数理解析研究所講究録
第576巻 1985年 154-176

Examples of compact Einstein Kähler manifolds with positive Ricci tensor

阪大理　坂根由昌 (Yusuke Sakane)

0. Introduction

P を complex dimension N の compact complex manifold とし，J により P の complex structure を表す。g を P 上の hermitian metric とするとき，$\omega(X,Y)=g(X,JY)$ (X,Y は P の tangent vector) により P 上の Kähler form ω が定義されるが，$d\omega=0$ のとき，(P,J,g) は Kähler であるという。r により Kähler metric g の Ricci tensor を表すと，r は hermitian となり Ricci form ρ が $\rho(X,Y)=r(X,JY)$ により定義される。よく知られているように，第2 Bianchi identity から $d\rho=0$ となり ρ は type $(1,1)$ の cohomology class を定義し，P の first chern class $c_1(P)$ は

$$\frac{1}{2\pi}[\rho]=c_1(P)$$

で与えられる。(P,J,g) が Einstein Kähler であると

すると，$\rho = k\omega \ (k \in \mathbb{R})$ となり

(1) $k > 0 \longrightarrow c_1(P) > 0$

(2) $k = 0 \longrightarrow c_1(P) = 0$

(3) $k < 0 \longrightarrow c_1(P) < 0$

となる．逆に，(P, J, g) を compact Kähler manifold で first chern class $c_1(P)$ が正，零，負であるものとするとき，(P, J) 上に Einstein Kähler metric が存在するかという問題が考えられるが，これはよく知られているように，(3)に対応するとき，すなわち，負のときは，Aubin [1] と Yau [10] により独立に，Einstein Kähler metric の存在と一意性が証明された。また(2)に対応するとき，すなわち，零のときは，いわゆる Calabi 予想が成り立つこととして，各 Kähler class に vanishing Ricci tensor をもつ Kähler metric が一意的に存在することが Yau [10] により証明された。一方(1)に対応するとき，すなわち，first chern class $c_1(P)$ が正のときは，一般には反例，Einstein Kähler metric の存在しないもの，があり逆は成り立たない。最近 Bando − Mabuchi [2] によって，(holomorphic automorphism を除いて) Einstein Kähler metric の一意性が first chern class が正のときにも証明された．また first chern class が正である compact Einstein Kähler manifoldsのよく知られた例としては，Kähler C-space，すなわち，simply connected compact Kähler homogeneous spaceがある．ここではnon-homogeneous Einstein Kähler manifoldsの例を構成する。

1. Obstruction theorems と反例

(P, J, g)をcompact Kähler manifoldとするとき，$\mathfrak{g}(P,J)$によりP上のholomorphic vector fields全体のなすLie algebra，$\mathfrak{k}(P,g)$によりP上のKilling vector fields全体のなすLie algebraとすると，$\mathfrak{k}(P,g) \subset \mathfrak{g}(P,J)$とみなせるが，$g$がEinstein Kähler metricのときは，次のMatsushimaの定理がなりたつ。

Theorem M [7]　(P, J, g)をEinstein Kähler manifoldとするとき，$\mathfrak{g}(P,J) = \mathfrak{k}(P,g) \oplus J\mathfrak{k}(P,g)$。特に，$\mathfrak{g}(P,J)$はcompact Lie algebra $\mathfrak{k}(P,g)$の複素化となり$\mathfrak{g}(P,J)$はreductive Lie algebraとなる。

松嶋の定理を用いて，Einstein Kähler metricの存在しない例はYau [9]によって構成された。

例1 (Yau)　Pを$P^2(\mathbb{C})$の一点をblow upして得られるもの，すなわち，$P^1(\mathbb{C})$上のhyperplane line bundle Hとtrivial line bundle 1の直和$1 \oplus H$より

得られる $P^1(\mathbb{C})$ 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle とするとき，$\mathfrak{g}(P, J)$ は reductive でないが，first chern class $c_1(P)$ は正である．

Proposition 1. X を Kähler c-space とし，ξ を X 上の non-trivial holomorphic line bundle とする。ξ と trivial line bundle 1 の直和 $1 \oplus \xi$ より得られる X 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle $P(1 \oplus \xi)$ を P で表す。このとき，P 上の holomorphic vector fields 全体の Lie algebra $\mathfrak{g}(P, J)$ が reductive である必要十分条件は $H^0(X, \xi) = H^0(X, \xi^{-1}) = (0)$ となることである。さらにこのとき，$\mathfrak{g}(P, J)$ は $\mathrm{Aut}_0(X) \times \mathbb{C}^*$ の Lie algebra と一致する。(cf. [5, 8])

特別の場合として，H を $P^n(\mathbb{C})$ 上の hyperplane line bundle とするとき，Theorem M と Proposition 1 から次がわかる．

例2. $1 \leqq a \leqq n$ のとき，$P(1 \oplus H^a)$ の first chern class は正となるが，$P(1 \oplus H^a)$ 上には Einstein Kähler metric は存在しない．

例3. H_1, H_2 を $P^n(\mathbb{C})$, $P^m(\mathbb{C})$ の hyperplane line bundle からひきおこされた $P^n(\mathbb{C}) \times P^m(\mathbb{C})$ 上の holomorphic line bundle とする。整数 a, b に対して $P_{a,b} = P(1 \oplus H_1^{-a} \otimes H_2^{b})$ とおくとき，$|a| \leqq n$, $0 \leqq b \leqq m$ ならば $P_{a,b}$ の first chern class は正となるが，$-m \leqq a \leqq 0$, $0 \leqq b \leqq m$,

$(a, b) \neq (0,0)$ ならば，$P_{a,b}$ 上には Einstein Kähler metric は存在しない．また $1 \leq a \leq n$, $1 \leq b \leq m$ ならば，$\mathfrak{g}(P_{a,b}, J)$ は $sl(n+1, \mathbb{C}) \times sl(m+1, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ と同型な Lie algebra となる．

次に Futaki invariant を思い出しておく。(P, J, g) を first chern class $c_1(P)$ が正である compact Kähler manifold とし，$C_1^+(P) = \{ \omega \in c_1(P) \mid \omega$ は positive closed type $(1,1)$ real 2-form$\}$ とおく。$\omega \in C_1^+(P)$ に対する Ricci form を ρ_ω で表すと，P 上の C^∞-function F で $\frac{1}{2\pi}\rho_\omega - \omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} d'd'' F$ となるものが定数を加えることを除いて一意的に存在する。この F を用いて，写像 $f : \mathfrak{g}(P, J) \longrightarrow \mathbb{C}$ を $f(X) = \int_P XF\omega^N$ $(N = \dim_{\mathbb{C}} P)$ により定義する。このとき次の二木の定理がなりたつ。

Theorem F [4] linear map $f : \mathfrak{g}(P, J) \to \mathbb{C}$ は $\omega \in C_1^+(P)$ のとり方によらない。特に，(P, J, g) が Kähler Einstein metric を許容すれば，$f \equiv 0$ となる。

例 4 (Futaki [4]) $P^2(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$ 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle $P_{1,1}$ において，$P^2(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$ 上では恒等変換を引きおこす $\mathbb{C}^*$-action の holomorphic vector field X に対して，$f(X) \neq 0$ となり，$P_{1,1}$ ($P^2(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$ 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle) は Einstein Kähler metric を許容しない。この例では，$\mathfrak{g}(P_{1,1}, J)$ は reductive

なLie algebraである。

これらが今までに知られたobstruction theoremsと知られた反例のいくつかである。

2 Main theorem

Mをcompact typeのirreducible hermitian symmetric spaceとすると，M上のholomorphic line bundlesの同型類のなす群$H^1(M, \mathcal{O}^*)$は$\mathbb{Z}$と同型であることが知られている。Lをfirst chern class $c_1(L)$が正となるholomorphic line bundleで群$H^1(M, \mathcal{O}^*)$のgeneratorとなるものとする。このときMのfirst chern class $c_1(M)$は

$$c_1(M) = k\, c_1(L),\ (k\text{は } 2 \leq k \leq \dim_{\mathbb{C}} M + 1 \text{ なる整数})$$

をみたす。$X = M_1 \times M_2$，M_1, M_2はcompact typeのirreducible hermitian symmetric space，k_1, k_2をM_1, M_2に対するchern classから定まる正の整数とする。正の整数a, bで$0 < a < k_1$，$0 < b < k_2$となるものに対して，X上のholomorphic line bundle $L_1^{-a} \otimes L_2^{b}$（L_1, L_2はM_1, M_2上のline bundleのgeneratorからひきおこされたX上のline bundleとする）を考え，$P_{a,b} = P(1 \oplus L_1^{-a} \otimes L_2^{b})$とおくと，$P^1(\mathbb{C})$-bundle $P_{a,b}$のfirst chern class $c_1(P_{a,b})$は正で，Lie algebra $\mathfrak{g}(P_{a,b}, J)$

は, $Aut_0(X)\times\mathbb{C}^*$ の Lie algebra と同型になる。

Main theorem [8]　$m=\dim_{\mathbb{C}} M_1$, $n=\dim_{\mathbb{C}} M_2$ とおく。上に定義した $X=M_1\times M_2$ 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle $P_{a,b}$ が Einstein Kähler metric を許容するため必要十分条件は,

$$\int_{-1}^{1}(k_1-ax)^m(k_2+bx)^n x\,dx=0$$

である。

Corollary 1.　$M=M_1=M_2$, $a=b$ のとき, $P_{a,a}$ 上には Einstein Kähler metric が存在する。

Corollary 2.　$M_1=P^1(\mathbb{C})$, $M_2\neq P^1(\mathbb{C})$ のとき, $P_{1,b}$ 上には Einstein Kähler metric は存在しない。

(Corollary 2 の証明は, $\int_{-1}^{1}(2-x)(k_2+bx)^n x\,dx\neq 0$ であることを各 compact type のキヤク hermitian symmetric space にわけて計算するが, $b\geq 2$ のときこの積分が正となることは容易にわかる。)

さらに, $M_1\neq M_2$ なる場合で Einstein Kähler metric の存在するものの例としては次のようなものがある。
$M_1=G^8_{6,2}(\mathbb{C})$ ($\mathbb{C}^6$ の中の 2-planes のなす complex grassmann manifold), $M_2=P^8(\mathbb{C})$ とすると, $k_1=6$, $k_2=9$ となり, $P_{2,3}$ を考えると, 積分は $\int_{-1}^{1}(6-2x)^8(9+3x)^8 x\,dx=0$ となり, $G_{6,2}(\mathbb{C})\times P^8(\mathbb{C})$ 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle $P_{2,3}=P(L_1^2\oplus L_2^3)$ は,

Einstein Kähler metricを許容する.

次にMain theoremの証明の方針を述べる.

XをKähler C-spaceとすると, XはG/U, ここにGはsimply connected complex semi-simple Lie group, UはGのparabolic subgroupと表わされる。$\rho : U \to \mathbb{C}^*$を$U$のholomorphic representationとし, ξ_ρでρにassociateしたX上のhomogeneous line bundleを表す. X上の各holomorphic line bundleはhomogeneous line bundleであることが知られている。X上のhomogeneous holomorphic line bundle ξ_ρに対して, X上の$P^1(\mathbb{C})$-bundle $P(1 \oplus \xi_\rho)$を考える. 群Gは自然に$P(1 \oplus \xi_\rho)$に作用することに注意する。このGの作用に関して次がなりたつ。

Proposition 2. $P = P(1 \oplus \xi_\rho)$は3つのG-orbitからなる. 1つのorbitはPのopen dense subsetで, ξ_ρにassociateしたX上のprincipal $\mathbb{C}^*$-bundleで, 他の2つのorbitはXと同型である。ただし, ρはnon-trivialであるとする.

eをGの単位元とし, $(e, (1,1)) \in G \times \mathbb{C}^2$に対応する$P(1 \oplus \xi_\rho)$の点を$o$で表すとき, oにおけるGのisotropy subgroup $\hat{U}$は $\hat{U} = \{ g \in U \mid \rho(g) = 1 \}$で与えられる. 従って, ρがnon-trivialのとき, $\dim_{\mathbb{C}} \hat{U} = \dim_{\mathbb{C}} U - 1$である.

G_uをGの maximal compact subgroup とし，$V = U \cap G_u$ とおくと，G/U と G_u/V とは diffeomorphic となり，

$\hat{V} = \{g \in V \mid \rho(g) = 1\}$ とおくと，ρ が non-trivial のとき，$\dim_R \hat{V} = \dim_R V - 1$ となる。

Proposition 3. $\rho : U \to C^*$ を non-trivial とするとき，principal C^*-bundle $G \times_\rho C^*$ は，$G_u \times S^1$-equivariant に $G_u/\hat{V} \times R_+$ と diffeomorphic である，ここに，$G_u \times S^1$ は R_+ に trivial に作用する。

さて $P = P(1 \oplus \xi_\rho)$ 上に Einstein Kähler metric が存在すれば，それは $G_u \times S^1$-invariant metric であることに注意して，P の open orbit $G \times_\rho C^*$ 上の $G_u \times S^1$-invariant Kähler metric の形を考える。$\mathfrak{g}_u, \mathfrak{v}, \hat{\mathfrak{v}}$ を $G_u, V, \hat{V}$ の Lie algebra とし，$\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathfrak{g}_u$ の Killing form から定義される $\mathfrak{g}_u$ 上の $Ad(G_u)$-invariant inner product とする。$\mathfrak{m}$ を $\langle\ ,\ \rangle$ に関する $\mathfrak{v}$ の orthogonal complement とし，$\mathfrak{c}_\rho$ を $\hat{\mathfrak{v}}$ の $\mathfrak{v}$ における $\langle\ ,\ \rangle$ に関する orthogonal complement とし，$\mathfrak{f} = \mathfrak{c}_\rho + \mathfrak{m}$ とおくと，

$$\mathfrak{g}_u = \hat{\mathfrak{v}} \oplus \mathfrak{f}, \quad \mathfrak{v} = \hat{\mathfrak{v}} \oplus \mathfrak{c}_\rho, \quad [\mathfrak{v}, \mathfrak{c}_\rho] = (0)$$

$[\mathfrak{v}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ となる。また $G \times C^*$ の Lie subgroup $G_u \times R_+$ は $G \times_\rho C^* \cong G_u/\hat{V} \times R_+$ に transitive に作用する。R_+ の Lie algebra の a basis を $\{H\}$ とし，$o \in G \times_\rho C^*$ にお

ける tangent space $T_o(P)$ と $\mathfrak{k}\oplus\mathbb{R}\hat{H}$ とを同一視する。

$\mathfrak{g}_u\oplus\mathbb{R}\hat{H}=\hat{\mathfrak{v}}\oplus\mathfrak{k}\oplus\mathbb{R}\hat{H}$, $Ad(\hat{V})(\mathfrak{k}\oplus\mathbb{R}\hat{H})\subset\mathfrak{k}\oplus\mathbb{R}\hat{H}$ となることに注意する。$G\times_\rho\mathbb{C}^*$（あるいは P）上の complex structure J は $G\times\mathbb{C}^*$ の action で invariant であるから linear isomorphism $I:\mathfrak{k}\oplus\mathbb{R}\hat{H}\longrightarrow\mathfrak{k}\oplus\mathbb{R}\hat{H}$ で、$I^2=-id$, $I\circ Ad(g)=Ad(g)\circ I$ $(g\in\hat{V})$ なるものをひきおこす。さらに、I は、$I\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}}=\mathbb{R}\hat{H}$ をみたし、$X=G/V=G_u/V$ 上の invariant complex structure とも compatible であるから

$I\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$ をみたす。

X が compact type の irreducible hermitian symmetric space M_1, M_2 の積 $M_1\times M_2$ のときには、$\mathfrak{g}_u=(\mathfrak{g}_1)_u\oplus(\mathfrak{g}_2)_u$ $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ は simple Lie algebra, $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1\oplus\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_i\subset(\mathfrak{g}_i)_u$ $(i=1,2)$ となり、さらに $[\hat{\mathfrak{v}},\mathfrak{m}_i]=\mathfrak{m}_i$ $(i=1,2)$,

$I\mathfrak{m}_i=\mathfrak{m}_i$ $(i=1,2)$, $\mathfrak{m}_i$ $(i=1,2)$ は $\hat{\mathfrak{v}}$-module として irreducible である。これより、$\mathfrak{k}\oplus\mathbb{R}\hat{H}$ 上の $Ad(\hat{V})$-invariant hermitian inner product B は一意的に

$$B=d\left(\langle\,,\,\rangle|_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}}}+\langle I\circ, I\circ\rangle|_{\mathbb{R}\hat{H}}\right)+c_1\langle\,,\,\rangle|_{\mathfrak{m}_1}+c_2\langle\,,\,\rangle|_{\mathfrak{m}_2}$$

と表わされる。ここに d, c_1, c_2 は正の実数、$\langle\,,\,\rangle|_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}}}$, $\langle\,,\,\rangle|_{\mathfrak{m}_1}$, $\langle\,,\,\rangle|_{\mathfrak{m}_2}$ は、inner product $\langle\,,\,\rangle$ から $\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ 上にそれぞれひきおこされた inner product, $\langle I\circ, I\circ\rangle|_{\mathbb{R}\hat{H}}$ は $\langle IX, IY\rangle$ $(X, Y\in\mathbb{R}\hat{H})$ により定義される $\mathbb{R}\hat{H}$ 上の内積を

表す。$\beta_0, \beta_1, \alpha_1, \alpha_2$ を、それぞれ、$G_u/\hat{V} \times \mathbb{R}_+$ 上の $G_u \times \mathbb{R}_+$-invariant symmetric tensor で、$\langle\, , \rangle|_{\mathfrak{C}_g}$, $\langle I_0, I_0 \rangle|_{\mathbb{R}\hat{H}}$, $\langle\, , \rangle|_{m_1}$, $\langle\, , \rangle|_{m_2}$ ($Ad(\hat{V})$-invariant symmetric bilinear form on $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}\hat{H}$ とみて) に対応するものとする。さらに $\beta_0, \beta_1, \alpha_1, \alpha_2$ は right S^1-action で invariant である。このことから、次の proposition が証明できる。

Proposition 3. $G \times_\rho \mathbb{C}^*$ 上の $G_u \times S^1$-invariant hermitian metric g は

(2.1) $g = F^2(\beta_0 + \beta_1) + H_1^2\alpha_1 + H_2^2\alpha_2$

と表される。ここに F, H_1, H_2 は $G_u \times S^1$-invariant positive valued C^∞ function on $G \times_\rho \mathbb{C}^*$ である。

$X \in \mathfrak{C}_g$ に対して、$\{\exp tX \mid t \in \mathbb{R}\} \approx S^1$ の right action によってひきおこされる $G_u/\hat{V} \times \mathbb{R}_+$ 上の vector field を X^* で表し、 $H = -\dfrac{JX^*}{g(X^*, X^*)^{1/2}}$ とおく。$G \times_\rho \mathbb{C}^*$ 上の $G_u \times S^1$-invariant hermitian metric g で (2.1) の形のものが Kähler metric になる条件を考える。

Proposition 4. (2.1) の形の metric g が Kähler であるための必要十分条件は、$\forall A, B \in m$, $0 \neq \forall X \in \mathfrak{C}_g$ に対して

$$-\frac{F}{\langle X, X \rangle^{1/2}} \langle X, [A, IB] \rangle + d(H_1^2)(H)\langle A, B \rangle|_{m_1} + d(H_2^2)(H)\langle A, B \rangle|_{m_2} = 0$$

がなりたつことである。

さらに $G_u\times S^1$-invariant hermitian metric g on $G\times_\rho\mathbb{C}^*$ がKählerであるとき，gのRiemannian connection ∇について，vector field Hは $\nabla_H H=0$ をみたすことがわかる。Compact Lie group $G_u\times S^1$ が $P=P(1\oplus\xi_\rho)$ 上にholomorphic transformation groupとして作用するからP上には$G_u\times S^1$-invariant Kähler metric g_0が存在する．$\tilde{o}$を$G_u/\tilde{V}$の原点とするとき，点 $c(t_0)=(\tilde{o},1)\in G_u/\tilde{V}\times R_+$ を通るarc lengthでparametrizeされた(P,g_0)のgeodesic $c(t)$で $\dot{c}(t_0)=H_{c(t_0)}$ をみたすものを考える．$\nabla_H H=0$より，$c(t)$は$(\tilde{o},1)$を通るHのintegral curveで，L_0を$P=P(1\oplus\xi_\rho)$の$G_u\times S^1$の2つのsingular orbitの$c(t)$の長さとするとき，次がなりたつ．

Theorem 4.

(1) g_0を$P=P(1\oplus\xi_\rho)$上の$G_u\times S^1$-invariant Kähler metricとすると，g_0はopen orbit $G\times_\rho\mathbb{C}^*$上で，

$$g_0=dt^2+f_0^2(t)\tilde{\beta}_0+h_1^0(t)^2\alpha_1+h_2^0(t)^2\alpha_2$$

と表わされる．ここに$\tilde{\beta}_0$はρのweight Λに対して，$\Lambda(X_0)=\sqrt{-1}$で定まる$\mathfrak{t}_\rho$の元X_0を用いて，$\tilde{\beta}_0=\frac{1}{\langle X_0,X_0\rangle}\beta_0$により定義されるtensor（すなわち，$P^1(\mathbb{C})$の$S^1$-actionがright S^1-action $\{\exp tX_0\mid t\in R\}$に対応するようにしたもの），f_0, h_1^0, h_2^0は$[0,L_0]$で定義されたC^∞ functionで

次の条件をみたすもの：

$$(2.2)\begin{cases} f_0,\ h_j^0 \text{ は } (0,L_0) \text{ 上で正の値をとり,} \\ f_0 \text{ は } 0,L_0 \text{ で奇関数で, } f_0'(0)=-f_0'(L_0)=1 \text{ を} \\ \text{みたし, } h_j^0 \text{ は } 0,L_0 \text{ で偶関数で, } h_j^0(0)>0 \\ h_j^0(L_0)>0 \text{ となる.} \end{cases}$$

(2) 逆に $f(s)$, $h_j(s)$ $(j=1,2)$ が $[0,L]$ で定義された C^∞ function で, 条件 (2.2) の性質をみたすものとすると, metric $g = ds^2 + f(s)^2\beta_0 + h_1(s)^2\alpha_1 + h_2(s)^2\alpha_2$ は open orbit $G\times_P \mathbb{C}^*$ 上で定義され; g は $P(1\oplus\xi_p)$ 上の C^∞ metric に拡張される.

(2) において, g が $G\times_P\mathbb{C}^*$ 上で Kähler であれば, 拡張された metric も $P(1\oplus\xi_p)$ で Kähler となることに注意する.

次に open orbit $G\times_P\mathbb{C}^* = G_u/\hat{V}\times(0,L)$ 上の metric $g = ds^2 + f(s)^2\beta_0 + h_1(s)^2\alpha_1 + h_2(s)^2\alpha_2$ の Ricci tensor を計算するために, Bérard Bergery [3] に従って Riemannian submersion になっていることを利用する. metric g の形から $G_u/\hat{V}\times(0,L)\longrightarrow(0,L)$ は Riemannian submersion となり, O'Neill の formula を用いることにより, r を g の Ricci tensor, $\hat{r}$ を g_t の Ricci tensor と

するとき，次のpropositionをえる．

Proposition 5. $X_0 \in \mathfrak{c}_\mathfrak{g}$ を以前のように，$\Lambda(X_0)=\sqrt{-1}$ で定義されるものとし，$\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1\oplus\mathfrak{m}_2$ の orthonormal basis $\{B_1,\cdots,B_{2m},C_1,\cdots,C_{2n}\}$ ($B_i\in\mathfrak{m}_1$, $C_i\in\mathfrak{m}_2$, $m=\dim_{\mathbb{C}}M_1$, $n=\dim_{\mathbb{C}}M_2$) をとる．$\{H,\frac{1}{f}X_0,\frac{1}{h_1}B_1,\cdots,\frac{1}{h_1}B_{2m},\frac{1}{h_2}C_1,\cdots,\frac{1}{h_2}C_{2n}\}$ は $\mathfrak{g}$ の orthonormal basis であるが，これに対して次がなりたつ．

$$
\begin{cases}
\rho(H,H)=-\left(\dfrac{f''}{f}+2m\dfrac{h_1''}{h_1}+2n\dfrac{h_2''}{h_2}\right)\\
\rho(\frac{1}{f}X_0,\frac{1}{f}X_0)=\hat{\rho}(\frac{1}{f}X_0,\frac{1}{f}X_0)-\dfrac{f'}{f}\left(2m\dfrac{h_1'}{h_1}+2n\dfrac{h_2'}{h_2}\right)-\dfrac{f''}{f}\\
\rho(\frac{1}{h_1}B_i,\frac{1}{h_1}B_i)=\hat{\rho}(\frac{1}{h_1}B_i,\frac{1}{h_1}B_i)-\dfrac{f'h_1'}{fh_1}-\dfrac{h_1''}{h_1}-(2m-1)\left(\dfrac{h_1'}{h_1}\right)^2-2m\dfrac{h_1'h_2'}{h_1h_2}\\
\rho(\frac{1}{h_2}C_i,\frac{1}{h_2}C_i)=\hat{\rho}(\frac{1}{h_2}C_i,\frac{1}{h_2}C_i)-\dfrac{f'h_2'}{fh_2}-\dfrac{h_2''}{h_2}-(2n-1)\left(\dfrac{h_2'}{h_2}\right)^2-2m\dfrac{h_1'h_2'}{h_1h_2}\\
\rho(\frac{1}{f}X_0,\frac{1}{h_1}B_i)=\rho(\frac{1}{f}X_0,\frac{1}{h_2}B_i)=\rho(\frac{1}{h_1}B_i,\frac{1}{h_1}B_j)=\rho(\frac{1}{h_2}C_i,\frac{1}{h_2}C_j)=0\\
\text{for } i\neq j\\
\rho(\frac{1}{h_1}B_i,\frac{1}{h_2}C_j)=0 \quad (\forall i,j)
\end{cases}
$$

さらに，$\xi_p=L_1^{-a}\otimes L_2^{b}$ ($0<a<k_1$, $0<b<k_2$) のとき，metric $g=ds^2+f(s)^2\hat{\rho}_0+h_1(s)^2\alpha_1+h_2(s)^2\alpha_2$ が Kähler であるための必要十分条件は

$$
\begin{cases}
\dfrac{a}{2k_1}f+2h_1h_1'=0\\
\dfrac{-b}{2k_2}f+2h_2h_2'=0
\end{cases}
$$

で与えられることが、Proposition 4を用いることによってわかる。またRicci tensor $\hat{r}$ は次のPropositionのようになる。

Proposition 6. g の orthonormal basis
$\{\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{h_1}B_1, \cdots, \frac{1}{h_1}B_m, \frac{1}{h_1}IB_1, \cdots, \frac{1}{h_1}IB_m, \frac{1}{h_2}C_1, \cdots, \frac{1}{h_2}C_n,$
$\frac{1}{h_2}IC_1, \cdots, \frac{1}{h_2}IC_n\}$ に対して、

$$\hat{r}\left(\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{f}X_0\right) = 2m\left(\frac{a}{2k_1}\right)^2\frac{f^2}{4h_1^4} + 2n\left(\frac{b}{2k_2}\right)^2\frac{f^2}{4h_2^4}$$

$$\hat{r}\left(\frac{1}{h_1}B_i, \frac{1}{h_1}B_i\right) = \hat{r}\left(\frac{1}{h_1}IB_i, \frac{1}{h_1}IB_i\right) = \frac{1}{2h_1^2} - \left(\frac{a}{2k_1}\right)^2\frac{f^2}{2h_1^4}$$

$$\hat{r}\left(\frac{1}{h_2}C_j, \frac{1}{h_2}C_j\right) = \hat{r}\left(\frac{1}{h_2}IC_j, \frac{1}{h_2}IC_j\right) = \frac{1}{2h_2^2} - \left(\frac{b}{2k_2}\right)^2\frac{f^2}{2h_2^4}$$

$(i=1, \cdots, m,\ j=1, \cdots, n)$

となる。

以上により、次の定理を得る。

Theorem 7. X を2つの irreducible hermitian symmetric space of compact type M_1, M_2 の直積 $M_1 \times M_2$ とし、X 上の projective bundle $P(1 \oplus L_1^{-a} \otimes L_2^{b})$ を考える。$G_u \times S^1$-invariant metric $g = ds^2 + f(s)^2\beta_0 + h_1(s)^2\alpha_1 + h_2(s)^2\alpha_2$ on the open orbit が Einstein Kähler であるための必要十分条件は、f, h_1, h_2 が次の ordinary differential equation をみたすことである。

$$(2.3)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{2k_1}f + 2h_1h_1' = 0 \\ -\dfrac{b}{2k_2}f + 2h_2h_2' = 0 \\ -\left(\dfrac{f''}{f} + 2m\dfrac{h_1''}{h_1} + 2n\dfrac{h_2''}{h_2}\right) = \lambda \\ -\dfrac{f''}{f} - \dfrac{f'}{f}\left(2m\dfrac{h_1'}{h_1} + 2n\dfrac{h_2'}{h_2}\right) + 2m\left(\dfrac{a}{2k_1}\right)^2\dfrac{f^2}{4h_1^4} + 2n\left(\dfrac{b}{2k_2}\right)^2\dfrac{f^2}{4h_2^4} = \lambda \\ -\dfrac{h_1''}{h_1} - \dfrac{f'h_1'}{fh_1} - (2m-1)\left(\dfrac{h_1'}{h_1}\right)^2 - 2n\dfrac{h_1'h_2'}{h_1h_2} + \dfrac{1}{2h_1^2} - \left(\dfrac{a}{2k_1}\right)^2\dfrac{f^2}{2h_1^4} = \lambda \\ -\dfrac{h_2''}{h_2} - \dfrac{f'h_2'}{fh_2} - (2n-1)\left(\dfrac{h_2'}{h_2}\right)^2 - 2m\dfrac{h_1'h_2'}{h_1h_2} + \dfrac{1}{2h_2^2} - \left(\dfrac{b}{2k_2}\right)^2\dfrac{f^2}{2h_2^4} = \lambda \end{cases}$$

ここにλは正の定数.

Ordinary differential equations (2.3) は次の differential equation と同値であることがわかる.

$$(2.4)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{2k_1}f + 2h_1h_1' = 0, \quad -\dfrac{b}{2k_2}f + 2h_2h_2' = 0 \\ h_2' = \sqrt{y(h_2)}, \quad 2\lambda(ak_2h_2^2 + bk_1h_1^2) = ak_2 + bk_1 \\ \dfrac{dy}{dh_2} + 2\left(\dfrac{n+1}{h_2} - m\dfrac{ak_2}{bk_1}\dfrac{h_2}{h_1^2}\right)y = \dfrac{1}{2h_2} - \lambda h_2 \end{cases}$$

この最後の一階の線型常微分方程式の解は

$$y = \frac{1}{2h_2^{2(n+1)}(bk_1h_1^2)^m}\left\{\int h_2^{2n+1}(bk_1h_1^2)^m(1-2\lambda h_2^2)\,dh_2 + C\right\}$$

ここに, Cは定数で, h_1^2は $ak_2h_2^2 + bk_2h_1^2 = \dfrac{1}{2\lambda}(ak_2+bk_1)$ を

みたすものとする）で与えられる。

さて $P(1 \oplus L_1^{-a} \oplus L_2^{b})$ 上に Einstein Kähler metric g が存在すると仮定すると，Matsushima の定理により，g は $G_u \times S^1$-invariant metric と考えてよく，g は Theorem 7 の形としてよい．また $h_2'(0)=0$ より $y(h_2(0))=0$ で，$y(h_2)$ は次で与えられる：

$$y(h_2) = \frac{1}{2h_2^{2(n+1)}(bK_1h_1^2)^m}\int_{h_2(0)}^{h_2} h_2^{2n+1}(bK_1h_1^2)^2(1-2\lambda h_2^2)\,dh_2$$

さらに，$y(h_2(L))=0$ より

$$y(h_2(L)) = \frac{1}{2h_2^{2(n+1)}(L)\,(bK_1h_1^2(L))^m}\int_{h_2(0)}^{h_2(L)} h_2^{2n+1}(bK_1h_1^2)^2(1-2\lambda h_2^2)\,dh_2$$

$=0$． また $f'(0)=-f'(L)=1$ なども用いて，

$$h_2(L)=\sqrt{(1+b/K_2)/2\lambda}\,,\quad h_2(0)=\sqrt{(1-b/K_2)/2\lambda}\,.$$

がわかり，$y(h_2(L))=0$ は次の積分が 0 となることと同値であることがわかる．

$$\int_{-1}^{1}(K_2+bx)^n(K_1-ax)^m x\,dx=0\,.$$

逆に

$$\int_{\sqrt{(1-b/K_2)/2\lambda}}^{\sqrt{(1+b/K_2)/2\lambda}} h_2^{2n+1}(bK_1h_1^2)^2(1-2\lambda h_2^2)\,dh_2=0$$

とすると之，$h^0=\sqrt{(1-b/K_2)2\lambda}$，$h^1=\sqrt{(1+b/K_2)/2\lambda}$ と

おく. $[h^0, h^1]$ の近傍上で $y(h_2)$ を

$$y(h_2) = \frac{1}{2h_2^{2(n+1)}(bk_2h_1^2)^m}\int_{h^0}^{h_2} h_2^{2n+1}(bk_2h_1^2)^m(1-2\lambda h_2^2)\,dh$$

により定義すると, $y(h^0)=y(h^1)=0$ で, $h^0<h_2<h^1$ に対して $y(h_2)>0$ となる. また $\frac{dy}{dh_2}(h^0)>0$, $\frac{dy}{dh_2}(h^1)>0$. (h^0, h^1) 上の関数 $\hat{t}(h_2)$ を

$$\hat{t}(h_2)=\int_{\sqrt{1/2\lambda}}^{h_2}\frac{1}{\sqrt{y(h_2)}}\,dh_2$$ により定義する.

$\hat{t}_0=\lim_{h_2\to h^0+}\hat{t}(h_2)$, $\hat{t}_1=\lim_{h_2\to h^1-}\hat{t}(h_2)$ は存在する.

$[h^0, h^1]$ 上の関数 $t(h_2)$ を

$$t(h_2)=\hat{t}(h_2)-\hat{t}_0,\quad t(h^0)=0,\quad t(h^1)=\hat{t}_1-\hat{t}_0=L$$

で定義すると, $t(h_2):[h^0,h^1]\to[0,L]$ monotone increasing continuous function で, (h^0,h^1) 上で C^∞ となる. $h_2(t)$ を $t(h_2)$ の逆関数とすると, $(0,L)$ 上で $\frac{dh_2}{dt}=\sqrt{y(h_2)}$ となる. $h_2(t)$ は $[0,L]$ 上の正の値をとる C^∞ function で, 0, L で偶関数となるものに拡張されることがわかる. f を $f=\frac{4k_2}{b}h_2h_2'$ で定義し, $h_1>0$ を $2\lambda(ak_2h_2^2+bk_1h_1^2)=ak_2+bk_1$ をみたすように定義すると, f, h_1, h_2 は (2.4) をみたし, 条件(2.2) もみたす. 従って, Einstein Kähler metric が

存在する.

3. Futaki invariant と Main theorem の積分の条件との関係, その後の発展

Futaki invariant と Main theorem の積分の条件との関係は, Koiso-Sakane [6] で調べられ, Main theorem は次のように拡張される.

Theorem I. X を compact Einstein Kähler manifold で, g_0 を X 上の Kähler metric でその Ricci tensor ρ_0 が $\rho_0 = g_0$ をみたすものとする。ξ を X 上の holomorphic line bundle で, ξ の fiber metric に関する metric connection の curvature tensor B の g_0 に関する固有値が, X 上で constant でかつ, これらの固有値の絶対値が 1 より小さいような fiber metric が存在するものとする. このとき, X 上の $P^1(\mathbf{C})$-bundle $P = P(1 \oplus \xi)$ に Einstein Kähler metric が存在するための必要十分条件は, Futaki invariant $f : \mathfrak{g}(P, J) \rightarrow \mathbf{C}$ が 0 となることである. さらに, Futaki invariant が 0 となることは,

$$\int_{-1}^{1} x \det(1 - x g_0^{-1} B)\, dx = 0$$

と同値である.

Theorem I の適用できる例をあげよう。

例5. M を compact Einstein Kähler manifold で M 上の line bundle L で、$C_1(L) = a\, C_1(M)$ $(0<a<1)$ となるものが存在すると仮定する. $X = M\times M$ とおき、$\xi = L_1 \otimes L_2^{-1}$ を $L \to M$, $L^{-1} \to M$ からひきおこされた X 上の holomorphic line bundle とする. このとき, M 上の Kähler metric g でその Ricci tensor r が $r = g$ をみたすものをとると, X 上の product metric $g_0 = g \oplus g$ に関して, Theorem I の仮定がみたされ, $P(1\oplus\xi)$ 上に Einstein Kähler metric が存在することが, 被積分関数 $x \det(id - x\, g_0^{-1}B)$ が奇関数となり, 積分が 0 となることよりわかる.

例6. $M = P^n(\mathbb{C})$ とし, H を M 上の hyperplane section line bundle とし $L = H^m$ とおくと, $X = M\times M$ 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle $P(L\oplus L)$ は Einstein Kähler metric を許容し, isometry group の action に関して cohomogeneity は 1 である. $P = P(L\oplus L)$ の first chern class $C_1(P)$ は

$$C_1(P) = (n+1-m)\pi^*(C_1(H)\oplus C_1(H)) + 2C_1(\zeta)$$

(ここに $\pi : P \to X$ は projection, ζ は P の各 fiber $P^1(\mathbb{C})$ 上

の hyperplane line bundle からひきおこされる P 上の line bundle とする.) で与えられる. 従って $n+1-m$ が偶数ならば, P 上の holomorphic line bundle η で, $c_1(\eta)=\frac{1}{2}c_1(P)$ なるものが存在する. P の k 個の copy を考え, $Y=P\times\cdots\times P$ (k 個),
$\xi_0=\xi\otimes\cdots\otimes\xi$ (k 個) とおき, k が奇数のとき

$$X=Y\times P_{(\mathbb{C})}^{(2n+1)k},\quad \xi=\xi_0^{-1}\otimes H^{\frac{(2n+1)k+1}{2}}$$

とし k が偶数のとき $X=Y\times Q_{(\mathbb{C})}^{(2n+1)k}$ ($Q^l(\mathbb{C})$ の l 次元の complex hyperquadric), $\xi=\xi_0^{-1}\otimes L_0^{\frac{(2n+1)k}{2}}$ (ここに, L_0 は $Q^{(2n+1)k}(\mathbb{C})$ の holomorphic line bundle の群の generator で $c_1(L_0)$ が正となるもの, $c_1(Q^l(\mathbb{C}))=lc_1(L_0)$ となることに注意) とおくと, Theorem I の条件を X, ξ はみたし, 被積分関数は $x\det(\mathrm{id}-xg_0^{-1}B)$ $=x(1-\frac{1}{2}x)^{2(n+1)k}(1+\frac{1}{2}x)^{2(n+1)k}$ で与えられ, これは奇関数であるから, 積分は 0 となり, $P(1\oplus\xi)$ は Einstein Kähler metric を許容し, Cohomogeneity は, $k+1$ となる. すなわち, 与えられた cohomogeneity をもつ'既約'な Einstein Kähler manifold が存在する.

例7. 最後に $P^1(\mathbb{C})$-bundle の base space X が既約で, Einstein Kähler metric が $P^1(\mathbb{C})$-bundle P に

存在するものの例をあげておく. $X = SL(3,\mathbb{C})/B$, ここにBは Borel subgroup とする. $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ を holomorphic line bundle の isomorphism class のなす群とすると,

$H^1(X, \mathcal{O}^*) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ となる. H_1, H_2 を holomorphic line bundle over X で generator となるもので,

$c_1(H_1) > 0,\ c_1(H_2) > 0,\quad c_1(X) = 2(c_1(H_1) + c_1(H_2))$

となるものとする. $\xi = H_1^{-1} \otimes H_2$ とおくと, X, ξ は Theorem I の条件をみたし, この場合の B の $\mathfrak{g}_0$ に関する固有値は $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$ となる. 従って積分は0となり, $P(1 \oplus \xi)$ (X 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle) は Einstein Kähler metric を許容する.

References

[1] T. Aubin : Equation du type Monge-Ampère sur les variétés kähleriennes compactes, Bull. Sc. Math. 102 (1978) 63-95.

[2] S. Bando - T. Mabuchi : to appear.

[3] L. Bérard Bergery : Sur de nouvelles variétés riemanniennes d'Einstein, Preprint 1981.

[4] A. Futaki : An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics, Invent. Math. 73 (1983), 437-443.

[5] K. Ishikawa and Y. Sakane: On complex projective bundles over a Kähler C-space, Osaka J. Math. 16 (1979) 121–132.

[6] N. Koiso and Y. Sakane: Non-homogeneous Kähler-Einstein metrics on compact complex manifolds, to appear.

[7] Y. Matsushima: Sur la structure du groupe d'homeomorphismes analytique d'une certaine variété kählerienne, Nagoya Math. J., 11 (1957) 145–150.

[8] Y. Sakane: Examples of compact Einstein Kähler manifolds with positive Ricci tensor, to appear.

[9] S. T. Yau: On the curvature of compact Hermitian manifolds, Invent. Math. 25 (1974), 213–239.

[10] S. T. Yau: On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 339–411.