数理解析研究所講究録
第 576 巻 1985 年 100-120

複素空間形内の余次元2のアインシュタインケーラー部分多様体

新潟大理学部　塚田和美（Kazumi Tsukada）

$\tilde{M}^m(\tilde{c})$ を m 次元複素空間形 即ち 定正則断面曲率 $\tilde{c}$ をもつ単連結完備な Kaehler 多様体とする。$\tilde{c}>0$ の時には Fubini-Study 計量の入った複素射影空間 $P_m(\mathbb{C})$ であり，$\tilde{c}=0$ の時には通常の Hermite 内積の入った複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^m$ であり，$\tilde{c}<0$ の時には Bergmann 計量の入った $\mathbb{C}^m$ 内の単位開球 D^m である。

$\tilde{M}^m(\tilde{c})$ 内の Kaehler 部分多様体とは，$\tilde{M}^m(\tilde{c})$ 内の複素部分多様体であり，外側の Kaehler 計量から導入された計量をもつものとする。ここで考えたいのは，特にこの導入された Kaehler 計量が Einstein となるものである。$\tilde{c}>0$ の時，そのような例を与えよう。M をコンパクト型既約 Hermite 対称空間とすると，各自然数 k に対応して，(M, g_k) から $P_{n(k)}(\mathbb{C})$ への正則等長埋め込みが存在する。ここで g_k は対称空間となる計量を適当に相似変形したものである。これらはすべて Einstein Kaehler 部分多様体の例になっている。特に複素

2次超曲面と呼ばれるもの $Q_n(\mathbb{C})$ は 複素射影空間の超曲面として次のように実現されている。

$$Q_n(\mathbb{C}) = \left\{ z = [z_0, z_1, \cdots, z_{n+1}] \in P_{n+1}(\mathbb{C}) \; ; \; z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 0 \right\} \subset P_{n+1}(\mathbb{C})$$

ここで $z_0, z_1, \cdots, z_{n+1}$ は $P_{n+1}(\mathbb{C})$ の斉次座標である。

もっと一般に，複素射影空間内の等質 Kaehler 部分多様体については完全に決定されており，その中で Einstein となるものは数多く存在する。それ以外の複素射影空間内の Einstein Kaehler 部分多様体の例は知られていないのは注目すべき事実である。

次のような問題が自然に考えられる。

問題： 複素空間形内の Einstein Kaehler 部分多様体を決定せよ。

この問いに対する接近のしかたはいろいろあると思うが，ここでは余次元の低いものについてはどうかという観点から見てみよう。

余次元 1 即ち超曲面の場合には，B. Smyth [4] S. S. Chern [1] によって次の結果が知られている。

<u>定理</u> $M^n \hookrightarrow \tilde{M}^{n+1}(\tilde{c})$ Einstein Kaehler 部分多様体

$\Rightarrow$ $\tilde{c} > 0$ の場合： M は totally geodesic または $P_{n+1}(\mathbb{C})$ 内の $Q_n(\mathbb{C})$ に局所合同.

$\tilde{c} \leqq 0$ の場合： M は totally geodesic

余次元2の場合に次の結果を得た。

定理 $M^n \hookrightarrow \tilde{M}^{n+2}(\tilde{c})$ Einstein Kaehler 部分多様体

$\Rightarrow$ $\tilde{c} > 0$ の場合： M は totally geodesic

または $Q_n(\mathbb{C}) \subset P_{n+1}(\mathbb{C}) \underset{\text{totally geodesic}}{\subset} P_{n+1}(\mathbb{C})$ なる $Q_n(\mathbb{C})$ に局所合同。

$\tilde{c} \leqq 0$ の場合： M は totally geodesic

以下の論説では上の定理の証明を与えよう。

注意 定理の仮定を Einstein から Ricci tensor が平行という条件に弱めた時には，定理の結論に $P_5(\mathbb{C})$ 内の $P_1(\mathbb{C}) \times P_2(\mathbb{C})$ の開部分多様体が加わるだけである。$P_1(\mathbb{C}) \times P_2(\mathbb{C})$ の $P_5(\mathbb{C})$ への埋め込みは次式で与えられる：

$$(z_0, z_1, w_0, w_1, w_2) \longrightarrow (z_0 w_0, z_0 w_1, z_0 w_2, z_1 w_0, z_1 w_1, z_1 w_2),$$

ここで (z_0, z_1)，(w_0, w_1, w_2) はそれぞれ $P_1(\mathbb{C})$，$P_2(\mathbb{C})$ の斉次座標である。（H. Nakagawa and R. Takagi [2] 参照）。

1. 準備

複素空間形内の Kaehler 部分多様体について，基礎的事

項を述べよう。詳しくは K. Ogiue [3], H. Nakagawa and R. Takagi [2] を参照。M を $\tilde{M}^m(c)$ 内の n-dim Kaehler 部分多様体とする。J, ⟨,⟩ を $\tilde{M}$ の複素構造及び Kaehler 計量，R を M の曲率テンソルとする。T_pM を p における M の接空間，$T_pM^{\mathbb{C}}$ をその複素化とし，J, ⟨,⟩, R 等は $T_pM^{\mathbb{C}}$ に複素線形に拡張しておく。$T_pM^{\mathbb{C}}$ の部分空間 $T_pM^{\pm}$，$T_pM^{\mathbb{C}}$ 上の Hermite 内積 (,) を次で定義する：

$$T_pM^{\pm} = \{ x \in T_pM^{\mathbb{C}} \ ; \ Jx = \pm\sqrt{-1}\,x \}$$

$$(x, y) = \langle x, \bar{y} \rangle \qquad x, y \in T_pM^{\mathbb{C}} ,$$

ここで $x \to \bar{x}$ という対応は $T_pM^{\mathbb{C}}$ 内の T_pM に関する複素共役を表す。この時次が成立する：

$$\overline{T_pM^{\pm}} = T_pM^{\mp}$$

$$T_pM^{\mathbb{C}} = T_pM^{+} + T_pM^{-} \quad (\text{Hermite 内積 } (,) \text{ に関する直交直和})。$$

p における埋め込みの法空間を N_pM と表し，その複素化を $N_pM^{\mathbb{C}}$ とする。$N_pM^{\mathbb{C}}$ について上記のことが同様に成立する。

埋め込みの第2基本形式を $h^2 \in C^\infty(Hom(\otimes^2 TM, NM))$ とする。h^2 から高階の基本形式 $h^j \in C^\infty(Hom(\otimes^j TM, NM))$ $(j \geq 3)$ を次のようにして帰納的に定義する：

$$h^{j+1}(x_1, \cdots, x_j, x_{j+1}) = \nabla^{\perp}_{x_{j+1}} h^j(x_1, \cdots, x_j) - \sum_{k=1}^{j} h^j(x_1, \cdots, \nabla_{x_{j+1}} x_k, \cdots, x_j)$$

$$x_k \in T_pM ,$$

ここで，X_k は $(X_k)_p = x_k$ となる p の近傍で定義された M 上の滑らかなベクトル場で，$\nabla^\perp$, ∇ はそれぞれ法バンドル NM 接バンドル TM 上の法接続，Riemann 接続を表す。
h^j も複素線形に拡張して，$Hom(\otimes^j TM^{\mathbb{C}}, NM^{\mathbb{C}})$ の smooth section になるようにしておく。以後 添字の j を省略して単に h と書くことにする。この時 次が成立する：

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_j) \in N_pM^+ \quad \text{for} \quad x_1, x_2 \in T_pM^+,\ x_3, \cdots, x_j \in T_pM^{\mathbb{C}} 。$$

複素空間形 $\tilde{M}^m(\tilde{c})$ の Kaehler 部分多様体については次の諸公式が成立する：

$$(1.1) \quad \langle R(e_i, \bar{e}_j)e_k, \bar{e}_l \rangle = \frac{\tilde{c}}{2}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \langle h(e_i, e_k), h(\bar{e}_j, \bar{e}_l) \rangle ,$$

$$(1.2) \quad h(e_i, e_j, e_k) = h(e_j, e_i, e_k) = h(e_i, e_k, e_j), \quad h(e_i, e_j, \bar{e}_k) = 0 ,$$

$$\begin{aligned}(1.3) \quad h(e_i, e_j, e_k, \bar{e}_l) = & \frac{\tilde{c}}{2}\{\delta_{il} h(e_j, e_k) + \delta_{jl} h(e_k, e_i) + \delta_{kl} h(e_i, e_j)\} \\ & - \sum_{s=1}^{n} \langle h(e_i, e_j), h(\bar{e}_l, \bar{e}_s) \rangle h(e_k, e_s) \\ & - \sum_{s=1}^{n} \langle h(e_j, e_k), h(\bar{e}_l, \bar{e}_s) \rangle h(e_i, e_s) \\ & - \sum_{s=1}^{n} \langle h(e_k, e_i), h(\bar{e}_l, \bar{e}_s) \rangle h(e_j, e_s) ,\end{aligned}$$

ここで $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は T_pM^+ の unitary frame である。
(1.1), (1.2) はそれぞれ Gauss の方程式 Codazzi の方程式であり，

(1.3) は [2] の Lemma 2.1 の特別な場合である。

埋め込みの shape operator を $A \in C^\infty(Hom(NM\otimes TM, TM))$ とする。A と第2基本形式 h とは $\langle A_\xi x, y\rangle = \langle h(x,y), \xi\rangle$ $x, y \in T_pM$, $\xi \in N_pM$ という関係があり、また $A_{J\xi} = JA_\xi$, $A_\xi J = -JA_\xi$ が成立する。Shape operator A も複素線形に拡張しておく。この時次が成立する：

$$A_{\bar\xi}(T_pM^+) \subset T_pM^- \;,\; A_{\bar\xi}(T_pM^-) = \{0\}$$

$$A_\xi(T_pM^+) = \{0\} \;,\; A_\xi(T_pM^-) \subset T_pM^+$$

$$\overline{A_{\bar\xi}x} = A_\xi \bar{x} \qquad \text{for } x \in T_pM^+,\ \xi \in N_pM^+ 。$$

従って $A_{\bar\xi}$ は T_pM^+ から T_pM^- への線形作用素，A_ξ は T_pM^- から T_pM^+ への線形作用素と見なすことができる。$A_{\bar\xi}^*$, A_ξ^* をそれぞれ $A_{\bar\xi}$, A_ξ の共役作用素とすると，$A_{\bar\xi}^* = A_\xi$ $A_\xi^* = A_{\bar\xi}$ となる。従って $A_\xi A_{\bar\xi}$ は T_pM^+ の半正定値 Hermite 作用素となり，正または零の固有値をもち，異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交している。次の事実は容易に確められるであろう。

<u>Lemma 1.1.</u> $\mu_1, \cdots, \mu_l$ を $A_\xi A_{\bar\xi}$ の互いに異なる固有値，V_j $(j=1,\cdots,l)$ をその固有空間とする。この時，$\overline{V_j}$ は固有値 μ_j

をもつ $A_{\bar\xi}A_\xi$ の固有ベクトル空間である。さらに次が成立する。

$$A_{\bar\xi}V_j \subset \overline{V_j}\ ,\ A_\xi\overline{V_j}\subset V_j\ 。$$

もうひとつテンソル場を準備する。テンソル場 $T \in C^\infty(\mathrm{Hom}\,\otimes^2 NM, \mathbb{R}))$ を次で定義する：

$$T(\xi,\eta) = \mathrm{tr}\,(A_\xi A_\eta) = \sum_{i=1}^{2n}\langle A_\eta u_i, A_\xi u_i\rangle \qquad \xi,\eta\in N_pM\ 。$$

ここで，$\{u_1,\cdots,u_{2n}\}$ は T_pM の orthonormal frame である。T は，N_pM の対称双一次形式で，$T(J\xi,J\eta)=T(\xi,\eta)$ が成立する。T を複素線形に拡張しておく。T から線形作用素 $\tilde{T}: N_pM^+ \to N_pM^+$ を次で定義する：

$$(\xi,\tilde{T}(\eta)) = T(\xi,\bar\eta) \qquad \xi,\eta\in N_pM^+\ 。$$

この時 $\tilde{T}$ は N_pM^+ の半正定値 Hermite 作用素であり，N_pM^+ の unitary frame $\{\eta^1,\cdots,\eta^r\}$ と正また零の $a_1,\cdots,a_r$ が存在して，$\tilde{T}(\eta^\alpha)=a_\alpha\eta^\alpha$ $\alpha=1,\cdots,r$ とできる。従って $T(\eta^\alpha,\bar\eta^\beta)=a_\alpha\delta_{\alpha\beta}$ となり，さらに

$$\sum_{\alpha=1}^r a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^r T(\eta^\alpha,\bar\eta^\alpha) = \sum_{\alpha=1}^r\sum_{i=1}^n\langle A_{\eta^\alpha}A_{\bar\eta^\alpha}e_i,\bar e_i\rangle = \sum_{i,j=1}^n\langle h(e_i,e_j),h(\bar e_i,\bar e_j)\rangle$$

が成立する。

<u>Lemma 1.2.</u> ある非負定数 k が存在して M上の任意の点 p で $T(\xi,\bar{\eta}) = k\langle\xi,\bar{\eta}\rangle$ $\xi,\eta\in N_pM^+$ が成立しているとする。この時

$$\sum_{i,j=1}^{n}\langle h(\bar{e}_i,\bar{e}_j),\xi\rangle\langle h(e_i,e_j,x),\bar{\eta}\rangle = 0, \quad \xi,\eta\in N_pM^+,\ x\in T_pM^+,$$

が成立する。

証. $T(\xi,\bar{\eta}) = \sum_{i=1}^{n}\langle A_\xi A_{\bar{\eta}} e_i,\bar{e}_i\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle h(\bar{e}_i,\bar{e}_j),\xi\rangle\langle h(e_i,e_j),\bar{\eta}\rangle$

であるから，仮定により $\sum_{i,j=1}^{n}\langle h(\bar{e}_i,\bar{e}_j),\xi\rangle\langle h(e_i,e_j),\bar{\eta}\rangle = k\langle\xi,\bar{\eta}\rangle$

が成立する。両辺を $x\in T_pM^+$ で微分して，Lemma 1.2 を得る。

2. 定理の証明

最初に複素空間形内の Einstein Kaehler 部分多様体について成立する諸公式をまとめておこう。

<u>Lemma 2.1.</u> M を $\tilde{M}^{n+r}(\tilde{c})$ 内の $n\,(\geq 2)$ 次元 Einstein Kaehler 部分多様体とし，S をその scalar 曲率とする。この時次が成立する：

$$(1)\quad \|h\|^2 = 2\sum_{i,j=1}^{n}\langle h(e_i,e_j),h(\bar{e}_i,\bar{e}_j)\rangle = n(n+1)\tilde{c} - S$$

(2) $\sum_{j=1}^{n} \langle h(e_j, x), h(\bar{e}_j, \bar{u}) \rangle = k \langle x, \bar{u} \rangle$, ここで $k = \dfrac{n(n+1)\tilde{c} - S}{2n}$

(2)′ $\sum_{\alpha=1}^{r} A_{\xi^\alpha} A_{\bar{\xi}^\alpha} = kI$, ここで I は T_pM^+ の恒等写像を表す。

(3) $\sum_{j=1}^{n} \langle h(e_j, x, y), h(\bar{e}_j, \bar{u}) \rangle = 0$

(4) $\sum_{j=1}^{n} \langle h(e_j, x, y), h(\bar{e}_j, \bar{u}, \bar{v}) \rangle$

$$= -\frac{\tilde{c}}{2} k \{ \langle x, \bar{u} \rangle \langle y, \bar{v} \rangle + \langle x, \bar{v} \rangle \langle y, \bar{u} \rangle \} + (k - \frac{\tilde{c}}{2}) \langle h(x, y), h(\bar{u}, \bar{v}) \rangle$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \langle A_{\bar{\xi}^\alpha} x, A_{\xi^\beta} \bar{u} \rangle \langle A_{\bar{\xi}^\beta} y, A_{\xi^\alpha} \bar{v} \rangle$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \langle A_{\bar{\xi}^\alpha} x, A_{\xi^\beta} \bar{v} \rangle \langle A_{\bar{\xi}^\beta} y, A_{\xi^\alpha} \bar{u} \rangle$$

$\{e_1, \ldots, e_n\}$: T_pM^+ の unitary frame, $\{\xi^1, \ldots, \xi^r\}$: N_pM^+ の unitary frame, $x, y, u, v \in T_pM^+$。

証. (1) と (2) は (1.1) から直接得られる。(2)′ は (2) と同値な式。(2) を y で微分して (3) が得られる。さらに (3) を $\bar{v}$ で微分して

$$\sum_{j=1}^{n} \langle h(e_j, x, y), h(\bar{e}_j, \bar{u}, \bar{v}) \rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle h(e_j, x, y, \bar{v}), h(\bar{e}_j, \bar{u}) \rangle = 0$$

を得る。この式の第2項を (1.3) を使って書きかえることによって (4) が得られる。

以後余次元2の場合のみを考えることにする。

<u>Lemma 2.2.</u>　M を $\tilde{M}^{n+2}(c)$ 内の $n(\geqq 2)$ 次元 Einstein Kaehler 部分多様体とする。この時，各点 $p\in M$ に対して次のような性質をもつ T_pM^+ の unitary frame $\{e_1,\cdots,e_n\}$ が存在する。即ち N_pM^+ の任意の unitary frame $\{\xi,\eta\}$ に対して，複素数 $a_1,\cdots,a_n$ と $0\leqq\lambda_j\leqq k$（k は Lemma 2.1 (2) で与えられた定数）なる実数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ が存在して次を満たす：

$$A_\xi A_{\bar\xi}\, e_j = \lambda_j e_j \ ,\quad A_\eta A_{\bar\eta}\, e_j = (k-\lambda_j)e_j$$

$$A_\eta A_{\bar\xi}\, e_j = a_j e_j \ ,\quad A_\xi A_{\bar\eta}\, e_j = \bar a_j e_j$$

$$a_j\bar a_j = \lambda_j(k-\lambda_j)\ 。$$

証.　N_pM^+ の unitary frame $\{\xi,\eta\}$ を1つ固定する。Lemma 2.1 (2)′ により，$A_\xi A_{\bar\xi}+A_\eta A_{\bar\eta}=kI$ が成立する。$\mu_1,\cdots,\mu_l$ を $A_\xi A_{\bar\xi}$ の互いに異なる固有値，V_j $(1\leqq j\leqq l)$ を固有値 μ_j の固有空間，$m(j)=\dim V_j$ とする。この時 V_j は $A_\eta A_{\bar\eta}$ の固有空間となり，その固有値は $k-\mu_j$ $(1\leqq j\leqq l)$ である。

Lemma 1.1 によって，$A_{\bar\xi}V_j\subset\bar V_j$，$A_\xi\bar V_j\subset V_j$，$A_{\bar\eta}V_j\subset\bar V_j$，$A_\eta\bar V_j\subset V_j$ が成立する。j $(1\leqq j\leqq l)$ を1つ固定して線形作用素 $A_{\bar\xi}, A_{\bar\eta}$ を V_j に，A_ξ, A_η を $\bar V_j$ にそれぞれ制限して考える。それぞれの共役作用素は次で与えられる：

$$A_{\bar\xi}^{\,*}=A_\xi\ ,\quad A_{\bar\eta}^{\,*}=A_\eta\ ,\quad A_\xi^{\,*}=A_{\bar\xi}\ ,\quad A_\eta^{\,*}=A_{\bar\eta}\ 。$$

V_j から V_j への線形作用素 $A_\eta A_{\bar\xi}$, $A_\xi A_{\bar\eta}$ は $(A_\eta A_{\bar\xi})^* = A_\xi A_{\bar\eta}$, $(A_\xi A_{\bar\eta})^* = A_\eta A_{\bar\xi}$ を満たし, $A_\eta A_{\bar\xi}$, $A_\xi A_{\bar\eta}$ は V_j の正規作用素である。実際 $(A_\eta A_{\bar\xi})^*(A_\eta A_{\bar\xi}) = A_\xi (A_{\bar\eta} A_\eta) A_{\bar\xi} = \mu_j (k-\mu_j) I$ であり, $(A_\eta A_{\bar\xi})(A_\eta A_{\bar\xi})^* = A_\eta (A_{\bar\xi} A_\xi) A_{\bar\eta} = \mu_j (k-\mu_j) I$ であるから, V_j 上で $(A_\eta A_{\bar\xi})^*(A_\eta A_{\bar\xi}) = (A_\eta A_{\bar\xi})(A_\eta A_{\bar\xi})^* = \mu_j (k-\mu_j) I$ である。従って, V_j の unitary frame $\{e_1^j, \cdots e_{m(j)}^j\}$ と複素数 $a_1^j, \cdots, a_{m(j)}^j$ が存在して, $A_\eta A_{\bar\xi} e_s^j = a_s^j e_s^j$, $A_\xi A_{\bar\eta} e_s^j = \bar a_s^j e_s^j$, $a_s^j \bar a_s^j = \mu_j (k-\mu_j)$ を満たす。添字の番号を取り換えて, T_pM^+ の unitary frame $\{e_1, \dots, e_n\}$ 複素数 $a_1, \cdots, a_n$, 実数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ で, 最初に固定した N_pM^+ の unitary frame $\{\xi, \eta\}$ に対して

$$A_\xi A_{\bar\xi}\, e_j = \lambda_j\, e_j \quad , \quad A_\eta A_{\bar\eta}\, e_j = (k-\lambda_j)\, e_j$$

$$A_\eta A_{\bar\xi}\, e_j = a_j\, e_j \quad , \quad A_\xi A_{\bar\eta}\, e_j = \bar a_j\, e_j$$

$$a_j \bar a_j = \lambda_j (k-\lambda_j)$$

を満たすものを得る。

次に N_pM^+ における任意の unitary frame を $\{\xi', \eta'\}$ とする。この時, 先に固定した unitary frame $\{\xi, \eta\}$ を使って, 次のように表示することができる:

$$\xi' = e^{\sqrt{-1}\phi}(z\xi - \bar w \eta), \quad \eta' = e^{\sqrt{-1}\phi}(w\xi + \bar z \eta),$$

ここで $\phi \in \mathbb{R}$, $z, w \in \mathbb{C}$ かつ $z\bar z + w\bar w = 1$ を満たす。

直接計算することによって, 次を得る:

$$A_{\xi'}A_{\bar{\xi}'}e_j = \{z\bar{z}\lambda_j - zw\bar{a}_j - \bar{z}\bar{w}a_j + w\bar{w}(k-\lambda_j)\}e_j$$

$$A_{\eta'}A_{\bar{\eta}'}e_j = \{w\bar{w}\lambda_j + zw\bar{a}_j + \bar{z}\bar{w}a_j + z\bar{z}(k-\lambda_j)\}e_j$$

$$A_{\eta'}A_{\bar{\xi}'}e_j = \{\bar{z}w(2\lambda_j - k) + \bar{z}^2 a_j - w^2\bar{a}_j\}e_j$$

$$A_{\xi'}A_{\bar{\eta}'}e_j = \{z\bar{w}(2\lambda_j - k) + z^2\bar{a}_j - \bar{w}^2 a_j\}e_j \quad 。$$

以上の議論によって Lemma 2.2 は示された。

<u>Lemma 2.3</u>. $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を Lemma 2.2 で与えられた unitary frame とする。添字の番号 i $(1 \leq i \leq n)$ を固定した時，N_pM^+ の unitary frame $\{\xi, \eta\}$ で $A_\xi A_{\bar{\xi}} e_i = ke_i$, $A_\eta A_{\bar{\eta}} e_i = A_\eta A_{\bar{\xi}} e_i = A_\xi A_{\bar{\eta}} e_i = 0$ となるものを選ぶことができる。

証. Lemma 2.2 の証明中で，N_pM^+ の unitary frame の変換をうまくとればよい。

以上の準備のもとに $\tilde{c} > 0$ の場合に定理を証明しよう。最初に Lemma 2.1 の中の定数 k について gap phenomenon があることを示そう。Lemma 2.1 (4) によって，

$$\sum_{i,j,l=1}^{n} \langle h(e_i, e_j, e_l), h(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_l)\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}n(n+1)\tilde{c}k + nk\left(k - \frac{\tilde{c}}{2}\right) + nk^2 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} T(\bar{\xi}^\alpha, \xi^\beta)T(\bar{\xi}^\beta, \xi^\alpha)$$

を得る。第1節の後半の議論によって，N_pM^+ の unitary frame

$\{\eta^1, \cdots, \eta^r\}$ が存在して，$T(\bar{\eta}^\alpha, \eta^\beta) = a_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ とできる。従って，

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} T(\bar{\xi}^\alpha, \xi^\beta) T(\bar{\xi}^\beta, \xi^\alpha) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} T(\bar{\eta}^\alpha, \eta^\beta) T(\bar{\eta}^\beta, \eta^\alpha)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha^2 \leqq \left(\sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha\right)^2 = n^2 k^2$$

が成立する。

結局 次の不等式が得られる：

$$\sum_{i,j,l=1}^{n} \langle h(e_i, e_j, e_l), h(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_l) \rangle \leqq n(n+2) k \left(k - \frac{\tilde{c}}{2}\right) \quad 。$$

上の不等式の左辺は非負であるから，$k > 0$ ならば $k \geqq \frac{\tilde{c}}{2}$ であり，さらに $k = \frac{\tilde{c}}{2}$ ならば，オ2基本形式が平行と成る。この事実は任意の余次元 r で成立するから，特に余次元 2 でも成立する。

以上の議論によって次の3つの場合を考察すれば十分であることが分る：

Case 1. $k = 0$,

Case 2. $k = \frac{\tilde{c}}{2}$,

Case 3. $k > \frac{\tilde{c}}{2}$.

Case 1. Lemma 2.1 (2) によって M は totally geodesic。

Case 2. この場合第2基本形式は平行である。複素空間形内のオ2基本形式が平行な Kaehler 部分多様体は H.Nakagawa and R. Takagi [2] によって完全に分類されている。その中で我々の仮定にあてはまるものは，$P_{n+2}(\mathbb{C})$ に totally geodesic に埋め込まれた $P_{n+1}(\mathbb{C})$ 内の複素2次超曲面のみである。

Case 3. この場合は起りえない。以下この事実を証明しよう。

そのため記号をいくつか準備しよう。T_pM^+ から N_pM^+ への線形作用素からなる複素ベクトル空間を $\mathrm{Hom}(T_pM^+, N_pM^+)$ で表すことにする。$\mathrm{Hom}(T_pM^+, N_pM^+)$ における Hermite 内積 $(\ ,\ )$ を次のように定義する：

$$(A, B) = \sum_{i=1}^{n} (A(e_i), B(e_i)) = \sum_{i=1}^{n} \langle A(e_i), \overline{B(e_i)} \rangle$$

ここで $A, B \in \mathrm{Hom}(T_pM^+, N_pM^+)$，$\{e_1, \cdots, e_n\}$: T_pM^+ の unitary frame。

T_pM^+ の対称テンソル積のなす空間を $T_pM^+ \cdot T_pM^+$ で表す。

$T_pM^+ \cdot T_pM^+$ は $x \cdot y = \frac{1}{2}\{x \otimes y + y \otimes x\}$ $x, y \in T_pM^+$ で張られている。

$T_pM^+ \cdot T_pM^+$ に次のようにして Hermite 内積 $(\ ,\ )$ を導入する：

$$\begin{aligned}(x \cdot y, u \cdot v) &= \frac{1}{2}\{(x, u)(y, v) + (x, v)(y, u)\} \\ &= \frac{1}{2}\{\langle x, \bar{u}\rangle\langle y, \bar{v}\rangle + \langle x, \bar{v}\rangle\langle y, \bar{u}\rangle\}\end{aligned}$$。

線形写像 $H^2 : T_pM^+ \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_pM^+, N_pM^+)$，$H^3 : T_pM^+ \cdot T_pM^+ \longrightarrow \mathrm{Hom}(T_pM^+, N_pM^+)$ をそれぞれ次のように定義する：

$$H^2(x)(u) = h(u,x), \quad H^3(x\cdot y)(u) = h(u,x,y)\,。$$

$T_pM^+\cdot T_pM^+$ 上に線形作用素 L, Q を導入する。最初に L を次で定義する：

$$
\begin{aligned}
&(L(x\cdot y), u\cdot v) \\
&\quad = -\tilde{c}\,k\,(x\cdot y, u\cdot v) \\
&\qquad + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} (A_{\xi^\beta} A_{\bar{\xi}^\alpha} x, u)(A_{\xi^\alpha} A_{\bar{\xi}^\beta} y, v) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} (A_{\xi^\beta} A_{\bar{\xi}^\alpha} x, v)(A_{\xi^\alpha} A_{\bar{\xi}^\beta} y, u) \\
&\quad = -\frac{\tilde{c}}{2} k \{ \langle x, \bar{u}\rangle \langle y, \bar{v}\rangle + \langle x, \bar{v}\rangle \langle y, \bar{u}\rangle \} \\
&\qquad + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle A_{\xi^\beta} A_{\bar{\xi}^\alpha} x, \bar{u}\rangle \langle A_{\xi^\alpha} A_{\bar{\xi}^\beta} y, \bar{v}\rangle + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle A_{\xi^\beta} A_{\bar{\xi}^\alpha} x, \bar{v}\rangle \langle A_{\xi^\alpha} A_{\bar{\xi}^\beta} y, \bar{u}\rangle ,
\end{aligned}
$$

ここで $\{\xi^1, \xi^2\}$ は N_pM^+ の unitary frame である。

この定義は N_pM^+ の unitary frame のとりかたによらない。また L は $T_pM^+\cdot T_pM^+$ 上の Hermite 作用素である。次に Q を，

$$(Q(x\cdot y), u\cdot v) = (h(x,y), h(u,v)) = \langle h(x,y), h(\bar{u},\bar{v})\rangle$$

で定義する。Q は半正定値 Hermite 作用素である。これらの記号を使って Lemma 2.1 (4) 式は次のように表わせる：

$$(H^3(x\cdot y), H^3(u\cdot v)) = (\{L + (k-\tfrac{\tilde{c}}{2})Q\}(x\cdot y), u\cdot v)\,。$$

Lemma 2.2 を利用して，次を得る。

<u>Lemma 2.4</u>　$\{e_1, \cdots, e_n\}$ を Lemma 2.2 で与えられた T_pM^+ の unitary frame とする。この時 次が成立する：

$$(L(e_i\cdot e_i), e_j\cdot e_j) = k(2k-\tilde{c})\delta_{ij}$$

$$(L(e_i\cdot e_i), e_j\cdot e_l) = 0 \qquad j\neq l \quad 。$$

<u>Lemma 2.5</u> $\{e_1,\cdots,e_n\}$ を Lemma 2.2 で与えられた T_pM^+ の unitary frame とする。 $k>\frac{\tilde{c}}{2}$ ならば $\mathrm{Hom}(T_pM^+, N_pM^+)$ は $H^2(e_i)$, $H^3(e_i\cdot e_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ で張られている。

証. Lemma 2.1 (2) によって, $(H^2(e_i), H^2(e_j)) = k\delta_{ij}$ となるから, $H^2(e_1),\cdots,H^2(e_n)$ は $\mathrm{Hom}(T_pM^+, N_pM^+)$ の中で 1次独立である。 $e_1\cdot e_1,\cdots, e_n\cdot e_n$ で張られる $T_pM^+\cdot T_pM^+$ の部分空間を W とする。 Lemma 2.4 によって W は L の不変部分空間である。さらに $k>\frac{\tilde{c}}{2}$ ならば L は W で正定値である。 Q と同様にして定義される W 上の作用素を Q' とおく。 $k>\frac{\tilde{c}}{2}$ ならば $L+(k-\frac{\tilde{c}}{2})Q'$ は W 上の正定値 Hermite 作用素である. 従って H^3 を W に制限すれば単射であり, $H^3(e_1\cdot e_1),\cdots, H^3(e_n\cdot e_n)$ は 1次独立である。 Lemma 2.1 (3) によって, $(H^2(e_i), H^3(x\cdot y)) = 0$ $x,y\in T_pM^+$。 従って $H^2(e_1),\cdots,H^2(e_n), H^3(e_1\cdot e_1),\cdots, H^3(e_n\cdot e_n)$ は $\mathrm{Hom}(T_pM^+, N_pM^+)$ で 1次独立である。一方 $\dim \mathrm{Hom}(T_pM^+, N_pM^+) = 2n$ であるから, Lemma 2.5 の主張は示された。

<u>Lemma 2.6.</u> $\{e_1,\cdots,e_n\}$ を Lemma 2.2 で与えられた T_pM^+ の unitary frame とする。 $k>\frac{\tilde{c}}{2}$ の時 次が成立する:

(1) $h(e_i, e_j) = 0 \quad i \neq j$

$$(h(e_i, e_i), h(e_j, e_j)) = \langle h(e_i, e_i), h(\bar{e}_j, \bar{e}_j) \rangle = k\,\delta_{ij}$$

(2) $h(x, e_i, e_j) = 0 \quad i \neq j \quad \text{any } x \in T_pM^+$

$$(h(e_i, e_i, e_i), h(e_i, e_i, e_i)) = \langle h(e_i, e_i, e_i), h(\bar{e}_i, \bar{e}_i, \bar{e}_i) \rangle = \frac{3}{2} k (2k - \tilde{c})。$$

証. i を1つ固定する。Lemma 2.3 によって N_pM^+ の unitary frame $\{\xi, \eta\}$ が存在して，次を満たす:

$$A_\xi A_{\bar{\xi}}\, e_j = \lambda_j e_j \;, \quad A_\eta A_{\bar{\eta}}\, e_j = (k - \lambda_j) e_j \;,$$

$$A_\eta A_{\bar{\xi}}\, e_j = a_j e_j \;, \quad A_\xi A_{\bar{\eta}}\, e_j = \bar{a}_j e_j \;,$$

$$a_j \bar{a}_j = \lambda_j (k - \lambda_j) \;,$$

そして 特に $\lambda_i = k$, $a_i = 0$ 。

最初に $j \neq i$ となる j について $\lambda_j \neq k$ であることを示そう。もしある $j \neq i$ について $\lambda_j = k$ が成立したとする。この時 $(L(e_i \cdot e_j), e_i \cdot e_j) = k(k - \frac{\tilde{c}}{2})$ である。$e_1 \cdot e_1, \cdots, e_n \cdot e_n$ と $e_i \cdot e_j$ で張られた $T_pM^+ \cdot T_pM^+$ の部分空間を W' とする。Lemma 2.4 によって L は W' 上の正定値 Hermite 作用素である。Lemma 2.5 と同じ議論によって，$H^2(e_1), \cdots, H^2(e_n), H^3(e_1 \cdot e_1), \cdots, H^3(e_n \cdot e_n)$, $H^3(e_i \cdot e_j)$ は $\mathrm{Hom}(T_pM^+, N_pM^+)$ で1次独立である。これは矛盾。従って $j \neq i$ ならば $\lambda_j \neq k$ 。Lemma 1.1 によって $\langle A_\xi e_i, e_j \rangle = \langle A_{\bar{\eta}} e_i, e_j \rangle = 0$ 従って $h(e_i, e_j) = 0$ となる。このことによって，$\langle h(e_i, e_i), h(\bar{e}_i, \bar{e}_i) \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle h(e_j, e_i), h(\bar{e}_j, \bar{e}_i) \rangle = k$ が得られる。

さらに $j \neq i$ となる j について次が成立する：

$$(H^3(e_i \cdot e_j), H^3(e_i \cdot e_j)) = (L(e_i \cdot e_j), e_i \cdot e_j) + (k - \tfrac{\tilde{c}}{2})(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j))$$
$$= (L(e_i \cdot e_j), e_i \cdot e_j) = k(\lambda_j - \tfrac{\tilde{c}}{2}) 。$$

上式の左辺は非負であるから，$\lambda_j \geqq \frac{\tilde{c}}{2}$ となる。もし $\lambda_j > \frac{\tilde{c}}{2}$ とする。先と同じ議論で，$H^2(e_1), \ldots, H^2(e_n)$, $H^3(e_1 \cdot e_1), \ldots, H^3(e_n \cdot e_n)$, $H^2(e_i \cdot e_j)$ は1次独立となって矛盾。従って $\lambda_j = \frac{\tilde{c}}{2}$ であり，$H^3(e_i \cdot e_j) = 0$ である。このことは任意の $x \in T_pM^+$ について，$h(x, e_i, e_j) = 0$ である。

Lemma 2.4 によって次を得る：

$$(H^3(e_i \cdot e_i), H^3(e_j \cdot e_j)) = (L(e_i \cdot e_i), e_j \cdot e_j) + (k - \tfrac{\tilde{c}}{2})(h(e_i, e_i), h(e_j, e_j))$$
$$= (k - \tfrac{\tilde{c}}{2}) \langle h(e_i, e_i), h(\bar{e}_j, \bar{e}_j) \rangle$$
$$j \neq i 。$$

一方 $$(H^3(e_i \cdot e_i), H^3(e_j, e_j)) = \sum_{s=1}^{n} \langle h(e_s, e_i, e_i), h(\bar{e}_s, \bar{e}_j, \bar{e}_j) \rangle = 0$$

であるから，$\langle h(e_i, e_i), h(\bar{e}_j, \bar{e}_j) \rangle = 0$ $j \neq i$ を得る。

最後に，

$$\langle h(e_i, e_i, e_i), h(\bar{e}_i, \bar{e}_i, \bar{e}_i) \rangle$$
$$= \sum_{s=1}^{n} \langle h(e_s, e_i, e_i), h(\bar{e}_s, \bar{e}_i, \bar{e}_i) \rangle$$
$$= (L(e_i \cdot e_i), e_i \cdot e_i) + (k - \tfrac{\tilde{c}}{2}) \langle h(e_i, e_i), h(\bar{e}_i, \bar{e}_i) \rangle$$

$$= k(2k-\tilde{c}) + k(k-\frac{\tilde{c}}{2}) = \frac{3}{2}k(2k-\tilde{c})$$

を得る。 以上で Lemma 2.6 はすべて示された。

Lemma 2.6 で示された事実を使って，$k>\frac{\tilde{c}}{2}$ の場合が起り得ないことを示そう。$n=\dim M \geqq 3$ で $k>\frac{\tilde{c}}{2}$ とすると，Lemma 2.6 (1) により，$h(e_1,e_1)$, $h(e_2,e_2)$, $h(e_3,e_3)$ が N_pM^+ で 1 次独立である。これは余次元 2 という仮定に反する。従ってこの場合は起り得ない。次に $n=\dim M=2$ の場合を考察しよう。$k>\frac{\tilde{c}}{2}$ ならば $T(\xi,\bar{\eta})=k\langle\xi,\bar{\eta}\rangle$ $\xi,\eta\in N_pM^+$ が成立する。実際，$\xi=\frac{1}{\sqrt{k}}h(e_1,e_1)$, $\eta=\frac{1}{\sqrt{k}}h(e_2,e_2)$ とおけば，Lemma 2.6 (1) によって $\{\xi,\eta\}$ は N_pM^+ の unitary frame であり，次を満たしている:

$$A_{\bar{\xi}}e_1=\sqrt{k}\,\bar{e}_1,\ A_\xi\bar{e}_1=\sqrt{k}\,e_1,\ A_{\bar{\xi}}e_2=A_\xi\bar{e}_2=0,$$

$$A_{\bar{\eta}}e_2=\sqrt{k}\,\bar{e}_2,\ A_\eta\bar{e}_2=\sqrt{k}\,e_2,\ A_{\bar{\eta}}e_1=A_\eta\bar{e}_1=0.$$

このことにより，$T(\xi,\bar{\xi})=T(\eta,\bar{\eta})=k$ で $T(\xi,\bar{\eta})=T(\eta,\bar{\xi})=0$ が成立する。このことは $T(\xi',\bar{\eta}')=k\langle\xi',\bar{\eta}'\rangle$ for $\xi',\eta'\in N_pM^+$ $p\in M$ を意味する。

Lemma 1.2 によって，$\sum_{i,j=1}^{2}\langle h(\bar{e}_i,\bar{e}_j),\xi\rangle\langle h(e_i,e_j,x),\bar{\eta}\rangle=0$ が成立。

特に $\sum_{i,j=1}^{2}\langle h(\bar{e}_i,\bar{e}_j),h(e_1,e_1)\rangle\langle h(e_i,e_j,e_1),h(\bar{e}_1,\bar{e}_1)\rangle$

$$=\sum_{i,j=1}^{2}\langle h(\bar{e}_i,\bar{e}_j),h(e_1,e_1)\rangle\langle h(e_i,e_j,e_1),h(\bar{e}_2,\bar{e}_2)\rangle=0$$

が成り立つ。

Lemma 2.6 によって次を得る:

$$0 = \sum_{i,j=1}^{2} \langle h(\bar{e}_i, \bar{e}_j), h(e_1, e_1) \rangle \langle h(e_i, e_j, e_1), h(\bar{e}_1, \bar{e}_1) \rangle$$

$$= \langle h(\bar{e}_1, \bar{e}_1), h(e_1, e_1) \rangle \langle h(e_1, e_1, e_1), h(\bar{e}_1, \bar{e}_1) \rangle$$

$$= k \langle h(e_1, e_1, e_1), h(\bar{e}_1, \bar{e}_1) \rangle 。$$

従って $\langle h(e_1, e_1, e_1), h(\bar{e}_1, \bar{e}_1) \rangle = 0$ 。同様にして $\langle h(e_1, e_1, e_1), h(\bar{e}_2, \bar{e}_2) \rangle = 0$。結局 $h(e_1, e_1, e_1) = 0$ となり, $\langle h(e_1, e_1, e_1), h(\bar{e}_1, \bar{e}_1, \bar{e}_1) \rangle = \frac{3}{2} k (2k - \tilde{c})$ に矛盾する。以上の議論によって, $\dim M = 2$ で $k > \frac{\tilde{c}}{2}$ なる場合は起り得ないことが分る。

<u>$\tilde{c} \leq 0$ の場合の定理の証明</u>. 定数 k が零の場合, M は totally geodesic である. $k > 0$ ならば 明らかに $k > \frac{\tilde{c}}{2}$ 。この場合 $\tilde{c} > 0$ でかつ $k > \frac{\tilde{c}}{2}$ の時と全く同じ議論が成立して, 起り得ないことが示される。

文献

[1]. S.S. Chern, On Einstein hypersurfaces in a Kaehler manifold of constant holomorphic sectional curvature, J. Differential Geometry, 1 (1967), 21-31.

[2] H. Nakagawa and R. Takagi, On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 638-667.

[3] K. Ogiue, Differential geometry of Kaehler submanifolds, Advances in Math., 13 (1974), 73-114.

[4] B. Smyth, Differential geometry of complex hypersurfaces, Ann. of Math., 85 (1967), 246-266.