathbb{H})=Sp(n+1)/Sp(n)\times Sp(1)$。

今後，コンパクト単純Lie環$\mathfrak{g}$に対して$\langle\ ,\ \rangle$，Δ，$\varDelta$，…等の上で述べた記号を使い，$\mathfrak{g}'$に対しては，$\langle\ ,\ \rangle'$，Δ'，$\varDelta'$，…等を使う。

3．四元数部分多様体の分類問題

$\mathfrak{g}'$を階数が1より大きいコンパクト単純Lie環とし，$M'=\mathrm{Int}(\mathfrak{g}')/K'$を第2節で構成したコンパクト四元数対称空間とする。$I_0(M')$をM'の等長変換全体からなる群の単位元の連結成分とすると，M'の四元数部分多様体を$I_0(M')$の元でうつしたものもまた四元数部分多様体になる。この節では，M'の完備四元数部分多様体の$I_0(M')$-共役類の分類を，$\mathfrak{g}'$の指数1の単純部分環の$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$-共役類の分類に帰着させることを目的とする。

今後コンパクト単純Lie環上の不変内積は，最高ルートδに対して，

$$\langle\delta,\delta\rangle=2$$

となるように正規化したものだけを考える。$\mathfrak{g}$をコンパクト単純Lie環$\mathfrak{g}'$の単純部分環とし，$\iota:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$をその包含写像とする。$\mathfrak{g}$の$\mathfrak{g}'$内における指数$j_\iota$をDynkin[3]にしたがって次の等

式で定義する。

$$j_\iota\langle X,Y\rangle=\langle\iota(X),\iota(Y)\rangle',\quad X,Y\in\mathfrak{g}。$$

Dynkin[3]の定理2.2より，j_ιは正の整数になる。

コンパクト単純Lie環$\mathfrak{g}'$の指数1の単純部分環$\mathfrak{g}$が代表する$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$-共役類を$c(\mathfrak{g})$で表わし，$\mathfrak{g}'$内で指数が1で階数が1より大きい単純部分環の$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$-共役類全体の集合を$\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}')$で表わす。同様に，コンパクト四元数対称空間$M'$の完備四元数部分多様体$M$が代表する$I_0(M')$-共役類を$c(M)$で表わし，$M'$内の完備四元数部分多様体の$I_0(M')$-共役類全体の集合を$\mathcal{C}(M')$で表わす。

まず，$\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}')$から$\mathcal{C}(M')$への写像$\varphi$を構成しよう。$\mathfrak{g}'$内の極大Abel部分環$\mathfrak{t}'$を1つとり固定しておく。$\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}')$の元$a$をとり，その代表元$\mathfrak{g}$を$\mathfrak{g}\cap\mathfrak{t}'$が$\mathfrak{g}$の極大Abel部分環になるようにとる。$\delta$を$\Delta$の最高ルートとすると，$\mathfrak{g}$は$\mathfrak{g}'$における指数が1だからDynkin[3]の定理2.4より，$\iota(\delta)$はΔ'の長いルートになる。したがって，$\iota(\delta)=\delta'$，$\iota(\mathfrak{g}_1)=\mathfrak{g}_1'$としてよい。すると，

$$\iota(\mathfrak{k})\subset\mathfrak{k}',\quad \iota(\mathfrak{p})\subset\mathfrak{p}'$$

が成り立ち，$M=\mathrm{Int}(\mathfrak{g})/K$は$M'=\mathrm{Int}(\mathfrak{g}')/K'$の全測地的部分多様体になる。さらに，$[\mathfrak{g}_1',\iota(\mathfrak{p})]=\iota([\mathfrak{g}_1,\mathfrak{p}])=\iota(\mathfrak{p})$だから，$M$は$M'$の四元数部分多様体になる。そこで，

$$\varphi(a)=c(\mathrm{Int}(\mathfrak{g})/K)\in\mathcal{C}(M')$$

としてφを定義する。

<u>定理5</u>　$\mathfrak{g}'$を階数が1より大きいコンパクト単純Lie環とし，$M'=Int(\mathfrak{g}')/K'$を対応するコンパクト四元数対称空間とする。このとき$\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}')$から$\mathcal{C}(M')$への写像$\varphi$はwell-definedで全単射である。

この定理より，四元数部分多様体の分類問題が指数1の単純部分環の分類問題に帰着する。証明は[11]参照。さらに，次の命題6を使うと，コンパクト単純Lie環内の指数1の単純部分環の分類問題は，複素単純Lie環の指数1の複素単純部分環の分類問題に帰着する。

命題6を述べる前に，まずいくつかの記号を定めておく。$\mathfrak{g}'$をコンパクト半単純Lie環とすると，$\mathfrak{g}'$の複素化$\mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$は複素半単純Lie環になる。$\mathfrak{g}'$の半単純部分環$\mathfrak{g}$が代表する$Int(\mathfrak{g}')$-共役類を$c(\mathfrak{g})$で表わし，$\mathfrak{g}'$の半単純部分環の$Int(\mathfrak{g}')$-共役類全体の集合を$\mathcal{C}(\mathfrak{g}')$で表わす。同様に$\mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$の複素半単純部分環$\mathfrak{s}$が代表する$Int(\mathfrak{g}')$-共役類を$c(\mathfrak{s})$で表わし，$\mathfrak{g}'^{\mathbb{C}}$の複素半単純部分環の$Int(\mathfrak{g}'^{\mathbb{C}})$-共役類全体の集合を$\mathcal{C}(\mathfrak{g}'^{\mathbb{C}})$で表わす。$\mathcal{C}(\mathfrak{g}')$から$\mathcal{C}(\mathfrak{g}'^{\mathbb{C}})$への写像$\psi$を

$$\psi(c(\mathfrak{g}))=c(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$$

で定義すると，次の命題が成り立つ。

<u>命題6</u>　$\mathfrak{g}'$をコンパクト半単純Lie環とする。このとき$\mathcal{C}(\mathfrak{g}')$から$\mathcal{C}(\mathfrak{g}'^{\mathbb{C}})$への写像$\psi$はwell-definedで全単射である。

複素単純Lie環内の複素単純部分環の指数は，これらのコンパクト実形を使って定義でき，ψは指数を保つことがわかる。

したがって，定理5と命題6より$\mathcal{C}(M')$の元の分類は$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$内で指数が1で階数が1より大きい複素単純部分環の$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$-共役類全体$\mathcal{C}_1(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$の元の分類に帰着する。

4．指数1の単純部分環の分類のための準備

次の節で古典型複素単純Lie環内で指数1の複素単純部分環を分類する準備として，この節ではMal'cev[7]の手法を復習しておく。

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$を古典型複素単純Lie環$\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$，$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$，$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$のうちの1つとする。$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$内の複素単純部分環の$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$-共役類を考える前に，複素単純Lie環$\mathfrak{s}$と準同型$\iota:\mathfrak{s}\to\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の組$(\mathfrak{s},\iota)$の$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$-共役類を考えることにする。$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$は古典型だから，$\iota$は$\mathfrak{s}$の複素線形表現とみなせる。このとき，次の定理が成り立つ。

<u>定理7</u>(Mal'cev[7])　ι_1,ι_2を複素単純Lie環$\mathfrak{s}$から$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$への準同型とする。次の条件は，$\iota_1$と$\iota_2$が複素線形表現として同値になるための必要十分条件である。

i) $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$のとき，$\iota_1,\iota_2$は$O(n,\mathbb{C})$-共役。

ii) $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$のとき，$\iota_1,\iota_2$は$SL(n,\mathbb{C})$-共役。

iii) $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$のとき，$\iota_1,\iota_2$は$Sp(n,\mathbb{C})$-共役。

この定理の系として，次の系8を得る。

<u>系8</u>　$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$を$\mathfrak{o}(2n+1,\mathbb{C})$，$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$，$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$のうちの1つとし，

ι_1, ι_2を複素単純Lie環$\mathfrak{k}$から$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$への準同型とする。このとき，$\iota_1, \iota_2$が複素線形表現として同値になるための必要十分条件は，ι_1, ι_2が$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$-共役になることである。

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{o}(2n,\mathbb{C})$の場合は，$\det(\sigma)=-1$となる$O(n,\mathbb{C})$の元$\sigma$と$\mathfrak{k}$から$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$への準同型$\iota:\mathfrak{k}\to\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$に対して，

$$\iota^{\sigma}(X)=\sigma\,\iota(X)\,\sigma^{-1}, \quad X\in\mathfrak{k}$$

とおいたとき，ιとι^{σ}は表現としては同値になるが，$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$-共役になるかどうかが問題になる。これに関しては次のMal'cev [7]の定理がある。

<u>定理9</u>　ιとι^{σ}が$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$-共役になるための必要十分条件は，$\iota$が直交可約になることである。ただし，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{o}(2n,\mathbb{C})$。

系8と定理9より表現の同値類から，組$(\mathfrak{k},\iota)$の$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$-共役類を得ることができる。そこで，次は組$(\mathfrak{k},\iota)$の$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$-共役類から$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の複素単純部分環の$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$-共役類を得ることを考える。そのためには，$(\mathfrak{k},\iota_1)$, $(\mathfrak{k},\iota_2)$の$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$-共役類に対して，$\iota_1(\mathfrak{k})=\iota_2(\mathfrak{k})$となるかどうかを判定しなければならない。もし，$\iota_1(\mathfrak{k})=\iota_2(\mathfrak{k})$となるとすると，ある$\mathrm{Aut}(\mathfrak{k})$の元$\tau$があって，$\iota_2=\iota_1\circ\tau$となる。$\mathrm{Int}(\mathfrak{k})$は自然に$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$に埋め込まれるので，$\tau$は$\mathfrak{k}$の外部自己同型の場合のみ考えればよい。したがって，$\mathfrak{k}$が外部自己同型を持つ場合が問題になる。その場合$\mathrm{Aut}(\mathfrak{k})/\mathrm{Int}(\mathfrak{k})$の各元$\tau$ $\mathrm{mod}\,\mathrm{Int}(\mathfrak{k})$に対して，$(\mathfrak{k},\iota_1\circ\tau)$の$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$-共役類がどの$(\mathfrak{k},\iota)$の$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$-共

役類に一致するかを決定すればよい。これによって，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$内の複素単純部分環の$\mathrm{Int}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$-共役類の分類を得る。

5. 指数１の単純部分環の分類

この節で，古典型複素単純Lie環内の指数１の複素単純部分環を分類する。ただし，$\mathfrak{sp}(n+1,\mathbb{C})$に対応するコンパクト四元数対称空間は四元数射影空間$P^n(\mathbb{H})$で，$P^n(\mathbb{H})$内の四元数部分多様体は$P^k(\mathbb{H})$ $(1\leq k\leq n-1)$しかないことがすでにわかっているので，$\mathfrak{sp}(n+1,\mathbb{C})$内の指数１の複素単純部分環は$\mathfrak{sp}(k,\mathbb{C})$ $(1\leq k\leq n)$しかない。だから，$\mathfrak{sp}(n+1,\mathbb{C})$は除く。$P^n(\mathbb{H})$の部分多様体に関しては，さらに強い次の定理が知られている。

定理10(Howard-Wei[5], Ohnita[8]) $P^n(\mathbb{H})$内のコンパクト極小安定部分多様体は$P^k(\mathbb{H})$ $(1\leq k\leq n-1)$に限る。

まず，複素単純Lie環の表現論の復習をしておく。$\mathfrak{g}$をコンパクト単純Lie環とし，$\rho:\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\to\mathfrak{gl}(V)$を複素既約表現とする。$\mathfrak{g}$の極大Abel部分環$\mathfrak{t}$を１つとり，$\mathfrak{t}$の元$\lambda$に対して，

$$V_\lambda=\{v\in V\,;\,\rho(H)v=\sqrt{-1}\langle\lambda,H\rangle v,\ H\in\mathfrak{t}\}$$

とおく。$\lambda\in\mathfrak{t}$は，$V_\lambda\neq\{0\}$のときρのウエイトと呼ばれる。ρのウエイトの全体をΛ_ρで表わす。このときVは

$$V=\sum_{\lambda\in\Lambda_\rho}V_\lambda$$

と直和に分解される。Λ_ρの元λに対して，$m_\lambda=\dim_{\mathbb{C}}V_\lambda$とおく。

$\mathfrak{t}$に辞書式順序を1つ定め，$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$をルート系$\Delta$の基本ルート系とする。等式

$$\frac{2\langle\omega_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}=\delta_{ij}$$

を満たす$\mathfrak{t}$の部分集合$\{\omega_1,\cdots,\omega_k\}$は，$\Delta$の$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$に関する基本ウエイト系と呼ばれる。$\Lambda_P$の各元は，$\omega_1,\cdots,\omega_k$の整数係数線形結合で表わされ，最高ウエイトは非負整数n_iによって$\sum_{i=1}^k n_i\omega_i$と書き表わされる。一般に，非負整数m_iによって$\sum_{i=1}^k m_i\omega_i$と表わされるものを支配的ウエイトと呼ぶ。$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$の複素既約表現に対してその最高ウエイトを対応させる対応は，$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$の複素既約表現の同値類の集合から支配的ウエイトの集合への全単射になることが知られている。

最初に$\mathcal{L}_1(\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C}))$の元の分類を考える。$\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$に対応するコンパクト四元数対称空間は複素Grassmann多様体$G_{2,n-2}^{\mathbf{C}}$である。$G_{2,1}^{\mathbf{C}}$は真に含まれる四元数部分多様体を持たないから，$n\geqq 2$としてよい。このとき$G_{2,n-2}^{\mathbf{C}}$の階数は2になり，四元数部分多様体の対称空間としての階数は2以下になる。第2節の分類表より，$\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$内の指数1の複素単純部分環になる可能性のあるのは$\mathfrak{sl}(k,\mathbf{C})$，$\mathfrak{sp}(k,\mathbf{C})$，$\mathfrak{g}_2^{\mathbf{C}}$に限られる。

指数1の複素単純部分環$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$の包含写像$\iota:\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}\to\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$を既約分解し，

$$\iota=\iota_1\oplus\cdots\oplus\iota_d$$

とする。Dynkin[3]の定理2.3より，

$$j_\iota = j_{\iota_1} + \cdots + j_{\iota_d}$$

だから，$j_{\iota_1}, \cdots, j_{\iota_d}$のうちただ1つが1で他はすべて0になる。そこで，$\iota$は複素既約と仮定する。

$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$の正規化された不変内積を具体的に書き表わすことによって，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$内での指数$j_\iota$を次のように表わすことができる。$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の長いルート$\alpha$を1つとると，

$$j_\iota = \frac{1}{2}\sum_{\lambda\in\Lambda_\iota} m_\lambda \langle \lambda, \alpha \rangle^2 .$$

この等式より，次の補題を得る。

<u>補題11</u>　$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$は$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$の複素単純部分環で，既約になっているとする。このとき，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の指数が1になるための必要十分条件は，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の長いルート$\alpha$に対して$\Lambda_\iota$内にただ1つ$\lambda_0$が存在し，各$\lambda\in\Lambda_\iota - \{\lambda_0, -\lambda_0\}$に対して$\langle\lambda,\alpha\rangle = 0$となり，$\langle\lambda_0,\alpha\rangle = 1$, $m_{\lambda_0}=1$を満たすことである。

この補題及び第4節を$\mathfrak{sl}(k,\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(k,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$に適用し，既約でない場合も考えあわせると，次の定理を得る。

<u>定理12</u>　$n\geqq 4$に対して，

$$\mathcal{C}_1(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})) = \{C(\mathfrak{sl}(k,\mathbb{C}))\,;\, 3\leqq k\leqq n-1\}$$
$$\cup\{C(\mathfrak{sp}(k,\mathbb{C}))\,;\, 2\leqq k\leqq [n/2]\}.$$

ただし，$\mathfrak{sp}(k,\mathbb{C})\subset\mathfrak{sl}(2k,\mathbb{C})\subset\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$は自然な埋め込みとする。

定理12の結果に定理5，命題6を適用すると，$G_{2,n}^{\mathbb{C}}$の四元数部分多様体を分類できる。

<u>定理13</u>　$n\geqq 2$に対して，

$$\mathcal{C}(G_{2,n}^{\mathbb{C}})=\{c(G_{2,k}^{\mathbb{C}})\,;\,1\leqq k\leqq n-1\}$$
$$\cup\{c(P^k(\mathbb{H}))\,;\,1\leqq k\leqq [n/2]\}.$$

次に$\mathcal{C}_1(\mathfrak{o}(n,\mathbb{C}))$の元の分類を考える。$\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$内で指数1の複素単純部分環$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の包含写像$\iota:\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\to\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$を直交既約分解し，

$$\iota=\iota_1\oplus\cdots\oplus\iota_d$$

とする。Dynkin[3]の定理2.3より，

$$j_\iota=j_{\iota_1}+\cdots+j_{\iota_d}$$

だから，$j_{\iota_1},\cdots,j_{\iota_d}$のうちただ1つが1で他はすべて0になる。そこで，$\iota$は直交既約と仮定する。

<u>定理14</u>(Mal'cev [7]の定理4)　$\iota:\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\to\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$を直交既約とすると，$\iota$は$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$においても既約になるか，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$のある複素既約表現$\rho$が存在して$\iota$は$\rho$と$\rho$の反傾表現$\rho^*$との直和$\rho\oplus\rho^*$と同値になるかのどちらかである。

ιが$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$で既約な場合，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の長いルート$\alpha$を1つとると，

$$j_\iota=\frac{1}{4}\sum_{\lambda\in\Lambda_\iota}m_\lambda\langle\lambda,\alpha\rangle^2.$$

さらに$j_\iota=1$のとき，Λ_ιの元λに対して，$\langle\lambda,\alpha\rangle=\pm1,\ 0$になることがわかり，次の補題を得る。

<u>補題15</u>　$\iota:\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\to\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$が$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$においても既約とする。この

とき，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の$\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$での指数が1になるための必要十分条件は，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の長いルート$\alpha$に対して，

$$\langle\lambda,\alpha\rangle=\pm1,0$$

がすべてのウエイト$\lambda\in\Lambda_\iota$に対して成り立ち，

$$\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_\iota\\ \langle\lambda,\alpha\rangle=1}} m_\lambda = 2$$

となることである。

また，複素既約表現ρが存在しιが$\rho\oplus\rho^*$と同値になる場合，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の長いルート$\alpha$を1つとると，

$$j_\iota=\frac{1}{2}\sum_{\lambda\in\Lambda_\rho} m_\lambda\langle\lambda,\alpha\rangle^2$$

が成り立つ。

<u>補題16</u>　$\iota:\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\to\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$が直交既約で，ある複素既約表現$\rho$が存在し，$\iota$が$\rho\oplus\rho^*$と同値になるとする。このとき，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の$\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$での指数が1になるための必要十分条件は，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の長いルート$\alpha$に対して$\Lambda_\rho$内にただ1つ$\lambda_0$が存在し，各$\lambda\in\Lambda_\rho-\{\lambda_0,-\lambda_0\}$に対して$\langle\lambda,\alpha\rangle=0$となり，$\langle\lambda_0,\alpha\rangle=1$，$m_{\lambda_0}=1$を満たすことである。

これら2つの補題から，自然な埋め込み$\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})\subset\mathfrak{o}(n+1,\mathbb{C})$，$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\subset\mathfrak{o}(2n,\mathbb{C})$，$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})\subset\mathfrak{o}(4n,\mathbb{C})$やspin表現による埋め込み$\mathrm{spin}(\mathfrak{o}(7,\mathbb{C}))\subset\mathfrak{o}(8,\mathbb{C})$，$\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$の7次元既約表現による埋め込み$\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}\subset\mathfrak{o}(7,\mathbb{C})$はすべて指数1になることがわかる。第4節を適用し既約でないものも考えあわせると，次の定理を得る。

<u>定理17</u>　$O(m,\mathbb{C})$ 内の元 σ で $\det(\sigma)=-1$ となるものを１つとる。
$\mathcal{C}_1(O(m,\mathbb{C}))$ は次のように与えられる。

$$\mathcal{C}_1(O(7,\mathbb{C}))=\{c(O(5,\mathbb{C})),c(O(6,\mathbb{C})),c(r\ell(3,\mathbb{C})),c(\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}})\}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1(O(8,\mathbb{C}))=&\{c(O(k,\mathbb{C}))\,;\,5\leqq k\leqq 7\}\\ &\cup\{c(r\ell(4,\mathbb{C})),\ c(\sigma r\ell(4,\mathbb{C})\sigma^{-1}),\ c(r\ell(3,\mathbb{C}))\}\\ &\cup\{c(rp(2,\mathbb{C})),\ c(\sigma rp(2,\mathbb{C})\sigma^{-1})\}\\ &\cup\{c(\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}),\ c(spin(O(7,\mathbb{C})),\ c(\sigma spin(O(7,\mathbb{C}))\sigma^{-1})\}.\end{aligned}$$

$n\geqq 3$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1(O(4n,\mathbb{C}))=&\{c(O(k,\mathbb{C}))\,;\,5\leqq k\leqq 4n-1\}\\ &\cup\{c(r\ell(k,\mathbb{C}))\,;\,3\leqq k\leqq 2n\}\cup\{c(\sigma r\ell(2n,\mathbb{C})\sigma^{-1})\}\\ &\cup\{c(rp(k,\mathbb{C}))\,;\,2\leqq k\leqq n\}\cup\{c(\sigma rp(n,\mathbb{C})\sigma^{-1})\}\\ &\cup\{c(\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}),\ c(spin(O(7,\mathbb{C})))\}.\end{aligned}$$

$n\geqq 2$，$r=1,2,3$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1(O(4n+r,\mathbb{C}))=&\{c(O(k,\mathbb{C}))\,;\,5\leqq k\leqq 4n+r-1\}\\ &\cup\{c(r\ell(k,\mathbb{C}))\,;\,3\leqq k\leqq 2n+[r/2]\}\\ &\cup\{c(rp(k,\mathbb{C}))\,;\,2\leqq k\leqq n\}\\ &\cup\{c(\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}),\ c(spin(O(7,\mathbb{C})))\}.\end{aligned}$$

上の結果に定理５を適用すると，$G_{4,m}^{\mathbb{R}}$ の四元数部分多様体を分類できる。

<u>定理18</u>　$O(m+4)$ の元 σ で $\det(\sigma)=-1$ となるものを１つとる。
$\mathcal{C}(G_{4,m}^{\mathbb{R}})$ は次のように与えられる。

$$\mathcal{C}(G^{\mathbb{R}}_{4,3})=\{c(G^{\mathbb{R}}_{4,1}),\ c(G^{\mathbb{R}}_{4,2}),\ c(G^{\mathbb{C}}_{2,1}),\ c(G_2/SO(4))\}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(G^{\mathbb{R}}_{4,4})=&\{c(G^{\mathbb{R}}_{4,k})\,;\ 1\leqq k\leqq 3\}\\&\cup\{c(G^{\mathbb{C}}_{2,2}),\ c(\sigma G^{\mathbb{C}}_{2,2}),\ c(G^{\mathbb{C}}_{2,1})\}\\&\cup\{c(P^1(\mathbb{H})),\ c(\sigma P^1(\mathbb{H}))\}\\&\cup\{c(G_2/SO(4)),\ c(G^{\mathbb{R}}_{4,3}(spin)),\ c(\sigma G^{\mathbb{R}}_{4,3}(spin))\}.\end{aligned}$$

$n\geqq 2$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(G^{\mathbb{R}}_{4,4n})=&\{c(G^{\mathbb{R}}_{4,k})\,;\ 1\leqq k\leqq 4n-1\}\\&\cup\{c(G^{\mathbb{C}}_{2,k})\,;\ 1\leqq k\leqq 2n\}\cup\{c(\sigma G^{\mathbb{C}}_{2,2n})\}\\&\cup\{c(P^k(\mathbb{H}))\,;\ 1\leqq k\leqq n\}\cup\{c(\sigma P^n(\mathbb{H}))\}\\&\cup\{c(G_2/SO(4)),\ c(G^{\mathbb{R}}_{4,3}(spin))\}.\end{aligned}$$

$n\geqq 1$，$r=1,2,3$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(G^{\mathbb{R}}_{4,4n+r})=&\{c(G^{\mathbb{R}}_{4,k})\,;\ 1\leqq k\leqq 4n+r-1\}\\&\cup\{c(G^{\mathbb{C}}_{2,k})\,;\ 1\leqq k\leqq 2n+[r/2]\}\\&\cup\{c(P^k(\mathbb{H}))\,;\ 1\leqq k\leqq n\}\\&\cup\{c(G_2/SO(4)),\ c(G^{\mathbb{R}}_{4,3}(spin))\}.\end{aligned}$$

6. 四元数部分多様体が代表するホモロジー類

M'をコンパクト四元数対称空間とする。写像$\chi:\mathcal{C}(M')\to H_*(M';R)$を

$$\chi(c(M))=[M]$$

によって定める。ただし，MはM'の完備四元数部分多様体で

$[M]$はMが代表するホモロジー類である。$C(M)$は$I_0(M')$の作用による同値類だからχはwell-definedになる。

この節では，M'が$G^{\mathbb{C}}_{2,n}$，$G^{\mathbb{R}}_{4,3}$，$G^{\mathbb{R}}_{4,4}$のうちの1つのときにχが単射になることを示す。χが単射になるようなM'においては，四元数部分多様体はそれが代表するホモロジー類の中では$I_0(M')$-共役を除いてただ1つの体積最小部分多様体になる。実際，M'内の完備四元数部分多様体Mはそのホモロジー類の中では体積最小になり，ΩをM'の基本形式とし，M_1も$[M]$内の体積最小な向きのついたコンパクト部分多様体とすると，

$$\mathrm{vol}(M_1)=\mathrm{vol}(M)=\int_M \frac{1}{k!}\Omega^k=\int_{M_1}\frac{1}{k!}\Omega^k.$$

ただし，$4k=\dim(M)=\dim(M_1)$。したがって，定理1の等号成立条件よりM_1もまた四元数部分多様体になる。χが単射であることから，MとM_1とは$I_0(M')$-共役になる。

定理10は上の主張よりもさらに強い四元数射影空間における四元数部分多様体の一意性に関する定理である。ホモロジー類における体積最小部分多様体に関しては，コンパクト単純Lie群の3次元ホモロジー類においても類似の結果が成り立つ(Ohnita-Tasaki[9])。

<u>補題19</u>　M_1とM_2を四元数Kähler多様体M'内のコンパクト四元数部分多様体とする。もし$[M_1]=[M_2]$ならば，$\mathrm{vol}(M_1)=\mathrm{vol}(M_2)$となる。

<u>定理20</u>　写像

$$\chi : \mathcal{C}(G_{2,n}^{\mathbb{C}}) \to H_*(G_{2,n}^{\mathbb{C}} ; \mathbb{R})$$

は単射になる。

<u>証明</u>　定理13より，$1 \leqq k \leqq [n/2]$ なる k に対して，$H_*(G_{2,n}^{\mathbb{C}};\mathbb{R})$ において $[G_{2,k}^{\mathbb{C}}] \neq [P^k(\mathbb{H})]$ を示せば十分。

$[G_{2,k}^{\mathbb{C}}] = [P^k(\mathbb{H})]$ と仮定すると，補題19より $vol(G_{2,k}^{\mathbb{C}}) = vol(P^k(\mathbb{H}))$ となる。$G_{2,n}^{\mathbb{C}}$ はHermite対称空間でもあるから，Kähler多様体としてみたときの基本２次形式 ω を持つ。$G_{2,n}^{\mathbb{C}}$ 内で $G_{2,k}^{\mathbb{C}}$ は複素部分多様体になっているが，$P^k(\mathbb{H})$ は複素部分多様体ではない。したがってWirtinger不等式より，

$$vol(G_{2,k}^{\mathbb{C}}) = \int_{G_{2,k}^{\mathbb{C}}} \frac{1}{(2k)!} \omega^{2k} = \int_{P^k(\mathbb{H})} \frac{1}{(2k)!} \omega^{2k} < vol(P^k(\mathbb{H}))$$

となり矛盾。よって，$[G_{2,k}^{\mathbb{C}}] \neq [P^k(\mathbb{H})]$。

<u>注</u>　Chen-Nagano[2]の定理6.15より，$P^k(\mathbb{H})$ は $G_{2,n}^{\mathbb{C}}$ 内の全実部分多様体になるので，

$$\int_{P^k(\mathbb{H})} \frac{1}{(2k)!} \omega^{2k} = 0 。$$

このことからでも定理20は導かれる。

<u>定理21</u>　写像

$$\chi : \mathcal{C}(G_{4,3}^{\mathbb{R}}) \to H_*(G_{4,3}^{\mathbb{R}} ; \mathbb{R}),$$

$$\chi : \mathcal{C}(G_{4,4}^{\mathbb{R}}) \to H_*(G_{4,4}^{\mathbb{R}} ; \mathbb{R})$$

は単射になる。

<u>証明</u>　定理18より，自然な包含写像 $G_{4,3}^{\mathbb{R}} \to G_{4,4}^{\mathbb{R}}$ から誘導さ

れる写像$\mathcal{C}(G^{\mathbb{R}}_{4,3})\to\mathcal{C}(G^{\mathbb{R}}_{4,4})$は単射になる。さらに，図式

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}(G^{\mathbb{R}}_{4,3}) & \xrightarrow{\quad\chi\quad} & H_*(G^{\mathbb{R}}_{4,3};\mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}(G^{\mathbb{R}}_{4,4}) & \xrightarrow{\quad\chi\quad} & H_*(G^{\mathbb{R}}_{4,4};\mathbb{R})\end{array}$$

は可換になるから，$\chi:\mathcal{C}(G^{\mathbb{R}}_{4,4})\to H_*(G^{\mathbb{R}}_{4,4};\mathbb{R})$が単射になることを示せば十分である。

$G^{\mathbb{R}}_{4,4}=SO(8)/SO(4)\times SO(4)$のホロノミー群は$SO(4)\times SO(4)$になり，単純群の因子を4つ持っている。それらすべてが$G^{\mathbb{R}}_{4,4}$に四元数構造を定める。その4つの四元数構造を$S_j\,(1\leq j\leq 4)$とし，四元数構造S_jに関する四元数部分多様体をS_j-四元数部分多様体と呼ぶことにする。

補題22　M_1とM_2を$G^{\mathbb{R}}_{4,4}$の完備なS_1-四元数部分多様体とする。同じ$j\,(2\leq j\leq 4)$に対して，M_1はS_j-四元数部分多様体であり，M_2はS_j-四元数部分多様体ではないとする。そのとき，M_1とM_2の代表するホモロジー類は異なる。

証明　$\dim(M_1)=\dim(M_2)=4k$とおく。もし，$[M_1]=[M_2]$とすると，補題19より$vol(M_1)=vol(M_2)$。他方，S_jに関する基本4次形式をΩ_jとすると，

$$vol(M_1)=\int_{M_1}\frac{1}{k!}\Omega_j^k=\int_{M_2}\frac{1}{k!}\Omega_j^k<vol(M_2)$$

となり矛盾。よって$[M_1]\neq[M_2]$。

この補題22を定理18で得た結果に適用することによって，定理21を証明することができる。

References

[1] D. V. Alekseevskii, Compact quaternion spaces, Functional Anal. Appl. 2 (1968), 109-114.

[2] B. Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces II, Duke Math. J. 45 (1978), 405-425.

[3] E. B. Dynkin, Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras, Amer. Math. Soc. Translations Ser. 2, 6 (1960), 111-244.

[4] R. Harvey and B. H. Lawson, Jr., Calibrated geometry, Acta Math. 148 (1982), 47-157.

[5] R. Howard and S. W. Wei, On the existence and non-existence of stable submanifolds and currents in positively curved manifolds and the topology of submanifolds in Euclidean spaces, preprint.

[6] V. Y. Kraines, Topology of quaternionic manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 122 (1966), 357-367.

[7] A. I. Mal'cev, On semisimple subgroups of Lie groups, Amer. Math. Soc. Translations Ser. 1, 9 Lie groups (1962), 172-213.

[8] Y. Ohnita, Stable minimal submanifolds in compact rank one symmetric spaces, preprint.

[9] Y. Ohnita and H. Tasaki, Uniqueness of certain 3-dimensional homologically volume minimizing submanifolds in compact simple Lie groups, preprint.

[10] H. Tasaki, Certain minimal or homologically volume minimizing submanifolds in compact symmetric spaces,

Tsukuba J. Math. 9 (1985), 117-131.

[11] H. Tasaki, Quaternionic submanifolds in quaternionic symmetric spaces, preprint.

[12] J. A. Wolf, Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces, J. Math. Mech. 14 (1965), 1033-1047.