数理解析研究所講究録
第576巻 1985年 34-47

実単純Lie環の構成と広義の射影平面について

熊本工業大 厚山健次 (Kenji Atsuyama)

1. 複素数$\mathbb{C}$は絶対値||をもつので, $N(z)=|z|^2$ とおくと $N(z_1z_2)=N(z_1)N(z_2)$, $z_i\in\mathbb{C}$, がなりたつ. 一般にこの性質をみたす2次のノルムNをもつ代数は composition 代数と呼ばれる. この代数の分類は Hurwitz によって既に完了していて, 実数体上において次の7コになる.

	実数	複素数	四元数	Cayley数
d	R	$\mathbb{C}$	Q	$\mathfrak{L}$
s		$\mathbb{C}_\alpha$	Q_α	$\mathfrak{L}_\alpha$

ただし, dはdivision代数, sはsplit代数であることを示す. つまり, それぞれ零因子が存在しない代数, 存在する代数のことである.

我々の目的は例外Lie群の幾何的直観像をつかむこと

にある. そのため (1) 例外群が作用する線形空間の構成と (2) 例外群が働く対称空間の具体的な構成が必要になる. そこで2節にて単純Lie環を構成し，3節にてEIII, EVI, EVIII型の対称空間をつくり射影平面に類似した性質を追求する.

上の7コのcomposition代数$\mathfrak{A}$は，全ての実単純Lie環を構成するときに使用されるが，この使い方の中に我々のideaの出発点がある. $\mathfrak{A}$の次元は1，2，4又は8であってこれ以上はない. composition代数はCayley-Dickson processと呼ばれる方法によって統一的に構成されるので，この方法を形式的に利用して16, 32… 次元の代数をつくりその性質を調べたR.B. BrownやR.D. Schaferの論文があるが，それらの代数はあまり良い性質をもっていなかった. そのためこのこととHurwitzの分類を考え合わせると，16次元以上の代数を開発してそれを行列の成分として利用することは意味のないことのように長い間思われていた. しかるに，2コのcomposition代数でテンソル積をつくり，それを3×3行列の成分として利用すれば，このテンソル積自身は代数として特別の良い性質をやはりもたないにもかかわらず，全ての例外型実単純Lie環の構成が成功するのである. テンソル積をつくるというideaの源はB.A. Rozenfeld [5] の中にあるが，H. Freudenthal [4]が

指摘したように Rozenfeld の論文には誤りがあったため彼自身は成功には到らなかった. また実単純 Lie 環の統一的構成も, 既に Freudenthal, Tits 等により解決されているので特に新しいものではないが, その構成の土台となる idea が先行者達と比較して一段階だけ simple であるので, その分より本質に迫った Lie 環の構成ができあがっていると思われる.

2. 実単純 Lie 環の構成 (cf. [1])

<u>準備</u>　係数体は実数体 R とする. M^n は $n \times n$ 実数行列. $\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)}$ は composition 代数で, $-$ はその中の普通の共役とする. $\mathfrak{A}^{(1)} \otimes_R M^n \otimes_R \mathfrak{A}^{(2)}$ はテンソル積(加群)であり次のものをもつ. (1) 積 $(aXs)(bYt) = abXYst$ (aXs はテンソル積の元 $a \otimes X \otimes s$ のことであり $\otimes$ を省略している) (2) involution $aXs \longrightarrow \bar{a}X^T\bar{s}$ (T は行列の転置) (3) トレース $Tr(aXs) = a\,tr(X)I s$ (I は $n \times n$ 単位行列, $tr(X) = \frac{1}{n}(x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{nn})$ とする).

$\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{A}^{(1)} \otimes M^n \otimes \mathfrak{A}^{(2)}$ の部分加群であって, 上の involution に関して skew-symmetric かつトレース 0 なる

元が生成している(加法に関して). $\mathfrak{Der}\,\mathfrak{A}^{(i)}$ は $\mathfrak{A}^{(i)}$ の内部微分がつくる Lie 環とする.

<u>構成</u>　$L(\mathfrak{A}^{(1)}, M^n, \mathfrak{A}^{(2)})$ は直和空間

$$\mathfrak{Der}\,\mathfrak{A}^{(1)} \oplus \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{Der}\,\mathfrak{A}^{(2)}$$

のことで, 次の積の定義で Lie 環になる.

$$(1)\quad [D^{(i)}, D^{(j)}] = \begin{cases} \mathfrak{Der}\,\mathfrak{A}^{(i)} \text{ の Lie 積} & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

ただし $D^{(i)} \in \mathfrak{Der}\,\mathfrak{A}^{(i)}$,

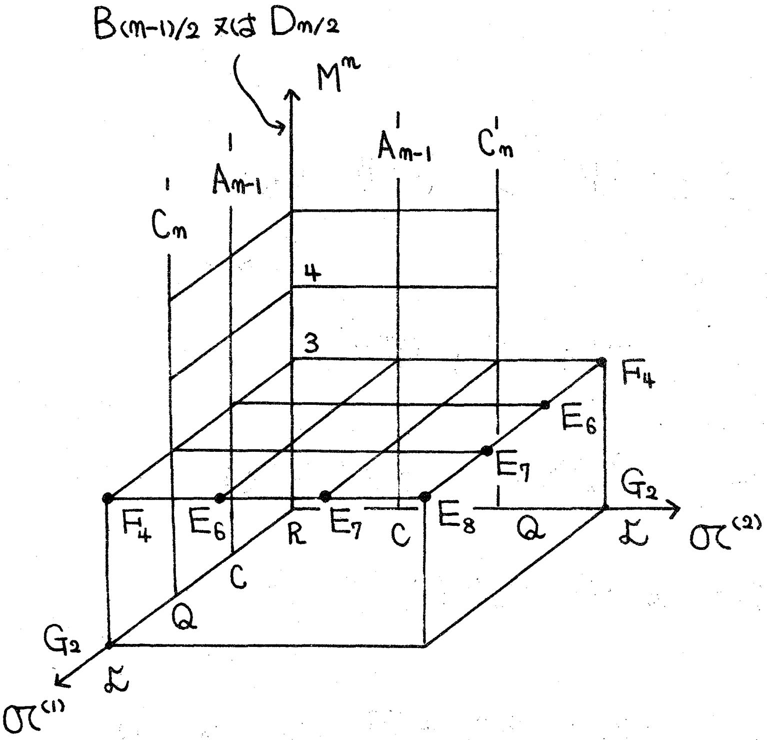
$$(2)\quad [D^{(1)} + D^{(2)}, aXs] = (D^{(1)}a)Xs + aX(D^{(2)}s),$$

(3)　$x = aXs$, $y = bYt \in \mathfrak{M}$ に対して,

$$[x, y] = (X,Y)(s,t)D_{a,b} + (xy - yx - \mathrm{Tr}(xy - yx)) + (X,Y)(a,b)D_{s,t},$$

ただし, $(X,Y) = \mathrm{tr}(XY)$, $D_{a,b}(c) = [[a,b],c] - 3(a,b,c)$, $[a,b] = ab - ba$, $(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$, $(a,b) = \frac{1}{2}(ab + \overline{ab})$ と定めている.

<u>結果</u>　composition 代数 $\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)}$ を $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathfrak{C}$ に限定すると，Lie 環 $L(\mathfrak{A}^{(1)}, M^n, \mathfrak{A}^{(2)})$ はコンパクト型の実単純 Lie 環になる．その結果は次の立体図を与える．例えば $E_8 = L(\mathfrak{C}, M^3, \mathfrak{C})$ である．non-compact 型の Lie 環については [1] を参照．



$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} & \mathbb{C} & \mathbb{Q} & \\
 & B\text{又は}D \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & A_{n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & C_n \arrow[r] \arrow[d, dash] & \mathfrak{A}^{(2)} \\
\mathbb{C} & A_{n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & A_{n-1} \oplus A_{n-1} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & A_{2n-1} \arrow[d, dash] & \\
\mathbb{Q} & C_n \arrow[r, dash] \arrow[d] & A_{2n-1} \arrow[r, dash] & D_{2n} & \\
 & \mathfrak{A}^{(1)} & & &
\end{tikzcd}
$$

M^n での水平方向の断面

<u>Killing form</u>　Lie 環 $L(\mathfrak{A}^{(1)}, M^n, \mathfrak{A}^{(2)})$ $(n \geq 2)$ の Killing form B は次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
&B(D^{(1)} + aXs + D^{(2)},\ D^{(1)} + aXs + D^{(2)}) \\
&\quad = c_1 B^{(1)}(D^{(1)}, D^{(1)}) + c_0 (a,a)(X,X)(s,s) + c_2 B^{(2)}(D^{(2)}, D^{(2)})
\end{aligned}
$$

ただし，$D^{(1)} + aX_s + D^{(2)} \in L(\mathfrak{A}^{(1)}, M^n, \mathfrak{A}^{(2)})$ であり，
C_0，C_i は，$d_i = \dim \mathfrak{A}^{(i)}$ とおいて，

$$C_0 = n((n-2)d_1 d_2 + 4(d_1 + d_2 - 2))$$

$$C_i = \frac{1}{48} C_0 \qquad (i = 1, 2)$$

で定められている．

係数 C_0，C_i に対して２つの注意がある．(1) 内積 (X, X) はその定義の中に $\frac{1}{n}$ を含んでいるので，C_0 の因子の内 $(n-2)d_1 d_2 + 4(d_1 + d_2 - 2)$ が本質的な部分になる．(2) $B^{(i)}$ は $\mathfrak{Der}\,\mathfrak{J}$ の Killing form であって内部に -192 の因子を含む．$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$，$\mathbb{Q}$ は $\mathfrak{J}$ の subalgebra として自然に実現できるので，$\mathfrak{Der}\,\mathfrak{A}^{(i)}$ の内積として $B^{(i)}$ を使用している．

3．広義の射影平面について（cf. [2]，[3]）

例外型のコンパクト単純 Lie 環 $L(\mathfrak{J}, M^3, \mathfrak{A}^{(2)})$ を利用して，例外群 F_4，E_6，E_7，E_8 が働く FII，EIII，EVI，EVIII 型の対称空間を構成する．FII は Cayley 射影平面であるが，残りの３つも広義の射影平面になっていることを主張する．

3×3 実行列 M^3 は，involutive な automorphism

$\beta : \begin{pmatrix} * & a & b \\ c & & \\ d & & * \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} * & -a & -b \\ -c & & \\ -d & & * \end{pmatrix}$ をもっている. これは次のようにして Lie 環 $\mathfrak{g} = L(\mathfrak{A}^{(1)}, M^3, \mathfrak{A}^{(2)})$ の involutive な automorphism に簡単に拡張される. その変換も同じ β で表わす. $\beta : D^{(1)} + aXs + D^{(2)} \longrightarrow D^{(1)} + a(\beta X)s + D^{(2)}$.
そして, $P = \frac{1}{2}(1-\beta)$ とおいて, $\mathfrak{g}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ による P の orbit の連結成分 Π を調べる. P は $\mathfrak{g}$ の projection である. さらに, $\mathfrak{g}$ の元 $K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ をとると, 2つの式 $\beta = \exp \pi \,\mathrm{ad}\, K_1$ と $(\mathrm{ad}\,K_1)((\mathrm{ad}\,K_1)^2+1)((\mathrm{ad}\,K_1)^2+4) = 0$ がなりたつ. 我々はこの $\mathrm{ad}\,K_1$ の多項式から出発して Π の構造を解明したいと思う. ただし, ad は $\mathfrak{g}$ の adjoint 表現でありまた K_1 の定義においてテンソル積 $\otimes$ と単位元 $e_0 \in \mathfrak{A}^{(i)}$ を省略している. $\{e_\ell\}$ は $\mathfrak{A}$ の基底である.

記号の定義 (1) $\Phi(x) = (\mathrm{ad}\,x)((\mathrm{ad}\,x)^2+1)((\mathrm{ad}\,x)^2+4)$,

(2) $\mathfrak{X} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \Phi(x) = 0\}$.

以下の定義は $x \in \mathfrak{X}$ に対してである.

(3) $\mathfrak{g}_0(x) = \{z \in \mathfrak{g} \mid (\mathrm{ad}\,x)z = 0\}$,

$\mathfrak{g}_i(x) = \{z \in \mathfrak{g} \mid (\mathrm{ad}\,x)^2 z = -i^2 z\}$ $(i=1,2)$

(4) $P_0(x) = 1 + \frac{5}{4}(\mathrm{ad}\,x)^2 + \frac{1}{4}(\mathrm{ad}\,x)^4$,

$P_1(x) = -\frac{4}{3}(\mathrm{ad}\,x)^2 - \frac{1}{3}(\mathrm{ad}\,x)^4$,

$P_2(x) = \frac{1}{12}(\mathrm{ad}\,x)^2 + \frac{1}{12}(\mathrm{ad}\,x)^4$.

Lemma 1. 直和分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(x) \oplus \mathfrak{g}_1(x) \oplus \mathfrak{g}_2(x)$ がなりたつ. 各写像 $P_i(x)$ は $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}_i(x)$ への projection であり, $P_0(x) + P_1(x) + P_2(x) = 1$ と $P_i(x)P_j(x) = P_j(x)P_i(x)$ をみたす.

定義　集合 $\mathfrak{X}$ の点 x での接平面を次のように定める.

$$\left\{ z \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x+hz) - \Phi(x)}{h} = 0 \quad (h \in R) \right\}$$

Lemma 2. $\mathfrak{g}_1(x) \oplus \mathfrak{g}_2(x)$ は点 x での $\mathfrak{X}$ への接平面となり, $\mathfrak{g}_0(x)$ は x でのイソトロピー群の Lie 代数になる.

次に, $\varphi(x) = \exp \pi \,\mathrm{ad}\, x$ $(x \in \mathfrak{X})$ とおくとこれは $\mathfrak{g}$ の involutive automorphism になり, $P(x) = \frac{1}{2}(1 - \varphi(x))$ は $\mathfrak{g}$ の projection となる. $P(x) = P_1(x)$ がなりたっている. ここで我々の研究対象である Π を定義することができる. $\Pi = \{ P(x) \mid x \in K_1 \text{の} \mathfrak{X} \text{での連結成分} \}$. $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ の Π への作用は $g \cdot P = gPg^{-1}$ で定める. ただし, $g \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, $P \in \Pi$ である.

Lemma 3. 点 $P(x)$ での Π への接平面は $\mathfrak{g}_1(x)$ であり,

イソトロピー群の Lie 代数は $\mathfrak{g}_0(x) \oplus \mathfrak{g}_2(x)$ となる.

$\mathfrak{g}_1(x)$ に制限した Killing form B を使って Π に距離を入れるとき, Π は各点 $P(x)$ において geodesic symmetry $1-2P(x)$ をもつ対称空間になる.

Prop. 4　Π の対称空間としての型 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0(x) \oplus \mathfrak{g}_2(x)$ は各 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して次のようになる.

$\mathfrak{a}^{(1)} \backslash \mathfrak{a}^{(2)}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{Q}$	$\mathfrak{L}$
$\mathbb{R}$	B_1	A_2	C_3	F_4
$\mathbb{C}$	A_2	$A_2 \oplus A_2$	A_5	E_6
$\mathbb{Q}$	C_3	A_5	D_6	E_7
$\mathfrak{L}$	F_4	E_6	E_7	E_8

$\mathfrak{g} = L(\mathfrak{a}^{(1)}, M^3, \mathfrak{a}^{(2)})$
(これは Freudenthal の magic square と呼ばれている)

$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0(x) \oplus \mathfrak{g}_2(x)$

$\mathbb{R}P_2$			
$\mathbb{C}P_2$	$\mathbb{C}P_2 \times \mathbb{C}P_2$		
$\mathbb{Q}P_2$	$SU(6)/S(U(4)\cdot U(2))$	$SO(12)/SO(8)\cdot SO(4)$	
$\mathfrak{L}P_2$	$E_6/SO(10)\cdot SO(2)$	$E_7/SO(12)\cdot SO(3)$	$E_8/SO(16)$

ただし，下の表において $\mathbb{R}P_2$, $\mathbb{C}P_2$, $\mathbb{Q}P_2$, $\mathbb{K}P_2$ は，実射影平面からCayley平面までの列である．また表の空白の部分は対称な位置の型が書かれる．

Prop. 4 の表の各対称空間は全て同一の変換 β から構成されており，しかも1列目の空間は射影平面の構造を有する空間の列である．したがって残りの空間も射影平面に似た何らかの構造をもつであろうことが期待できる．そこで Π を射影平面とみなすために点と直線の概念を導入する．点は Π の点に同じである．各点 $P \in \Pi$ に対して，P の Π での最遠点集合を直線と呼び $L(P)$ と書くことにする．そして点と直線の間の incidence は包含関係で定める．このとき，$\Pi^L = \{ L(P) \mid P \in \Pi \}$ とおくと，対応 $L: P \longrightarrow L(P)$ は Π と Π^L の間の1対1対応になる．このことから Π^L にも対称空間の構造を入れることができる．

Prop. 5. 対応 $L: P \longrightarrow L(P)$ は polarity の概念を与える．つまり，(1) $L^2 = \text{identity}$ (2) $P \in L(Q) \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} L(P) \ni Q$ をみたす．

Prop. 6. 直線は多様体としてコンパクトで連結な対称、

空間になる．その型は各Lie環 $\mathfrak{g}$ に対して次のようになる．

S^1			
S^2	$S^2 \times S^2$		
S^4	$SU(4)/S(U(2)\cdot U(2))$	$G_{4,4}$	
S^8	$G_{8,2}$	$G_{8,4}$	$G_{8,8}$

S^n は n 次元球面，
$G_{p,q} = SO(p+q)/SO(p)\cdot SO(q)$
とする．

話を明確にするためにこれから定理10までの間は $\Pi = E_6/SO(10)\cdot SO(2)$ とする．Π はコンパクトで単連結な対称空間になっている．$\mathfrak{g}_1(K_1)$ は点 $P(K_1)\in\Pi$ の接平面である．その中の2元 K_2 と $e_1K_2e_1$ は可換な接ベクトルである（$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする）．そして，$t_0, t_1 \in R$ として，

$$\varphi(t_0, t_1) = (\exp \mathrm{ad}(t_0K_2 + t_1e_1K_2e_1))\cdot P(K_1)$$

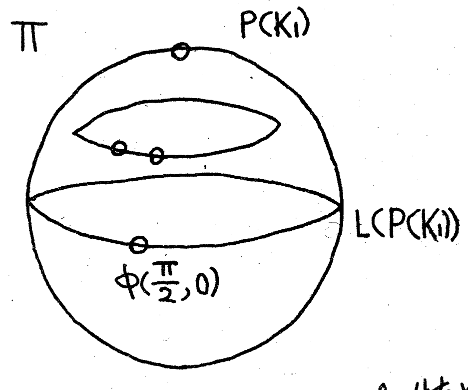
とおけば，点 $\varphi(t_0,t_1)$ の集合は Π において点 $P(K_1)$ を通る1つの極大トーラス T を与える．

<u>Lemma 7</u>. $\varphi(t_0,t_1) = \varphi(s_0,s_1)$ である必要十分条件は (1) $t_i - s_i \in \frac{\pi}{2}Z$ $(i=0,1)$ および (2) $\sum(t_i - s_i) \in \pi Z$ がなりたつことである．Z は整数環とする．

<u>Lemma 8</u>. 極大トーラスTにおいて点P(K_1)と可換な点はちょうど3点である. それらは $\Phi(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$, $\Phi(\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4})$, $\Phi(\frac{\pi}{2},0)$ である.

2点 $\Phi(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$, $\Phi(\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ は点P(K_1)を始点とするΠ上の最短閉測地線の中点になっている. これらの点はP(K_1)のイソトロピー群でtransitiveであり, またP(K_1)との距離は $2\sqrt{3}\pi$ となる. $\Phi(\frac{\pi}{2},0)$ はP(K_1)からの最遠点なる一点で, 距離は $2\sqrt{6}\pi$ である.

<u>Prop. 9</u>. 点P(K_1)と可換なΠの点は, P(K_1)のイソトロピー群によって2本のコンパクトで連結なorbitをつくる. 1つは SO(10)/SU(5)·SO(2) 型の対称空間でP(K_1)の最短閉測地線の中点でできている. もう1つは, SO(10)/SO(8)·SO(2) 型の対称空間であってP(K_1)の最遠点でできている.



点 $\Phi(\frac{\pi}{2},0)$ の属するorbitはP(K_1)に対応した直線L(P(K_1))と同一になる. そしてもう1本のorbitの存在が今までの射影平面とは違った特異な性質をΠに与えることになる.

定義　(1)　Πの2点P, Qが一般の位置にあるとは，Π上のいかなる最短閉測地線をとっても，それが同時にPとQを含むことはない場合をいう．そうでないときには，PとQは特異な位置にあるという．　(2)　2直線L(P), L(Q)が一般の(又は特異の)位置にあるとは，2点P, Qが一般の(又は特異の)位置にあるときをいう．

目標にしてきた次の定理をのべることができる．

Theorem 10.　Πは次の性質をみたす．

(1)　一般の位置にある2点を通る直線の数はちょうど1本である．特異な位置にある2点を通る直線はΠ^Lの部分多様体として4-複素次元射影空間$\mathbb{C}P_4$になる．

(2)　対応Lは点と直線の間のdualityを与える．

我々はΠを広義の射影平面と呼びたい．また以上の議論を書きかえて有限体上の話になおすならば，Lie typeの有限単純群が働く広義の射影平面ができるのであろうか？

REFERENCES

[1] K. Atsuyama, Another construction of real simple Lie algebras, Kōdai Math. J., 6 (1983), 122-133.

[2] ———————, The connection between the symmetric space $E_6/SO(10)\cdot SO(2)$ and projective planes, Kōdai Math. J., 8 (1985), 236-248.

[3] ———————, The connection between the symmetric space $E_7/SO(12)\cdot SO(3)$ and projective planes, (to appear).

[4] H. Freudenthal, Lie groups in the foundations of geometry, Advances in Math., 1 (1965), 145-190.

[5] B. A. Rozenfeld, Einfache Lie-Gruppen und nichteuklidische Geometrien, Algebraical and topological foundations of geometry, Proc. Colloq. Utrecht, 1959, (1962), 135-155.