数理解析研究所講究録
第 577 巻 1985 年 74-79

Homology of the Kac-Moody Lie groups

京大理　河野　明（Akira Kono）

最近 V. G. Kac と D. H. Peterson は，Kac-Moody Lie algebra に対応する，無限次元のリー群を構成した。Kac-Moody Lie algebra のうち tier number が 1 のものは X を有限次元 Lie group として次の中心拡大であたえられる

(1)　　$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow X^{(1)} \longrightarrow X \otimes \mathbb{R}[t, t^{-1}] \rightarrow 1$

フーリエ級数を考えることにより，$X \otimes \mathbb{R}[t, t^{-1}]$ は loop group

$$X^{S^1} = Map(S^1, X)$$

(X, $X^{(1)}$ でそれぞれ X, $X^{(1)}$ に対応する群も表わすことにする。) で実現されるので，$X^{(1)}$ は中心拡大

(2)　　$0 \rightarrow S^1 \rightarrow X^{(1)} \rightarrow X^{S^1} \rightarrow 0$

であたえられる。X が単純な時 $X^{(1)}$ が2連結になれることが知られている (Kac-Peterson)

以下では X, $X^{(1)}$ は群の方である。X が単連結単純リー群の時 Bott [1] により

$$\pi_j(X) = \begin{cases} 0 & j \leq 2 \\ \mathbb{Z} & j = 3 \end{cases}$$

であることが知られている。また

$$X^{S^1} \simeq X \times \Omega X$$

であるから，中心拡大 (2) を考えると fibering

(3) $$S^1 \longrightarrow X^{(1)} \longrightarrow X \times \Omega X$$

が存在する。 fibering の homotopy 群の完全列で

(4) $$\pi_2(X \times \Omega X) \xrightarrow{\partial} \pi_1(S^1)$$

は同型である。従って X の 3 連結ファイバー空間を $X\langle 3\rangle$ とすると次が得られる。

定理 1 $X^{(1)} \simeq X \times \Omega X\langle 3\rangle$

$\Omega X\langle 3\rangle$ は ΩX の 2 連結ファイバー空間だから $\Omega X\langle 3\rangle \simeq (\Omega X)\langle 2\rangle$ である (cf. Kac [2])

ファイバー空間

(5) $$S^1 \rightarrow \Omega X\langle 3\rangle \longrightarrow \Omega X$$

の Gysin 完全列を考えると，ΩX は Hopf 空間であり，従って $H^*(\Omega X; \mathbb{F}_p)$ は Hopf algebra であり，従って

$$H^*(\Omega X; \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[t]/(t^{p^d}) \otimes A$$

($\deg t = 2$) の形だから，次が得られる。(p は素数)

定理2　$H^*(\Omega X\langle 3\rangle;\mathbb{F}_p)\cong\Lambda(s)\otimes A$　　$\deg s=2p^d-1$

ただし上で $d=\infty$ の時は $\Lambda(s)$ の部分がなくなるが以下で示すように　$d<\infty$　が得られる。

一方　$H^*(\Omega X;\mathbb{Z})$　は　Bott [1] により torsion free だから　X の巾指数を $1=m(1)\leqq\cdots\leqq m(\ell)$　とするとき A の Poincaré 級数は

$$\left(\prod_{j=2}^{\ell}(1-t^{2m(j)})^{-1}\right)\cdot(1-t^{2p^d})^{-1}$$

である。従って　この d を定めると　$H^*(X^{(1)};\mathbb{F}_p)$ がわかる（少なくとも vector space として）。d は実は次であたえられる。d は X と p によるので $d(X,p)$ と書く

定理3. (1) X が古典型の時

$$d(X,p)=\begin{cases} r(n,p) & , G=SU(n)\\ r([n/2],2) & , G=Spin(n)\quad p=2\\ 1 & , G=Sp(n)\quad p=2\\ r(2n,p) & , G=Spin(n)\ \text{or}\ Sp(n)\ \text{で}\ p\ \text{odd}\end{cases}$$

ただし $p^{r(n,p)-1}<n\leq p^{r(n,p)}$ である。

(2)　X が例外型の時

$d(G_2,2)=d(F_4,2)=2$,　$d(E_\ell,2)=4$　$\ell=6.7.8$

p が奇数の時は次の表を見よ.

X	G_2		F_4, E_6		E_7			E_8		
p	5,	$\neq 5$	≤ 11	>11	3	$5\leq p\leq 17$	>17	3	$5\leq p\leq 29$	>29
$d(X,p)$	2	1	2	1	3	2	1	3	2	1

この講演の目的は上の定理3の証明である。上でわかるように $m(l)<p$ の時 $d(X,p)=1$ であるが、これは Kac [2] により知られている。

x_3 を $H^3(X;\mathbb{F}_p)$ の生成元としその cohomology suspension を t とする。d が $\mathcal{P}^{p^{d-1}}\cdots\mathcal{P}^1 x_3=0$ (注1) をみたせば

$$t^{p^d}=\mathcal{P}^{p^{d-1}}\cdots\mathcal{P}^1 t=\sigma(\mathcal{P}^{p^{d-1}}\cdots\mathcal{P}^1 x_3)=0$$

(σ は cohomology suspension 従って $t=\sigma(x_3)$) である。定理3の $d(X,p)$ についてこれが成立することは，リー群のコホモロジーの結果よりすぐにわかる。従って逆に定理3の $d(X,p)$ について $t^{p^{d(X,p)-1}}\neq 0$ を示せばよい(注2)*。まず X が古典型の時には次のようにすればよい ($X=SU(n)$ とする)。Bott [1] により

(6) $\qquad \lambda: \mathbb{C}P^{n-1}\longrightarrow \Omega SU(n)$

で $\lambda^*: H^2(\Omega SU(n);\mathbb{Z})\longrightarrow H^2(\mathbb{C}P^{n-1};\mathbb{Z})$ が同型になるものが存在する。従って $H^*(\mathbb{C}P^{n-1};\mathbb{F}_p)\cong \mathbb{F}_p[a]/(a^n)$ $(\deg a=2)$ だから，これから $t^{p^{d(X,p)-1}}\neq 0$ はすぐにわかる。

一方例外型の場合には別々に計算することになる。(注3) 例えば

$X = G_2 \quad p=2$ とすると

$$H^*(G_2;\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[x_3]/(x_3^4) \otimes \Lambda(x_5)$$

$\deg x_3 = 3$, $\deg x_5 = 5$, $Sq^2 x_3 = x_5$ である。すると

$$H^*(G_2\langle 3\rangle;\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[y_8] \otimes \Lambda(y_9, y_{11})$$

$\deg y_j = j$ である。従って

$$H^*(\Omega G_2\langle 3\rangle;\mathbb{F}_2) = 0 \qquad 0 < * \leq 7$$

であり $d \geq 2$ が得られる。他の場合も同様である

(注1) $p=2$ の時 $Sq^2 = \mathcal{P}^1$ とする

(注2) $t^{p^d-1} \neq 0$ を示すべきであるが $H^*(\Omega X;\mathbb{F}_p)$ が Hopf algebra なので $t^{p^{d-1}} \neq 0$ ならばいつも $t^{p^d-1} \neq 0$ である

(注3) $p=2$ の時 $H_*(\Omega X\langle 3\rangle;\mathbb{F}_2)$ Xが例外型 は小島[4]により計算されている。

— References —

[1] R. Bott, The space of loops on a Lie group, Michigan Math. J., 5 (1958), 35–61

[2] V. G. Kac, Torsion in cohomology of compact Lie groups and Chow rings of reductive algebraic groups, Inv. Math., 80 (1985), 69–79

[3] A. Kono, On the cohomology of the 2-connected cover of the loop spaces of simple Lie groups (to appear)

[4] K. Kozima, Mod 2 homology ring of the space of loops on exceptional Lie groups (in Japanese)