

球面内の等質な極小超曲面の第一固有値について.

東京都立大学 小谷 元子

(KOTANI - MOTOKO)

### §1 問題

ここでは、 $M^n \hookrightarrow S^{m+1}$  を単位球面内のコンパクト埋没  $n$  次元超曲面とする。極小であることの特徴付けとして、次の定理が知られている。

定理 (高橋 [7])

$X: M^n \hookrightarrow S^{m+1}$  上の通り.

$$M \text{ が極小} \iff \Delta X = -nX$$

このことからすぐにコンパクト埋没超曲面のラプラシアンの第一固有値  $\mu_1$  は  $n$  以下であることがわかる。従って次のような問題を考えることができる。

問題 (狹土 [1])

$\mu_1 = n$  となる極小な  $M$  はどのようなものか?

(全く独立に Yan も「すべてのコンパクト埋没極小超曲面の第一固有値は  $n$  か？」という問題もあげている。[9])

この問題を一般に扱うことは難しく、一般の極小超曲面についての最近までの結果では次のものがある。

定理 (choi & Wang [1])

$$M^n \hookrightarrow S^{m+1} \quad \text{極小超曲面の第一固有値 } \mu_1 \geq \frac{n}{2}$$

そこで、球面内の等質な超曲面が Hsiang と Lawson によって分類されていることに目をつけ、武藤、大仁田、浦川は問題を次のように限定した。

問題 (武藤, 大仁田, 浦川)

球面内の等質な極小超曲面の第一固有値は  $n$  か？

ここでの目的は [4] における武藤, 大仁田, 浦川の方法と結果を紹介し, さらにいくつかの計算結果を報告することである。

## §2 球面内の等質超曲面のラプラスアン

まず Hsiang と Lawson の仕事を復習しておこう。

$(G, K)$  を rank 2 のコンパクト型対称対とする。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$  を対応する Cartan 分解,  $\alpha \in \mathfrak{p}$  内の極大可換部分空間,  $\mathfrak{g}$  の root 全体のなす空間を  $\Sigma$ , 正の root 全体のなす空間を  $\Sigma_+$  と書くと  $\mathfrak{k}, \mathfrak{p}$  は次のように直和分解できる。

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\lambda \in \Sigma_+} \mathfrak{k}_\lambda$$

$$\mathfrak{p} = \alpha + \sum_{\lambda \in \Sigma_+} \mathfrak{p}_\lambda$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } \mathfrak{k}_\lambda &= \{ X \in \mathfrak{k} ; (\text{ad } H)^\lambda X = -\lambda(H)^\lambda X \quad \forall H \in \alpha \} \\ \mathfrak{p}_\lambda &= \{ Y \in \mathfrak{p} ; (\text{ad } H)^\lambda Y = -\lambda(H)^\lambda Y \quad \forall H \in \alpha \}. \end{aligned}$$

さらに  $G$  の Killing 形式  $B_G$  に関する  $\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{p}_\lambda$  の正規直交基底  $\{X_i^\lambda\}, \{Y_i^\lambda\}$  を次のように取ることが出来る。

$$\begin{cases} \text{ad } H(X_i^\lambda) = -\lambda(H) Y_i^\lambda \\ \text{ad } H(Y_i^\lambda) = \lambda(H) X_i^\lambda. \end{cases}$$

従って  $\dim \mathfrak{k}_\lambda = \dim \mathfrak{p}_\lambda$  (= 此を以後  $m(\lambda)$  と書く。)

$\mathcal{B}$  を  $B_{\mathcal{G}}$  を内積とする  $\dim \mathcal{B}$  次元のユークリッド空間と見、  
 その中の単位球面を  $S^{m-1}(1)$  と書くと 勝手な  $\mathcal{O}$  の長さ 1 の正  
 則元 (つまり  $\lambda(H) = 0 \quad \forall \lambda \in \Sigma_+$  を満たす) に対して  
 $K$  の随伴作用  $Ad(\mathbb{R})H$  によって、次のような埋め込みが定義  
 できる。

$$\mathbb{R}_H = \mathcal{K}L \longrightarrow S^{m-1}(1).$$

ここで  $L = \{ \mathfrak{h} \in \mathcal{K} ; Ad(\mathbb{R})(H) = H \}$  又、その Lie 環  $\mathfrak{l}$   
 $\mathfrak{l} = \{ X \in \mathfrak{g} : ad(X)H = 0 \}$  と書く。

$$ad X(H) = [X, H]$$

だから  $\mathfrak{l} = \mathfrak{k}_0$ ,  $\mathfrak{m} = \sum_{\lambda \in \Sigma_+} \mathfrak{k}_{\lambda}$  とおくと  $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{m}$  は  
 $Ad(L)$ -不変な分解を与え、 $\mathfrak{m}_{\mathcal{K}}$  は

$$g_H(X, Y) = B_{\mathcal{G}}([X, H], [Y, H]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m},$$

によって内積が入る。これを左不変に  $\mathcal{K}L$  に拡張し  
 たものを  $g$  とする。

$$T_H(\mathbb{P}_H(K/L)) = \sum_{\lambda \in \Sigma_T} \mathcal{O}_\lambda$$

だから  $\dim T_H(\mathbb{P}_H(K/L)) = \dim(\sum_{\lambda \in \Sigma_T} \mathcal{O}_\lambda) = \dim \mathcal{O} - 2$ ,  
 なので  $\mathbb{P}_H(K/L, g) \rightarrow S^{m+1}(1)$  は単位球面内の等質超曲面  
 である。

逆に単位球面内の等質超曲面はこのようなものに限ること  
 が, Abiang と Lawson によって示されている。(これを正則  
 R空間と呼ぶ)

正則R空間の主曲率は, 高木-高橋によつて研究されてい  
 る。(〔6〕)

定理(高木と高橋)

$\mathbb{P}_H(K/L) \hookrightarrow S^{m+1}(1)$  は等径超曲面(つまり主曲率がM  
 上一定)で, その主曲率 $R_i$ , 重複度 $m_i$  は次のように与えら  
 れる。  $\Sigma_T^* = \{ \lambda \in \Sigma_T \mid \frac{\lambda}{2} \in \Sigma_T \} = \{ \lambda_1 < \dots < \lambda_r \}$  とする。  
 $\Sigma_T$  と  $H$  に直交する  $\alpha$  の長さ1の元とする。(  $\alpha$  の次元は  
 2次元に注意。)

$$R_i = -\frac{\lambda_i(\mathbb{R})}{\lambda_i(H)}, \quad m_i = m(\alpha) + m(2\lambda),$$

従つて  $\sum_{i=1}^r m_i R_i(H) = 0$  となる  $H$  を選んでくると, その  $H$

に関する埋め込み  $\Phi_H(K_L) \hookrightarrow S^{m(H)}$  によって単位球面内の等質極小超曲面がつくされることがわかる。

このようにして得た  $(K_L, g)$  のラプラシアンの一固有値を調べるのが目的である。今  $\{X_i^\lambda / \sqrt{\lambda(H)}; \lambda \in \Sigma, i=1, \dots, m(\lambda)\}$  が  $m$  の  $g_H$  に関する正規直交基底になり左不変計量  $g$  に関する  $K_L$  のラプラシアンは Lie 微分  $L$  を使って

$$\Delta = \sum_{\lambda \in \Sigma} \frac{m(\lambda)}{\lambda} \frac{(L X_i^\lambda)^2}{\lambda^2(H)},$$

と表わされる。

注意 1. 球面内の等径超曲面については Münzner によって次のことが知られている。( [3], [2] )

相異なる主曲率  $\varepsilon = \cot \theta_1, \dots, \cot \theta_r$  ( $0 < \theta_1 < \dots < \theta_r$ )  
その重複度を  $m_1, \dots, m_d$  とすると。

$$r = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$\theta_i = \theta_1 + \frac{i-1}{d} \pi$$

$$m_1 = m_3 = \dots, \quad m_2 = m_4 = \dots$$

6

注意 2. 球面内の等径超曲面の最小固有値については等質でないものについても武藤が計算している。

### §3 固有値計算の方法

$G$  群  $K$  の有限次元ユニタリ表現の同値類  $(\rho, V^\rho)$  のなす空間を  $D(K)$ ,  $V_L^\rho = \{v \in V^\rho, \rho(l)v = v \quad \forall l \in L\}$  が空でないような  $D(K)$  の表現のなす空間を  $D(K, L) = \{(\rho, V^\rho) \in D(K); V_L^\rho \neq \emptyset\}$  とする。

$V_L^\rho \subset V^\rho$  だから  $V^\rho$  の正規直交基底  $\{v_i\}_{i=1}^{\dim V^\rho} \in \{v_i\}_{i=1}^{\dim V_L^\rho}$  が  $V_L^\rho$  の正規直交基底となるように取ると  $K/L$  上の複素数値  $C^\infty$  関数全体の空間  $C_c^\infty(K/L)$  の完全正規直交基底として

$\{P_{ij}(\cdot) = \langle \rho(\cdot)v_i, v_j \rangle \quad i=1, \dots, \dim V_L^\rho, j=1, \dots, \dim V^\rho, \rho \in D(K, L)\}$  がとれる。(Peter-Weyl)

$$\rho(\Delta) = \sum_{\lambda \in \Sigma_+} \sum_{i=1}^{m(\lambda)} \frac{\rho(X_i^\lambda)^2}{\lambda(H)^\lambda}$$

とおくと  $\Delta P_{ij} = \langle \rho(\Delta)v_i, v_j \rangle$  であるから  $\Delta$  の固有値を求めることはすべての  $D(K, L)$  の元  $\rho$  に対して有限次元作用素  $\rho(\Delta)$  の固有値を求めることと同値である。もし  $\rho$  が両側不変な計量ならば Schur の補題より  $\rho(\Delta)$  はスカラー作用素となり、その固有値も具体的に求められている。

(現代の球函数 岩波 参照)

我々の場合は計量  $\rho$  は左不変でしかないので そのすべての固有値を知ることは 原理的には可能であるが 実際にはむずかしい。従って次のような工夫をする。

$$\rho(\Delta) = \sum \frac{\rho(X_i^\lambda)^2}{c} + P$$

$$c = \max_{\lambda} \{ \lambda(H)^2 \}$$

と書き直すと  $P$  は  $\sum \rho(X_i^\lambda)^2$  と可換な正值作用素である。

一方  $K$  の両側不変な計量  $B_K$  は  $G$  の両側不変な計量  $B_G$  を  $K$  に制限したものの定数倍になっているから  $B_K = aB_G|_K$  と書ける。  $K$  の両側不変計量に関するラアラシアンは 前と同じ基底  $\{X_i^\lambda\}$  を使って

$$\Omega = \sum \frac{(L_{X_i^\lambda})^2}{B_K(X_i^\lambda, X_i^\lambda)} = \frac{1}{a} \sum (L_{X_i^\lambda})^2$$

と書ける。このことに注意すると  $\rho(\Delta)$  はさらに

$$\rho(\Delta) = \frac{a}{c} \rho(\Omega) + P$$



という形に書き直せる。前にも注意したように  $\rho(\Omega)$  の固有値  $\alpha \beta(\lambda_p)$  は Freudenthal の公式によって求められ  $\rho$  が  $\rho(\Omega)$  と可換な正值作用素であることから  $\rho(\Delta)$  の固有値は  $\alpha \beta(\lambda_p)/c$  以上になっている。高橋の定理からすでに最小固有値は  $m$  以下であることが保証されており、問題としているのは  $m$  以下の固有値があるかどうかということであるから  $\alpha \beta(\lambda_p)/c \leq m$  となっている  $\rho$  についてのみさらに詳しく調べればよいことがわかる。

#### §4. 具体的な計算

$K/L \hookrightarrow S^{m-1}(1)$  は等径超曲面で、その相異なる主曲率の個数  $d = \{1, 2, 3, 4, 6\}$  である。

- i)  $d = 1$       $K/L$  は  $S^m(1) \hookrightarrow S^{m+1}(1)$      最小固有値は  $m$
- ii)  $d = 2$       $K/L$  は Clifford Torus     最小固有値は  $m$ .
- iii)  $d = 3$       $K/L$  を 尾関 - 竹内 [5] に従って次のように実現しよう。

$F = \mathbb{R}, \mathbb{C},$  実四元数環  $\mathbb{H}$ , 実 Cayley 数  $\mathbb{K}$  とする。

$$H_3(F) = \{u; u \text{ は } F \text{ 係数の } 3 \times 3 \text{ 行列 } u^* = u \}$$

$$SH_3(F) = \{ u \in H_3(F) : T(u) = 0 \}$$

$$\text{ここで } T(u) = \begin{cases} \operatorname{tr} u + \operatorname{tr} \bar{u} & F = \mathbb{H} \\ \operatorname{tr} u & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

$$\text{又 } R(u)v = \frac{uv + vu}{2}, \quad D(u)v = \frac{uv - vu}{2} \quad \text{とおく}$$

と  $R: H_3(F) \rightarrow \mathfrak{gl}(H_3(F))$ ,  $D: SH_3(F) \rightarrow \mathfrak{gl}(H_3(F))$  は  
単射連続な写像になっている。これによって  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{k}$  は  
 $\mathfrak{gl}(H_3(F))$  の部分空間として

$$\mathfrak{g} = R(\{ u \in H_3(F) : \operatorname{tr} u = 0 \})$$

$$\mathfrak{k} = D(SH_3(F))$$

で実現されている。  $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{k} = 3 \dim F + 2$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{g}$  とおくと  $\mathfrak{g}$  は  $\mathfrak{k} + \mathfrak{g} \in$  Cartan 分解とある

コンパクト型単純 Lie 環になっており、これらによって

$d=3$  になるような rank 2 の Lie 環はすべてつくされて  
いる。具体的に次の表のようになる。

Table 1

F	K	L	G	$\dim(K/L)$
$\mathbb{R}$	$SO(3) = B_1$	$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$	$SU(3)$	3
$\mathbb{C}$	$SU(3) = A_2$	$T^2$	$SU(3) \times SU(3)$	6
$\mathbb{H}$	$Sp(3) = C_3$	$Sp(1)^3$	$SU(6)$	12
$\mathbb{K}$	$F_4$	$Spin(8)$	$E_6$	24

$\mathbb{R}$  上  $K$   $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 とおくと 極大可換空間  $\mathcal{A} = \{ \sum \xi_i e_i; \sum \xi_i = 0 \} \subset \mathcal{B}$  か  
 とし

$$\Sigma^* = \left\{ \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}, \frac{\xi_3 - \xi_1}{2}, \frac{\xi_3 - \xi_2}{2} \right\}$$

つまり  $\lambda_1 = \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{\xi_3 - \xi_1}{2}$ ,  $\lambda_3 = \frac{\xi_3 - \xi_2}{2}$ ,  $m_1 = m_2 = m_3$   
 $= \dim \mathbb{F}$  を得る。

次に  $H = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$   $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = \dim \mathbb{F} / 3$  の極小曲  
 面を与えるための条件を求めよう。  $Z = \left( \frac{\xi_2 - \xi_3}{\sqrt{3}}, \frac{\xi_3 - \xi_1}{\sqrt{3}}, \right.$   
 $\left. \frac{\xi_3 - \xi_2}{\sqrt{3}} \right)$  とおくと

$$B(H, H) = B(Z, Z) = 1, \quad B(H, Z) = 0 \quad \text{を満足す。}$$

//

$K/L$  の主曲率は

$$R_1(H) = -\frac{\lambda_1(z)}{\lambda_1(H)} = \frac{z_1 + z_2 - 2z_3}{\sqrt{3}(z_2 - z_1)}$$

$$R_2(H) = -\frac{\lambda_2(z)}{\lambda_2(H)} = \frac{2z_2 - z_1 - z_3}{\sqrt{3}(z_3 - z_1)}$$

$$R_3(H) = -\frac{\lambda_3(z)}{\lambda_3(H)} = \frac{z_3 + z_2 - 2z_1}{\sqrt{3}(z_3 - z_2)}$$

となる。従って  $K/L$  が 極小になる  $H$  の値は

$$H = \left( -\frac{1}{\sqrt{3} \dim F}, 0, \frac{1}{\sqrt{3} \dim F} \right) \quad \text{で} \quad R_1 = -\sqrt{3}, \quad R_2 = 0, \\ R_3 = \sqrt{3}, \quad \lambda_1(H)^2 = \dim F / 12, \quad \lambda_2(H)^2 = \dim F / 3, \quad \lambda_3(H)^2 = \dim F / 12$$

となり §3 で定義された  $C = \max_{\lambda} \lambda^2(H) = \dim F / 3$  である。

$F = H$  の時を例にとると  $c = 1/12$ ,  $a = 2/3$   $mc/a = 24/16$   
各  $p \in D(K)$  は表現のウェイトを通じて  $(m_1, m_2, \dots) \in \mathbb{Z}^{\text{rank } K}$   
と 1対1に対応しており,  $\xi(\lambda_p)$  はこの  $\{m_i\}$  によって次のよ  
うに与えられる ( [ 8 ] )

$$\xi(\lambda_p) = (m_1 p_1 + m_2 p_2 + 2m_3 p_3 + 2p_1 + 2p_2 + 4p_3) / 16$$

Table 2

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$18\delta(\Lambda)$	$\leq 24?$	$D(K, L)?$
1	0	0	1	1	$\frac{1}{2}$	8		*
2	0	0	2	2	1	16		*
3	0	0	3	3	$\frac{3}{2}$	22	*	
0	1	0	1	2	1	12		
0	2	0	2	4	2	28	*	
0	0	1	1	2	$\frac{3}{2}$	15		*
0	0	2	2	4	3	36	*	
1	1	0	2	3	$\frac{3}{2}$	21		*
2	1	0	3	4	2	32	*	
1	0	1	2	3	2	24	*	
0	1	1	2	4	$\frac{5}{2}$	31	*	

ここで 4列目の\*は  $\delta(\Lambda)$  が  $24/16$  より大きくなっていることを 5列目の\*は  $p \notin D(K, L)$  となるものにつけてある。\*がどちらにもついていないものか次元より小さい固有値を与える可能性があるので、この場合には上から4行目の ~~随伴作用~~ 随伴作用  $V^p = 8$ ,  $V^L = 0$  とするもののみが候補として残っている。

$F = \mathbb{K}$  の場合は次のようになる。

table 3

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$18E(\Lambda_p)$	$\leq 24?$	$D(KL)?$
1	0	0	0	2	3	4	2	18		*
2	0	0	0	4	6	8	2	38	*	
0	1	0	0	3	6	8	4	36	*	
0	0	1	0	2	4	6	3	24	*	
0	0	0	1	1	2	3	2	12		
0	0	0	2	2	4	6	4	26	*	
1	0	0	1	3	5	7	4	32	*	

5行目は 随伴作用素  $V^p = 8$ ,  $V_L = 0$  である。

随伴行列については

$$P(\Delta) = \sum_{j=1,2,3} \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{K}_L)/3} \frac{\text{Ad}(X_{\alpha_j}^2)^2}{\lambda_j(H)^2}$$

$$\frac{\text{Ad}(X_\alpha)^2}{\lambda(H)^2} H = \frac{\lambda(H) \text{Ad}(X_\alpha) X_\alpha}{\lambda(H)^2} = -\frac{H_\alpha}{\lambda(H)}$$

$$\frac{\text{Ad}(X_\alpha)^2}{\lambda(H)^2} Z = \frac{\lambda(Z) \text{Ad}(X_\alpha) X_\alpha}{\lambda(H)^2} = \frac{-\lambda(Z)}{\lambda(H)} \frac{H_\alpha}{\lambda(H)}$$

$$\text{ここで } H_n = \lambda(H)H + \lambda(Z)Z$$

だから

$$\text{Ad}(\Delta)H = -\frac{\dim(K/L)}{3} \{ 3H - (R_1 + R_2 + R_3)Z \} = -\dim(K/L)H$$

$$\text{Ad}(\Delta)Z = -\frac{\dim(K/L)}{3} \{ -(R_1 + R_2 + R_3)H + (R_1^2 + R_2^2 + R_3^2)Z \} = -2\dim(K/L)Z$$

で ~~固有値~~ 固有値は  $\{ \dim(K/L), 2\dim(K/L) \}$  だから ラアラ  
ニアシの  $\sigma$ -固有値は次元と一致することが確かめられる。

$\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  の場合は 武藤, 大仁田, 浦川が [4] で  
計算し 最小固有値が次元と一致することが確かめられている  
従って  $d=3$  の場合は  $\mu_1 = m$  がわかった。

iii)  $d=6$

1)  $R = \mathfrak{g}_2$   $\mathfrak{g} = \sqrt{-1}\mathfrak{g}_2$  の場合は 武藤, 大仁田, 浦

川 [4]

2)  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2$   $R = \text{Su}(2) + \text{Su}(2)$   $\mathfrak{l} = 0$  の場合は

小谷 [10]

$\mathfrak{l} \neq 0$  の場合も 同様の方法で  $\mu_1 = m$  が確かめられている。

iv)  $d=4$

多くの場合はこの方法では計算しきれない。

### 参考文献

- [1] Hsiang and Lawson, Minimal submanifolds of low  
cohomogeneity, J. Diff. Geom. 5 (1971)
- [2] Münzner, Isoparametrische Hyperflächen I  
Math Ann. 251 (1980),
- [3] Münzner, Isoparametrische Hyperflächen II  
Math Ann. 256 (1981)
- [4] Mito, Ohnita and Urakawa Homogeneous  
minimal hypersurfaces in the unit sphere and  
the first eigenvalue of their Laplacian, Tohoku  
Math. J. 36 (1984)
- [5] Ozeki and Takeuchi On some type of hypersurfaces  
in spheres II. Tohoku Math J 28 (1976)
- [6] Takagi and Takahashi On the principal curvatures  
of homogeneous hypersurfaces in a unit sphere,  
Diff Geom, in honor of Yano, Kinobunya (1972)
- [7] Takahashi Minimal immersions of Riemann manifolds



J. Math. Soc. Japan 18(1966).

- [ 8 ] Yamaguchi, Spectra of flag manifolds, Memoria  
Fac. Sci. Kyushu Univ 33(1979)
- [ 9 ] Yau, Problem section, Seminar on differential geometry  
Ann. Math. Studies 102 Princeton Univ Press 1982
- [ 10 ] Kotani The first eigenvalue of homogeneous minimal  
hypersurfaces in a unit sphere  $S^{n+1}(1)$  Tohoku Math J  
37(1985).