数理解析研究所講究録
第576巻 1985年 75-99

複素射影空間のケーラー部分多様体のスペクトル幾何について

都立大理学部 宇田川 誠一 (Seiichi Udagawa)

§0. 概略

$\psi: M^n \longrightarrow E^N$ を n 次元 compact リーマン多様体から，N次元ユークリッド空間への等長はめこみとする。Δ, $\mathrm{spec}(M)=\{0<\lambda_1\cdots\lambda_1<\lambda_2\cdots\lambda_2<\cdots\}$ によって，それぞれ，Mのラプラシアン，Mのスペクトラムを表わすことにする。このとき，$\psi=\psi_0+\sum_{k\in\mathbb{N}}\psi_k$, $\Delta\psi_k=\lambda_k\psi_k$, と分解され，和は，$C^\infty(M)$ 上 L^2-位相で，成分ごとに収束する。ここで，ψ_0 は，定値写像であり，Mの<u>重力の中心</u>といわれる。

<u>定義1</u>　ψ が，$\psi=\psi_0+\psi_k$, $k\in\mathbb{N}$, $\psi_k\neq 0$ となるとき，ψ は，<u>order</u>$\{k\}$ であると言い，$\psi=\psi_0+\psi_k+\psi_l$, $l>k>0$, $k,l\in\mathbb{N}$, $\psi_k,\psi_l\neq 0$ のとき，<u>order</u>$\{k,l\}$ であると言い，以下同様に，$\psi=\psi_0+\psi_{k_1}+\psi_{k_2}+\cdots+\psi_{k_s}$, $k_s>k_{s-1}>\cdots>k_1>0$, $k_1,\cdots,k_s\in\mathbb{N}$, $\psi_{k_1}\cdots\cdots\psi_{k_s}\neq 0$, のとき，<u>order</u>$\{k_1,k_2,\cdots,k_s\}$ であるということにする。

よく知られたTakahashiの定理から，ψが order$\{k\}$ であるための必要十分条件は，Mが，E^Nの hypersphere S^{N-1} の中で minimal であることである．したがって，一般に，order$\{k_1, \cdots, k_s\}$ $(s \geq 2)$ であるための必要十分条件は何かという問題が生じるが，これは，非常に困難な問題であると思われるので，特に，我々は，$i : M^n \longrightarrow \mathbb{C}P^m$ を，n次元 compact Kaehler 部分多様体から，正則断面曲率 1 の m次元複素射影空間への Kaehler immersion (holomorphic isometric immersion) とし，$F : \mathbb{C}P^m \longrightarrow E^N$ を first standard imbedding とし，合成写像 $\psi = F \circ i$ について，上に述べた事を考えたいと思う．以下，特にことわらない限り，ψ が order$\{k_1, \cdots, k_s\}$ と言うかわりに，M が order$\{k_1, \cdots, k_s\}$ ということにする

まず，A. Ros [8,9] によって以下の事実が得られている

<u>定理A</u>． M を $\mathbb{C}P^m$ の compact Kaehler 部分多様体とする．このとき，M が order$\{k\}$, $k \in \mathbb{N}$ (i.e. S^{N-1} で minimal) であるための必要十分条件は，M が $\mathbb{C}P^m$ で totally geodesic であることである．

<u>定理B</u>． M を $\mathbb{C}P^m$ の compact Kaehler 部分多様体で，かつ，immersion は full とする (i.e. $\mathbb{C}P^m$ のいかなる totally geodesic Kaehler 部分多様体にもはいらない)．このとき，M が order$\{k, l\}$ であるための必要十分条件は，M が Einstein

で，かつ，$T = k g|_{NM \times NM}$，$k(\neq 0) \in \mathbb{R}$，が成りたつことである．ここで，NM は，M の normal bundle で，g は，$\mathbb{C}P^m$ の Kaehler metric，$T = (T_{\lambda\mu})$ は，$T_{\lambda\mu} = \mathrm{trace}\, A_{\xi_\lambda} A_{\xi_\mu}$，$\xi_\lambda, \xi_\mu \in NM$ であり，A_{ξ_λ} は，ξ_λ 方向の，second fundamental tenser である．

注意 1. Totally geodesic Kaehler 部分多様体は，order$\{1\}$ であることが，確かめられる．したがって，order$\{k\}$ $(k \geqq 2)$ の Kaehler 部分多様体は，存在しない．また，Einstein 平行部分多様体（M の $\mathbb{C}P^m$ における second fundamental form が平行）で，totally geodesic のもの以外は，order$\{1, 2\}$ であることが，確かめられる．

定理 B に関連して，次を得た

定理 1. [13] M を $\mathbb{C}P^m$ の compact Kaehler 部分多様体で，かつ，Immersion は full で，totally geodesic ではないとする

このとき，以下の条件は，互いに同値である．

i) M は，Einstein 平行部分多様体，

ii) M は，order$\{1, 2\}$，

iii) M は，order$\{k, l\}$，$l > k > 0$，$k, l \in \mathbb{N}$，

iv) M は，Einstein で，かつ，$T = k g|_{NM \times NM}$

v) M は，Einstein で，かつ，NM は，（induced metric に関して）Einstein Kaehler metric を許容する

注意 2. ii) と iii) の同値性により，order$\{1,2\}$ 以外に，order$\{k,l\}$ である Kaehler 部分多様体は，存在しないことがわかる．条件 v) は，§4 で説明される．また，order$\{k,l,m\}$ については，first-canonical に imbedded された rank 3 の compact irreducible Hermitian symmetric spaces と，$\mathbb{C}P^n$ の third-canonical Veronese imbedding と $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ の first-canonical imbedding は，order$\{1,2,3\}$ であることが確かめられる．$\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n$ $(n \geq 2)$ の first-canonical imbedding は，order$\{1,2,4\}$ であることが確かめられる．

定義 2. M_i を rank r_i の compact irreducible Hermitian symmetric space とし，$f_{P_i} : M_i \longrightarrow \mathbb{C}P^{m(i)}$ を P_i-th full Kaehler imbedding とする．f を f_{P_i} $(i=1,\cdots,s)$ のテンソル積とするとき，$\sum_{i=1}^{s} r_i P_i$ を f の degree ということにする．

スペクトラル幾何について，まず，次の結果が得られている：

定理 C. (N. Ejiri, A. Ros [9])

M を，$\mathbb{C}P^m$ の n 次元 compact Kaehler 部分多様体とするとき，

(0.1) $\qquad \lambda_1 \leq n+1$

である．等号成立の必要十分条件は，M が totally geodesic (i.e. degree 1) であることである．

定理1と[9]の定理5.2を合わせると次が得られる.

<u>定理2.</u> (A. Ros, S. Udagawa)

M を $\mathbb{C}P^m$ の n 次元 compact Kaehler 部分多様体とし, τ を M の scalar curvature とする. このとき,

$$(0.2) \quad n[n+1+(n+1-\lambda_1)(n+1-\lambda_2)]\,\mathrm{VoL}(M) \geqq \int_M \tau ,$$

が成り立つ. Immersion が full であれば, 等号成立の必要十分条件は, M が Einstein 平行部分多様体であることである.

定理2の系として, 以下の結果が得られる.

<u>定理3.</u>

M を $\mathbb{C}P^m$ の n 次元 compact Kaehler 部分多様体とする. もし, $\lambda_1 \leqq \int_M \tau \big/ [n\,\mathrm{VoL}(M)]$ で, M が totally geodesic でなければ,

$$(0.3) \qquad \lambda_2 \leqq n+2$$

である. 等号成立の必要十分条件は, (Immersion が full ならば) M が Einstein 平行部分多様体であることである.

<u>定理4.</u>

M を $\mathbb{C}P^m$ の compact Kaehler 部分多様体とし, Immersion は full とする. $\hat{M}$ を Einstein 平行部分多様体とする. もし, $\mathrm{Spec}(M) = \mathrm{Spec}(\hat{M})$ なら, $M = \hat{M}$ である.

注意3. [6] により 正の scalar curvature をもつ n次元 compact Einstein Kaehler 多様体 に対して，$\lambda_1 \geq \frac{\tau}{n}$ が成り立つ．等号成立の必要十分条件は，M が，a one-parameter group of isometries を許容することである．

注意4. 定理2 は，A. Ros [9] が，不等式 及び，等号が成り立てば，M は Einstein で，$T = k g|_{NM \times NM}$ であることを証明している．定理3，4 は，例外型の Einstein 平行部分多様体 $E_6/Spin(10) \times T$ 以外の Einstein 平行部分多様体については，A. Ros [9] が得ている．つまり，定理2とは，独立に，定理3 の等号の必要十分条件が，"M が Einstein 平行部分多様体" ということを，[9] において，示していたが，$E_6/Spin(10) \times T$ の λ_2 が求められていなかったのである．Classical type については，Nagano [4] が求めている．

定理5.

M を $\mathbb{C}P^m$ の compact Einstein Kaehler 部分多様体とし，Immersion は full とする．$\widehat{M}$ を degree 3 の Einstein compact Hermitian symmetric 部分多様体とする．

もし，$Spec(M) = Spec(\widehat{M})$ なら，$M = \widehat{M}$ である．

§1. 準備.

$x : M^n \longrightarrow E^N$ を n次元 compact Rieman. 多様体から，

N次元ユークリッド空間への isometric immersion とし，H を M の E^N における mean curvature vector とする．

このとき，次を得る．

(1.1) $\Delta x = -nH = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k x_k,$

(1.2) $\Delta^2 x = -n\Delta H = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^2 x_k,$

(1.3) $\Delta^3 x = -n\Delta^2 H = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^3 x_k.$

ここで，g をユークリッド metric とするとき，

$$\int_M g(x_k, x_l) = 0 \qquad \text{for } k \neq l,$$

であるから，

$$\int_M g(x_k, x_k) = a_k$$

とおく．このとき，

$$-n\int_M g(x, H) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k a_k, \qquad n^2\int_M g(H,H) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^2 a_k,$$

$$n^2\int_M g(H,\Delta H) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^3 a_k, \qquad n^2\int_M g(\Delta H,\Delta H) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^4 a_k,$$

である．

ここで，また，

$$\Phi_1 = n^2\int_M g(H,H) + n\lambda_1\int_M g(x,H),$$

$$\Phi_2 = n^2\int_M g(H,\Delta H) - n^2\lambda_1\int_M g(H,H), \quad \Phi_3 = n^2\int_M g(\Delta H,\Delta H) - n^2\lambda_1\int_M g(H,\Delta H),$$

とおけば，次を得る．

(1.4) $\Phi_1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k(\lambda_k - \lambda_1)a_k \geq 0,$

(1.5) $\Phi_2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^2(\lambda_k - \lambda_1)a_k \geq 0,$

$$(1.6)\quad \Phi_3 = \sum_{k\in N} \lambda_k^3 (\lambda_k - \lambda_1) a_k \geqq 0,$$

$$(1.7)\quad \Phi_4 := \Phi_2 - \lambda_2 \Phi_1 = \sum_{k\in N} \lambda_k (\lambda_k - \lambda_2)(\lambda_k - \lambda_1) a_k \geqq 0,$$

$$(1.8)\quad \Phi_5 := \Phi_3 - \lambda_2 \Phi_2 - \lambda_3 \Phi_4$$
$$= \sum_{k\in N} \lambda_k (\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)(\lambda_k - \lambda_3) a_k \geqq 0.$$

(1.4) ～ (1.6) において，等号は，order{1} のときに限り成り立つ．(1.7) においては，order{1}, order{2}, order{1, 2} のいずれかのときに限り，また，(1.8) においては，order{1}, order{2}, order{3}, order{1, 2}, order{1, 3}, order{2, 3}, order{1, 2, 3} のいずれかのときに限り，等号が成り立つ．

§2. Kaehler 部分多様体 I.

$HM(m+1) = \{P \in gl(m+1, \mathbb{C}) \mid \overline{P} = P^t\}$ とし，metric g を
$$g(P, Q) = 2\,\mathrm{trace}(PQ) \quad \text{for} \quad P, Q \in HM(m+1)$$
で定義する．$\mathbb{C}P^m$ を正則断面曲率 1 の複素射影空間とするとき，$\mathbb{C}P^m$ の $HM(m+1)$ への imbedding F は，次で定義される：
$$F(\mathbb{C}P^m) = \{P \in HM(m+1) \mid P^2 = P,\ \mathrm{trace}\,P = 1\}$$
F は，$\mathbb{C}P^m$ の $H_1M(m+1) := \{P \in HM(m+1) \mid \mathrm{trace}\,P = 1\}$ への full isometric imbedding を定義する．以下，特にことわらない限り，$\mathbb{C}P^m$ と $F(\mathbb{C}P^m)$ を同一視することにする．

M^n を $\mathbb{C}P^m$ の n 次元 compact Kaehler 部分多様体とする．

σ, A, H によって，それぞれ，M の $\mathbb{C}P^m$ における second fundamental form，対応する shape operator，M の $H_1M(m+1)$ における mean curvature vector を表わすことにする．M が $\mathbb{C}P^m$ で minimal であることと，$\tilde{F}$ の second fundamental form が平行であること等を用いて，ΔH を計算することにより，A. Ros [9] は次を得た．

<u>Lemma 2.1</u>　$P: M^n \longrightarrow \mathbb{C}P^m$ を isometric immersion とする．

(2.1)　$g(P, P) = 2$,

(2.2)　$g(P, H) = -1$,

(2.3)　$g(P, \Delta H) = -(n+1)$,

(2.4)　$g(H, H) = (n+1)/2n$,

(2.5)　$g(H, \Delta H) = (n+1)^2/2n + (1/2n^2)\|\sigma\|^2$,

(2.6)　$$g(\Delta H, \Delta H) = (n+1)^3/2n + [(n+1)/n^2]\|\sigma\|^2 + (1/n^2)\sum_{\lambda,\mu=1}^{m-n}(\mathrm{trace}\, A_\lambda A_\mu)^2 + (1/n^2)\,\mathrm{trace}\left(\sum_{\lambda=1}^{m-n} A_\lambda^2\right)^2,$$

が成り立つ．ここで，$A_\lambda = A_{\xi_\lambda}$，であり，$\xi_1, \cdots, \xi_{m-n}$ は，M の orthonormal normal basis である．

R, S, τ によって，それぞれ，M の curvature tensor, Ricci tensor, scalar curvature を表わすことにすると，

(2.7)　$\tau = n(n+1) - \|\sigma\|^2$,

(2.8)　$\|S\|^2 = \frac{1}{2}n(n+1)^2 - (n+1)\|\sigma\|^2 + \mathrm{trace}\left(\sum_\lambda A_\lambda^2\right)^2$, (2,9) $\|R\|^2 = 2n(n+1) - 4\|\sigma\|^2 + 2\sum_{\lambda,\mu}(\mathrm{trace}\, A_\lambda A_\mu)^2$,

(2,10) $-\frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2 = \|\nabla\sigma\|^2 + \frac{(n+2)}{2}\|\sigma\|^2 - 2\,\mathrm{trace}(\sum_\lambda A_\lambda^2)^2 - \sum_{\lambda,\mu}(\mathrm{trace}\, A_\lambda A_\mu)^2$,

が成り立つことが、知られている．

さらに，

(2,11) $\frac{1}{2}n(n+1)\|R\|^2 \geqq 2n\|S\|^2 \geqq \tau^2$,

が，成り立ち，最初の等号は，M が const. holomorphic sectional curvature をもつときに限り成り立ち，2番目の等号は，M が，Einstein のときに限り，成り立つ

§3. Kaehler 部分多様体 II.

M を $\mathbb{C}P^m$ の n 次元 Kaehler 部分多様体とする．$TM^{\mathbb{C}}$ を，M の tangent bundle TM の複素化とする．このとき，

$TM^{\mathbb{C}} = TM^+ + TM^-$ (orthogonal sum)，であり，各 $TM^\pm$ の fibre $T_pM^\pm$ at $p \in M$ は，$T_pM^{\mathbb{C}}$ の complex structure tensor J の $\pm\sqrt{-1}$-eigenspace である．同様にして，normal bundle NM の複素化 $NM^{\mathbb{C}}$ に対して，$NM^{\mathbb{C}} = NM^+ + NM^-$ (orthogonal sum).

さらに，$\overline{T_pM^\pm} = T_pM^\mp$，$\overline{N_pM^\pm} = N_pM^\mp$ が成り立つ．

$\mathbb{C}P^m$ 上に，local field of unitary frames $\{e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_m\}$ を選んで，M に制限して，$e_1, \cdots, e_n$ は，M に接しているとする．この frame field に関して，dual frame field を，$\{\omega^1, \cdots, \omega^n, \omega^{n+1}, \cdots, \omega^m\}$ とする．$\mathbb{C}P^m$ の Kaehler metric は，

$\sum_{A=1}^{m} \omega^A \cdot \overline{\omega^A}$ によって与えられる．M の induced Kaehler metric g は，$g = \sum_{a=1}^{n} \omega^a \cdot \overline{\omega^a}$ によって与えられる．

以下，$a, b, c, \cdots = 1, \cdots, n$ ； $\alpha, \beta, \gamma, \cdots = n+1, \cdots, m$ とする．

ω^α を M に制限して，

(3,1) $\omega^\alpha = 0$， を得る．

これを，外微分して，Cartan の Lemma から，

(3,2) $\omega_a^\alpha = \sum_b K_{ab}^\alpha \omega^b$， $K_{ab}^\alpha = K_{ba}^\alpha$，

が，得られる．K_{ab}^α は，second fundamental tensor と呼ばれる．

M の構造方程式は，

(3,3) $d\omega^a + \sum_b \omega_b^a \wedge \omega^b = 0$， $\omega_b^a + \overline{\omega_a^b} = 0$，

(3,4) $d\omega_b^a + \sum_c \omega_c^a \wedge \omega_b^c = \Omega_b^a$， $\Omega_b^a = \sum_{c,d} R_{bc\bar{d}}^a \omega^c \wedge \overline{\omega^d}$，

(3,5) $d\omega_\beta^\alpha + \sum_\gamma \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma = \Omega_\beta^\alpha$， $\Omega_\beta^\alpha = \sum_{c,d} R_{\beta c\bar{d}}^\alpha \omega^c \wedge \overline{\omega^d}$，

によって与えられる．このとき，次の基本公式が得られる

(3,6) $R_{bc\bar{d}}^a = \frac{1}{4}(\delta_b^a \delta_{cd} + \delta_c^a \delta_{bd}) - \sum_\alpha K_{bc}^\alpha \overline{K_{ad}^\alpha}$，

(3,7) $S_{c\bar{d}} = \frac{(n+1)}{2} \delta_{cd} - 2 \sum_{\alpha,a} K_{ac}^\alpha \overline{K_{ad}^\alpha}$，

(3,8) $\tau = n(n+1) - 4 \sum_{\alpha,c,d} K_{cd}^\alpha \overline{K_{cd}^\alpha}$，

(3,9) $R_{\beta c\bar{d}}^\alpha = \frac{1}{4} \delta_\beta^\alpha \delta_{cd} + \sum_a K_{ac}^\beta \overline{K_{ad}^\alpha}$．

(2,7)～(2,9) は，(3,6)～(3,8) によって，求められる．

さて，K_{ab}^α の高階の共変微分を定義する．

まず,

$$\sum_c K^\alpha_{abc}\omega^c + \sum_c K^\alpha_{ab\bar{c}}\overline{\omega^c} = dK^\alpha_{ab} - \sum_c K^\alpha_{cb}\omega^c_a - \sum_c K^\alpha_{ac}\omega^c_b + \sum_\beta K^\beta_{ab}\omega^\alpha_\beta,$$

このとき,

(3,10) $K^\alpha_{abc} = K^\alpha_{acb} = K^\alpha_{bac}$, $K^\alpha_{ab\bar{c}} = 0$ である.

$K^\alpha_{a_1\cdots a_m}$ $(m \geqq 2)$ の共変微分 $K^\alpha_{a_1\cdots a_m a_{m+1}}$, $K^\alpha_{a_1\cdots a_m \bar{a}_{m+1}}$ を, inductive に定義できる. ここで,

$$\left(\overline{K^\alpha_{a_1\cdots a_m}}\right)_b = \overline{K^\alpha_{a_1\cdots a_m \bar{b}}}, \quad \left(\overline{K^\alpha_{a_1\cdots a_m}}\right)_{\bar{b}} = \overline{K^\alpha_{a_1\cdots a_m b}},$$

が, 成り立つ.

<u>Lemma 3, 1</u>. [5]

(3, 11) $K^\alpha_{a_1\cdots a_m}$ は, $a_1, \cdots, a_m$ に関して symmetric.

(3, 12)
$$K^\alpha_{a_1\cdots a_m \bar{b}} = \frac{(m-2)}{4}\sum_{r=1}^{m} K^\alpha_{a_1\cdots\hat{a}_r\cdots a_m}\delta_{a_r b} - \sum_{r=1}^{m-2}\frac{1}{r!(m-r)!}\sum_{\sigma,\beta,c} K^\alpha_{ca_{\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(r)}} K^\beta_{a_{\sigma(r+1)}\cdots a_{\sigma(m)}}\overline{K^\beta_{cb}}, \quad m \geqq 3$$

ここで, σ に関する和は, $(1, \cdots, m)$ のすべての permutations に関してとっている.

§4. 定理の証明.

Lemma 2, 1 と (1, 4) から (いま, M は実 $2n$ 次元),

$\lambda_1 \leqq n+1$ を得る. 等号が成り立てば, M は order{1} であるから, (1, 5) においても等号が成り立つ.

再び，Lemma 2.1 より，

$$0 = \Phi_2 = 2n(n+1)^2 \mathrm{vol}(M) + 2\int_M \|\sigma\|^2 - 2n(n+1)\lambda_1 \mathrm{vol}(M)$$
$$= 2\int_M \|\sigma\|^2 .$$

したがって，$\sigma = 0$，i.e. M は，totally geodesic.

逆に，$\mathbb{C}P^n$ に対して，$\lambda_1 = n+1$ であることは，よく知られている．— 定理 C の証明終り．

定理 A と B の証明は省略する．

また，(1.7) と Lemma 2.1 より，

$$0 \leqq \Phi_4 = 4n^2\int_M g(H, \Delta H) - 4n^2(\lambda_1+\lambda_2)\int_M g(H,H)$$
$$- 2n\lambda_1\lambda_2\int_M g(P,H)$$
$$= 2n(n+1)^2 \mathrm{vol}(M) + 2\int_M \|\sigma\|^2 - 2n(n+1)(\lambda_1+\lambda_2)\mathrm{vol}(M)$$
$$+ 2n\lambda_1\lambda_2 \mathrm{vol}(M).$$

これと，(2.7) とから，(0.2) を得る．等号成立の必要十分条件は，M が order $\{1\}$ または，order $\{2\}$ または，order $\{1,2\}$ であるが，定理 A と注意 1 より，order $\{1\}$ の case は，M が totally geodesic で，order $\{2\}$ の case は起こり得ない．order $\{1,2\}$ の case は，immersion が full であれば，定理 B により，

M は Einstein で，$T = c\, g|_{NM \times NM}$ が成り立つ．

$T(\xi, \eta) = \mathrm{trace}\, A_\xi A_\eta$，$\xi, \eta \in NM$ であった．

$A_{J\xi} = J A_\xi$，$A_\xi \circ J = -J \circ A_\xi$ for any $\xi \in NM$

であるから，$T(J\xi, J\eta) = T(\xi, \eta)$ for any $\xi, \eta \in NM$ が成り立つ

次に，T を $NM^c \times NM^c$ から $\mathbb{C}$ への complex bilinear mapping に拡張すれば，

$$T(N_pM^+, N_pM^+) = 0, \quad T(N_pM^-, N_pM^-) = 0 \quad \text{for any } p \in M$$

を得る．したがって，

$$(4,1) \quad T = \tilde{c} g|_{NM \times NM} \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \sum_{a,b} K^{\alpha}_{ab} \overline{K^{\beta}_{ab}} = \frac{\tilde{c}}{2} \delta_{\alpha\beta}$$

を得る．このとき，次を得る．

<u>Proposition 1.</u>[13] M を，$\mathbb{C}P^m$ の n 次元 Einstein Kaehler 部分多様体とする．もし，$T = \tilde{c} g|_{NM \times NM}$ なら，M は，平行部分多様体である

proposition 1 の証明）

M が Einstein なら，(3,7)，(3,8)，(2,7) より，

$$\sum_{\alpha,a} K^{\alpha}_{ac} \overline{K^{\alpha}_{ad}} = \frac{\|\sigma\|^2}{4n} \delta_{cd} \quad \text{が成り立つ}$$

したがって，(3,10) より，

$$(4,2) \quad \sum_{\alpha,a} K^{\alpha}_{a,bc} \overline{K^{\alpha}_{ad}} = 0.$$

Lemma 3,1 を用いて，

$$K^{\alpha}_{abc\bar{d}} = \frac{1}{4}\{K^{\alpha}_{bc}\delta_{ad} + K^{\alpha}_{ac}\delta_{bd} + K^{\alpha}_{ab}\delta_{cd}\} - \sum_{\beta,e}\{K^{\alpha}_{ea}K^{\beta}_{bc} + K^{\alpha}_{eb}K^{\beta}_{ca} + K^{\alpha}_{ec}K^{\beta}_{ab}\}\overline{K^{\beta}_{ed}}$$

を得るので，これと，(3,10)，(4,2) により，

(4.3) $\sum_{\alpha,a,b,c} K^{\alpha}_{abc}\left(\overline{K^{\alpha}_{abcd\bar{d}}}\right)=0$ を得る.

したがって,

$$(4.4)\quad 0=\sum K^{\alpha}_{abcd\bar{d}}\left(\overline{K^{\alpha}_{abcd\bar{d}}}\right)+\sum K^{\alpha}_{abc}\left(\overline{K^{\alpha}_{abcdd}}\right)$$
$$=\sum K^{\alpha}_{abcd\bar{d}}\left(\overline{K^{\alpha}_{abcd\bar{d}}}\right)+\frac{3}{4}\sum K^{\alpha}_{abc}\overline{K^{\alpha}_{abc}}$$
$$-3\sum K^{\alpha}_{abc}\overline{K^{\beta}_{bc}}K^{\beta}_{ed}\overline{K^{\alpha}_{eda}}\ ,$$

を得る. $T=kg|_{NM\times NM}$ なら, (4.1) より, $\sum_{a,b} K^{\alpha}_{ab}\overline{K^{\beta}_{ab}}=\frac{k}{2}\delta_{\alpha\beta}$ であり, Einstein なら, $k=\mathrm{const.}$ したがって, $\sum_{b,c} K^{\alpha}_{abc}\overline{K^{\beta}_{bc}}=0$ であり, (4.4) の右辺の第1, 2項は, 共に, non-negative であるから, 結局, $K^{\alpha}_{abc}=0$, i.e. M は平行部分多様体である. — proposition 1 の証明終り.

注意5. proposition 1 は, 証明からわかるように, 実際は, T が normal connection に関して平行で, かつ, Ricci tensor が平行であれば, 成り立つ. Proposition 1 により, order {1, 2} ならば, M は, Einstein 平行部分多様体 (totally geodesic は除く) であることがわかる. 逆については, Nagano [4] により, classical type の compact Hermitian symmetric spaces については, その rank 番目までの eigenvalues が求められていて, しかも, exceptional type $E_6/Spin(10)\times T$ については, §6 で計算されるので, ここで, その値を表1に示しておく. 表1により, 定理2の証明は, 完結し, しかも, Einstein

平行部分多様体(totally geodesic は除く)は，order{1, 2} であることがわかる．以上で，定理1の iii) $\Longleftrightarrow$ iv) (定理B), iv) $\Longrightarrow$ i) (prop. 1)，i) $\Longleftrightarrow$ ii)，ii) $\Longrightarrow$ iii) (定義から明らか) が既にわかっている．後は，iv) と v) の同値性を示せばよい．そのために，

定義3. $R^\alpha_\beta = \sum_c R^\alpha_{\beta c \bar{c}}$ とおく．この NM の tensor R^α_β を，normal Ricci tensor と呼ぶことにする．

もし，$R^\alpha_\beta = \lambda\,\delta_{\alpha\beta}$ for some real function λ on M ならば，NM は Einstein kaehler metric を許容するということにする．

(3, 9), (2, 7), (3, 8), (4, 1) により，

$$T = \tfrac{1}{2} g|_{NM \times NM} \overset{\text{同值}}{\Longleftrightarrow} R^\alpha_\beta = \left\{ \frac{n}{4} + \frac{\|\sigma\|^2}{4(m-n)} \right\} \delta_{\alpha\beta}.$$

従って，定義3から，

iv) $\Longleftrightarrow$ v) は，示された．— 定理1の証明終り．

定理3については，$\lambda_1 \leq \int_M \tau \Big/ [n\,\mathrm{vol}(M)]$ ならば，(0, 2) により，

$$(n+1-\lambda_1)(n+2-\lambda_2) \geq 0 \quad \text{が成り立つ．}$$

従って，M が totally geodesic でなければ，定理Cにより，

$$\lambda_2 \leq n+2 \quad \text{を得る．}$$

等号が成り立てば，(0, 2) で等号が成り立つから，M は，Einstein 平行部分多様体である．逆は，表1から従う．

表 1.　Einstein 平行部分多様体 (totally geodesic は除く)

部分多様体	$\dim_{\mathbb{C}}$	τ	λ_1	λ_2
$\mathbb{C}P^n(1/2)$	n	$n(n+1)/2$	$(n+1)/2$	$n+2$
$\mathbb{Q}^n$	n	n^2	n	$n+2$
$\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n$	$2n$	$2n(n+1)$	$n+1$	$2n+2$
$U(s+2)/U(2)\times U(s)$ $s \geqq 3$	$2s$	$2s(s+2)$	$s+2$	$2s+2$
$SO(10)/U(5)$	10	80	8	12
$E_6/Spin(10)\times T$	16	192	12	18

また，次元，$\mathrm{vol}(M)$，$\int_M \tau$ は，spectral invariants [1] であるから，定理 4 は，定理 3 から従う

proposition 2.

M を，$\mathbb{C}P^m$ の n 次元 compact Kaehler 部分多様体とし，次の 3 つの条件をみたすとする：

i) $\lambda_1 = \int_M \tau \Big/ [n\,\mathrm{vol}(M)]$,

ii) $\int_M \left[\|R\|^2 + 2\|S\|^2\right] \leqq n\left[(\lambda_1-\lambda_2)(n+1-\lambda_1) + (n+3)\lambda_1\right] \mathrm{vol}(M)$,

iii) 平行部分多様体でない，

このとき，$\lambda_3 \leqq n+3$ である．

等号成立の必要十分条件は，(i), ii), iii) の仮定のもとで)

M が order{1, 2, 3} であることである.

proposition 2 の証明) (1, 8), Lemma 2, 1, (2, 7)〜(2, 9) より,

$$0 \leq \Phi_5 = 4n^2\int_M g(\Delta H, \Delta H) - 4n^2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\int_M g(H, \Delta H)$$

$$+4n^2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\int_M g(H, H) + 2n\lambda_1\lambda_2\lambda_3\int_M g(P, H)$$

$$= 2n\,\mathrm{vol}(M)\Big[(n+1)(n+2)(n+3) - (n+1)(n+2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + (n+1)(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\Big]$$

$$+ 2(\lambda+\lambda_2+\lambda_3-4n-8)\int_M \tau$$

$$+ 2\int_M \left[\|R\|^2 + 2\|S\|^2\right]$$

従って, 仮定 i), ii) により

$$(n+1-\lambda_1)(n+2-\lambda_2)(n+3-\lambda_3) \geq 0$$ を得る.

仮定 iii) と, 定理 3 により, $\lambda_3 \leq n+3$ を得る.

等号成立の必要十分条件は, 注意 1 と 2 を考慮すれば, 定理 A, 定理 1, 仮定 iii) により, M が order{1, 2, 3} であることがわかる. — proposition 2 の証明終り.

proposition 2 と, 表 2, 3 から, 次を得る.

proposition 3.

Degree 3 の compact irreducible Hermitian symmetric 部分多様体と $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ (first-canonical imbedding) は, order{1, 2, 3} である.

表2. Degree 3 の compact irreducible Hermitian symmetric submanifolds

部分多様体	$\dim_{\mathbb{C}}$	τ	$\lVert S\rVert^2$	$\lVert R\rVert^2$	λ_1	λ_2	λ_3
$\mathbb{C}P^n(1/3)$	n	$n(n+1)/3$	$n(n+1)^2/18$	$2n(n+1)/9$	$(n+1)/3$	$2(n+2)/3$	$n+3$
$SU(r+3)/S(U(r)\times U(3))$ $r\geq 3$	$3r$	$3r(r+3)$	$3r(r+3)^2/2$	$6r(3r+1)$	$r+3$	$2r+4$	$3r+3$
$Sp(3)/U(3)$	6	24	48	66	4	7	9
$SO(12)/U(6)$	15	150	750	660	10	16	18
$SO(14)/U(7)$	21	252	1512	1344	12	20	24
$E_7/E_6\times T$	27	486	4374	3132	18	28	30

表3. Degree 3 の compact reducible Einstein Hermitian symmetric submanifolds

部分多様体	$\dim_{\mathbb{C}}$	λ_1	λ_2	λ_3
$\mathbb{C}P^n\times\mathbb{C}P^n\times\mathbb{C}P^n$	$3n$	$n+1$	$2n+2$	$2n+4$
$\mathbb{C}P^n\times\mathbb{C}P^{2n+1}(1/2)$	$3n+1$	$n+1$	$2n+2$	$2n+3$
$\mathbb{C}P^n\times Q^{n+1}$ $(n\geq 2)$	$2n+1$	$n+1$	$n+3$	$2n+2$
$\mathbb{C}P^n\times[SU(n+1)/S(U(2)\times U(n-1))]$ $n\geq 4$	$3n-2$	$n+1$	$2n$	$2n+2$
$\mathbb{C}P^7\times[SO(10)/U(5)]$	17	8	12	16
$\mathbb{C}P^{11}\times[E_6/Spin(10)\times T]$	27	12	18	24

§5. 定理5の証明.

$\tilde{R}, \tilde{S}, \tilde{\tau}, \tilde{T}, \tilde{G}$ によって, $\tilde{M}$ の curvature tensor, Ricci tensor, scalar curvature, 定理 B で定義されている tensor, second fundamental form を表わすことにする. まず,

$$\dim(M) = \dim(\tilde{M}), \quad \mathrm{Vol}(M) = \mathrm{Vol}(\tilde{M}), \quad \int_M \tau = \int_{\tilde{M}} \tilde{\tau},$$

$$\int_M \left[2\|R\|^2 - 2\|S\|^2 + 5\tau^2 \right] = \int_{\tilde{M}} \left[2\|\tilde{R}\|^2 - 2\|\tilde{S}\|^2 + 5\tilde{\tau}^2 \right]$$

が成り立つ [1]. M, $\tilde{M}$ は, Einstein であるから,

$\tau = \tilde{\tau}$, $\|S\|^2 = \|\tilde{S}\|^2$, $\int_M \|R\|^2 = \int_{\tilde{M}} \|\tilde{R}\|^2$ である.

従って, (2,7)〜(2,11) を用いると,

(5,1) $\|\sigma\|^2 = \|\tilde{\sigma}\|^2$, $\int_M \|T\|^2 = \int_{\tilde{M}} \|\tilde{T}\|^2$, $\int_M \|\nabla\sigma\|^2 = \int_{\tilde{M}} \|\tilde{\nabla}\tilde{\sigma}\|^2$

が成り立つ.

さらに, M が Einstein ならば, 次の量は spectral invariants であることが知られている [10].

(5,2) $\int_M \left[-\frac{1}{9}\|\nabla R\|^2 + \frac{8}{21} \sum R^*_{ijkl} R^*_{klmn} R^*_{mnij} \right]$.

ここで, R^*_{ijkl} は, curvature tensor R の real local ortho-normal frames に関する成分を示す. 次に,

(5,3) $\sum R^*_{ijkl} R^*_{klmn} R^*_{mnij} = 64 \sum R^a_{bc\bar{d}} R^c_{de\bar{f}} R^e_{fa\bar{b}}$

$= n(n+1)(n+3) - 2(n+3)\|\sigma\|^2 + \frac{2}{n}\|\sigma\|^4 + 4\|T\|^2$

$- 64 \sum K^\alpha_{ab} \overline{K^\beta_{bc}} K^\gamma_{cd} \overline{K^\alpha_{de}} K^\beta_{ef} \overline{K^\gamma_{fa}}$.

(5,1)〜(5,3) により,

(5.4) $$\int_M \left[-\frac{1}{9}\|\nabla R\|^2 - \frac{512}{21}\sum K^{\alpha}_{ab}\overline{K^{\beta}_{bc}}K^{\gamma}_{cd}\overline{K^{\alpha}_{de}}K^{\beta}_{ef}\overline{K^{\gamma}_{fa}} \right]$$

は、spectral invariant である。

ここで、$A_m = \sum_{\alpha, a_1, \cdots, a_m} K^{\alpha}_{a_1 \cdots a_m}\overline{K^{\alpha}_{a_1 \cdots a_m}}$ とおく。$(m \geq 2)$.

このとき、

$$\int_M A_4 = -\int_M \sum K^{\alpha}_{abcd\bar{d}}\overline{K^{\alpha}_{abc}}$$

であるから、Lemma 3.1 を用いて、この量を計算し、(5.1) と (5.4) を考慮すると、

$$\int_M \left[-\frac{1}{9}\|\nabla R\|^2 + \frac{256}{63}\sum K^{\alpha}_{abc}\overline{K^{\alpha}_{de}}K^{\beta}_{de}\overline{K^{\beta}_{abc}} - \frac{256}{63}A_4 \right]$$

という量は、spectral invariant であることがわかる。

次に、$\|\nabla R\|^2 = 64\sum K^{\alpha}_{abc}\overline{K^{\alpha}_{de}}K^{\beta}_{de}\overline{K^{\beta}_{abc}}$. であることが確かめられるので、$\int_M \left[3\|\nabla R\|^2 + 256 A_4\right]$ という量は、spectral invariant であることがわかる。 ここで、

<u>Lemma 5.1.</u> [11]

M を $\mathbb{C}P^m$ の degree r の compact Hermitian symmetric 部分多様体で、imbedding は full とする。このとき、

$$A_r \neq 0, \quad A_{r+1} = 0$$ が成り立つ。

Lemma 5.1 と定理5の仮定により、

$$\int_M \left[3\|\nabla R\|^2 + 256 A_4\right] = 0$$ が得られる。

$\|\nabla R\|^2 \geq 0$, $A_4 \geq 0$ であるから、結局、$\nabla R = 0$, $A_4 = 0$,

が得られ，M は，compact Hermitian symmetric 部分多様体で，degree ≤ 3 となる．ここで，表1〜3と，対称空間の埋めこみの分類[5]により，定理の結論は得られる．

§6. 固有値の計算．([3], [12], [14] を参照)

(G, K) を Rieman. symmetric pair とし，$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$ によって，それぞれ，G, K の Lie algebra を表わすことにする．このとき，標準分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を得る．$\Pi(G) := \{\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell\}$ を fundamental root system とし，$N_1, \cdots, N_\ell$ を

$2(N_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j) = \delta_{ij}$ for $N_i \in \mathfrak{t}$ で定義される $\mathfrak{g}$ の fundamental weights とする，ここで，$\mathfrak{t}$ は，$\mathfrak{m}$ に含まれる $\mathfrak{g}$ の maximal Abelian subalgebra を含む $\mathfrak{g}$ の maximal Abelian subalgebra であり，(,) は，$\mathfrak{t}$ 上の内積である．また，$\ell = \mathrm{rank}(G)$．次に，M_i を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の fundamental weights とする．(これを定義するには，いろいろと準備が必要なので省略するが，これは，佐竹図形から求められる)．次の事実が知られている．

<u>Fact 1.</u> (G, K) を compact symmetric pair とし，G/K は，単連結であるとする．ここで，

$$D(G, K) := \left\{ \sum_{i=1}^{s} m_i M_i \mid m_i \in \mathbb{Z},\ m_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq s \right\}$$

とおく．ρ を，K に関する G の球表現とするとき，$\mathfrak{t}$ に関する ρ の highest weight $\lambda(\rho)$ は，$D(G, K)$ に属する．

Fact 2. 写像：$\rho \longrightarrow \lambda(\rho)$ は bijective である.

さて，$E_6/Spin(10)\times T$ の Δ の eigenvalues を計算する.

まず，[2] により，

$$\alpha_1=\tfrac{1}{2}(e_1+e_8)-\tfrac{1}{2}(e_2+\cdots+e_7),\quad \alpha_2=e_1+e_2,\quad \alpha_3=e_2-e_1,$$

$$\alpha_4=e_3-e_2,\quad \alpha_5=e_4-e_3,\quad \alpha_6=e_5-e_4,$$

ここで，$e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^8$ for $i=1,\cdots,8$.

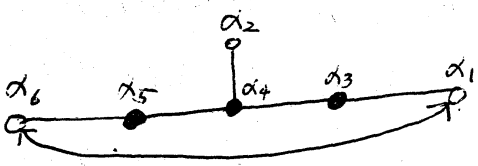
$$N_1=\tfrac{2}{3}(e_8-e_7-e_6),\quad N_2=\tfrac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5-e_6-e_7+e_8),$$

$$N_3=\tfrac{5}{6}(e_8-e_7-e_6)+\tfrac{1}{2}(-e_1+e_2+e_3+e_4+e_5),\quad N_4=e_3+e_4+e_5-e_6-e_7+e_8,$$

$$N_5=\tfrac{2}{3}(e_8-e_7-e_6)+e_4+e_5,\quad N_6=\tfrac{1}{3}(e_8-e_7-e_6)+e_5.$$

ここで，$\delta(G):=\sum_i N_i=e_2+2e_3+3e_4+4e_5+4(e_8-e_7-e_6)$.

左の図形により，M_i は次で与えられる.



$$M_1=N_1+N_6=e_8-e_7-e_6+e_5,$$

$$M_2=N_2=\tfrac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4+e_5-e_6-e_7+e_8).$$

Fact 1, 2 から，$\lambda(\rho)=m_1M_1+m_2M_2$. 従って，Freudenthal の公式により，既約表現 ρ の Casimir operator の eigenvalue A_ρ は，次で与えられる.

$$A_\rho=\tfrac{1}{2}\left(\lambda(\rho)+2\delta(G),\lambda(\rho)\right)=2m_1(m_1+m_2+8)+m_2(m_2+11).$$

Δ の eigenvalues $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$ は，A_ρ で与えられるので，

$$\lambda_1=12\ (m_1=0,\ m_2=1),\quad \lambda_2=18\ (m_1=1,\ m_2=0),\ \cdots$$

を得る. $E_7/E_6\times T$ についても，同様にして，

$$A_p = m_1^2 + 2m_2^2 + 3m_3^2 + 2m_1m_2 + 4m_2m_3 + 2m_3m_1 + 17m_1 + 26m_2 + 27m_3,$$

$$\lambda_1 = 18 \ (m_1 = 1,\ m_2 = m_3 = 0),\quad \lambda_2 = 28 \ (m_1 = m_3 = 0,\ m_2 = 1),$$

$$\lambda_3 = 30 \ (m_1 = m_2 = 0,\ m_3 = 1),\ \cdots\cdots .$$

References.

[1] M. Berger, P. Gauduchon and E. Mazet, le spectre d'une variete Riemannienne, Lecture Notes in Math, No. 194, Springer-Verlag. Berlin 1971.

[2] N. Bourbaki, Elements de Mathematique, Groupes et Algebres de Lie, Herman, Paris, (1968).

[3] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, New-York - London, 1978.

[4] T. Nagano, On the minimum eigenvalues of the Laplacians in Riemannian manifolds, Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo, 11 (1961), 177-182.

[5] H. Nakgawa and R. Takagi, On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 638 - 667.

[6] M. Obata, Riemannian manifolds admitting a solution of a certain system of differential equations, Proc. U.S. - Japan Sem. Diff. Geom., Kyoto Japan 1965, Nihon Hyoronsha, Tokyo, 1966.

[7] K. Ogiue, Differential geometry of Kaehler submanifolds, Advances in Math., 13 (1974), 73-114.

[8] A. Ros, Spectral geometry of CR-minimal submanifolds in the complex projective space, Kodai Math. J., 6 (1983), 88–99.

[9] A. Ros, On spectral geometry of Kaehler submanifolds, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 433–448.

[10] T. Sakai, On eigenvalues of Laplacian and curvature of Riemannian manifold, Tohoku Math. J., 23 (1971), 589–603.

[11] R. Takagi and M. Takeuchi, Degree of symmetric Kaehlerian submanifolds of a complex projective space, Osaka J. Math., 14 (1977), 501–518.

[12] M. Takeuchi, Polynomial representations associated with symmetric bounded domains, Osaka J. Math., 10 (1973), 441–475.

[13] S. Udagawa, Einstein parallel Kaehler submanifolds in a complex projective space, to appear in Tokyo J. Math.

[14] S. Udagawa, Spectral geometry of Kaehler submanifolds of a complex projective space, to appear in J. Math. Soc. Japan.