数理解析研究所講究録
第577巻 1985年 80-100

Virasoro環のユニタリ表現について

三重大教育　蟹江　幸博 (Yukihiro Kanie)

Virasoro環$\mathcal{L}$は$\mathcal{L}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}e_n+\mathbb{C}e_0'$の形のLie環で，交換関係は$[e_m,e_n]=(m-n)e_{m+n}+(m^3-m)e_0'/12$，$[e_0',e_n]=0$で与えられるものである。$S^1$上の多項式ベクトル場のLie環の一意的な1次元中心拡大であり，素粒子論の双対弦模型のゲージとして広く知られたものである。

Cartan部分環$\mathfrak{h}=\mathbb{C}e_0+\mathbb{C}e_0'$のdual $\mathfrak{h}^*\cong\mathbb{C}^2\ni(h,c)=\lambda$ ($\lambda(e_0)=h$; $\lambda(e_0')=c$)の元に対して，Verma module $M(\lambda)=M(h,c)$が次のように定義される。$|h,c\rangle\in M(h,c)$によって生成され，$|h,c\rangle$は

$$e_0|h,c\rangle = h|h,c\rangle,\quad e_0'|h,c\rangle=c|h,c\rangle;\ e_n|h,c\rangle=0\ (n\geq1)$$

を満たし、他の関係はない。$\mathfrak{g}$の三角分解$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ ($\mathfrak{n}_\pm=\sum_{n\geq1}\mathbb{C}e_{\pm n}$)を固定すると，

$$M(h,c)=U(\mathcal{L})|h,c\rangle=U(\mathfrak{n}_-)|h,c\rangle$$

となり，$U(\mathfrak{n}_-)$-freeである。次数を$\deg e_n=n$，$\deg e_0'=0$で定めると，$M(h,c)$に自然なgradingが入り，$-d$次の部分を$M_d(h,c)$

と書くと，その次元は $d(\geq 0)$ の分割数 $p(d)$ となる。また $M(h,c)$ に dual に定義した右 $\mathcal{L}$-module $M^\dagger(h,c)$ を考えておくと都合が良い。真空 $\langle c,h| \in M^\dagger(h,c)$ を $\langle c,h|e_0 = \langle c,h|h$, $\langle c,h|e_0' = \langle c,h|c$, $\langle c,h|e_{-n} = 0 \quad (n\geq 1)$ として定義したもので、$M(h,c)$ と同様の性質を持つ。

Verma module は $|h,c\rangle$ と同じ性質を持つベクトルを持つ highest weight modules に対し universal な性質を持っている。

さて、Verma module の既約性や同値性に対して本質的な役割を果たすのが、真空期待値

$$(\ |\ ) : M^\dagger(h,c) \times M(h,c) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\text{定義}\begin{pmatrix} ① (\ |\ ) \text{ sesquilinear} & ② \langle c,h|h,c\rangle = 1 \\ ③ \langle u x| v\rangle = \langle u|x v\rangle & u\in M^\dagger(h,c), v\in M(h,c), x\in\mathcal{L} \end{pmatrix}$$

に対する Kac 行列式（[7]参照）である。$(\ |\ )$ は $M_d^\dagger(h,c)\times M_{d'}(h,c)$ $(d\neq d')$ 上では常に 0 で，$(\ |\ )$ の $M_d^\dagger(h,c)\times M_d(h,c)$ への制限が表わす $p(d)\times p(d)$-行列の行列式 $K_d(h,c)$ が問題になるものである。例えば，$M(h,c)$ の既約性は，$K_d(h,c)\neq 0$ $(\forall d\geq 0)$ という条件になる。Kac とその後証明を与えた Feigin-Fuks [2] によれば，

$$K_d(h,c) = \text{const.}\prod_{k=1}^{d}\prod_{j|k}\Phi_{j,k/j}(h,c)^{p(d-k)},$$

ここで，

$$\Phi_{p,q}(h,c) = \left(h+\frac{p^2-1}{24}(c-13)-\frac{1}{2}(pq+1)\right)\left(h+\frac{q^2-1}{24}(c-13)-\frac{1}{2}(pq+1)\right)-\frac{(p^2-q^2)^2}{16}.$$

[11]では、この$\Phi_{p,q}$のある因数分解に対応して、$\mathcal{L}$のFock表現を構成し、intertwining operatorsの積分表示を与えたが、実は$\Phi_{p,q}$には別の分解があった。$M(h,c)$のunitarizabilityに関連して、Friedanら[3]が発見した因数分解は、

$$\Phi_{p,q}(h,c) = (h - h_{p,q}(c))(h - h_{q,p}(c))$$

である。ここで、cを$c = 1 - 6/m(m+1)$と表わすようなmをとり、$h_{p,q}(m) = [\{(m+1)p + mq\}^2 - 1]/4m(m+1)$としたものである（$h_{p,q}(m+1) = h_{q,p}(m)$に注意）。

Hermite形式$\{\ ,\ \} : M(h,c) \times M(h,c) \longrightarrow \mathbb{C}$が

$$\{|h,c\rangle, |h,c\rangle\} = 1, \quad \{e_n|u\rangle, |v\rangle\} = \{|u\rangle, e_{-n}|v\rangle\}, \quad \{e_0'|u\rangle, |v\rangle\} = \{|u\rangle, e_0'|v\rangle\}$$

を満たすときcontravariantと呼ぶ。ベクトル$v \in M(h,c)$のノルム$\|v\|^2 = \{v, v\}$が負のとき、ghostと呼ぶことにすると、$M(h,c)$にghostがいなければ、$\{\ ,\ \}$の核で$M(h,c)$を割ったもの$L(h,c)$は$\mathcal{L}$のユニタリ表現を与えることになる。

$M(h,c)$にghostがなければ、$h, c \geqslant 0$にならねばならないことは、$\|e_{-n}|h,c\rangle\|^2 \geqslant 0$ $(\forall n \geqslant 1)$を考えるとすぐに分るが、逆が問題である。まず連続系列として、$h \geqslant 0$, $c \geqslant 1$に対してはghostがないようなcontravariant形式があることは難しいことではない。σを$\mathcal{L}$のantilinearなantiinvolutionで$\sigma(e_n) = -e_{-n}$, $\sigma(e_0') = e_0'$で定まるものとし、$\{u, v\} = (\sigma u | v)$と真空期待値を用いて表わせば（$\sigma : M(h,c) \longrightarrow M^{+}(h,c)$に自然に定義してお

$\langle\ ,\ \rangle$, $\{\ ,\ \}$ は contravariant 形式となり，$h>(c-1)/24$，$c>1$ のときはこの $\{\ ,\ \}$ で ghost を持たない既約表現に $M(h,c)$ がなっていることは容易に示される。残りの部分に関しては，Kac 行列式を見て，既約性から ghost が出てこないことを主張する。

面白いのは実は $0\leqq c<1$ の場合で，この場合 unitarizable なパラメーター (h,c) は離散的になるというのである。

定理（Friedan et al [3]）．$h\geqq 0$，$0\leqq c<1$ に対し $M(h,c)$ に ghost がいないならば，(h,c) は次の形をしている：

$$c=1-\frac{6}{m(m+1)}\ ,\quad h=\frac{((m+1)p-mq)^2-1}{4m(m+1)}\quad \left(\begin{array}{l} m:\text{正整数}\\ p=1,2,\cdots,m-1\\ q=1,2,\cdots,p\end{array}\right).$$

この定理に与えられている証明は，数学的には clear とは言い難いので，意味の分る simple な証明が望まれている。

この定理の逆，つまりこのパラメーター (h,c) に対し，実際にそのユニタリ表現が存在するかについても，Goddard 達[4]が quaternion 射影空間 HP^{l-1} に附随した coset space 表現を用いて $c=1-6/(l+1)(l+2)$ に対するそのユニタリ表現を与えている。これにヒントを得て，と言うか，彼らの主張を数学的に定式化し，証明を与えたものが [12] である。Virasoro 環の出自のせいで，多くの物理学者が Virasoro 環について多くの研究をしてい

るが、数学者には納得し難い概念構成や証明も多い。それらの厳密化のすべてにoriginalityを主張することは難しいが、克服すれば実りある障害も多いと思われる。

さて、[12]では$C_\ell^{(1)}$型のaffine Lie環のlevel 1のintegrable highest weight moduleを$C_1^{(1)}+C_{\ell-1}^{(1)}$型の部分環上のmoduleとして分解するという方法をとった。しかし、他にも構成法があって、$A_1^{(1)}$のlevel $(\ell-1)$の表現とlevel 1の表現のテンソル積を、level ℓの表現で分解する方法で、広島大学の脇本氏の方法である。[12]では分解の重複度も調べてあるが、その計算はテンソル積の分解でも同様であって[12]の最後の節に付記してある。尚、研究集会後2つの報せを受けとった。Goddardらの[5]とKac-脇本[10]である。これらは、Virasoro環だけでなくそのsuper化であるNeveu-Schwarz環とRamond環に対してもユニタリ表現の構成が同様に出来ることを主張したものである。

以下[12]に沿ってユニタリ表現の構成をすることにしよう。

§1. $X_\ell^{(1)}$型affine Lie環とSegal作用素

$\mathfrak{g}$を有限次元の単純Lie環でX_ℓ型とする。$\mathfrak{h}$を$\mathfrak{g}$のCartan部分環とし、Δを$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$のルート系とすると、$\mathfrak{g}$のルート空間分解$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha$が得られる。単純ルート系$\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_\ell\}$を選んで、正のルートの集合を$\Delta_+$と書く。$\mathfrak{g}$上の非退化で対称

な不変双線形形式 $(\ ,\ ) : \mathring{\mathfrak{g}} \times \mathring{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathbb{C}$ を, $\mathring{\Pi}$ に関する最大ルート θ に対して $(\theta, \theta) = 2$ となるように正規化しておく。

$X_\ell^{(1)}$ 型の affine Lie 環 $\mathfrak{g}$ とは, この $\mathring{\mathfrak{g}}$ と内積 $(\ ,\ )$ によって

$$\mathfrak{g} = \mathring{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

$$\begin{cases} [x(m), y(n)] = [x,y](m+n) + m\,\delta_{m+n,0}\,(x,y)\,c, \\ [c, x(m)] = [c, d] = 0, \quad [d, x(m)] = m\,x(m) \end{cases}$$

で与えられるものである (ここで $x(m) = x \otimes t^m$, $x \in \mathring{\mathfrak{g}}$)。

$\mathfrak{h} = \mathring{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環となり, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ のルート系 Δ の単純ルート系を $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_\ell\}$ と取ることができる。ここで, α_i $(1 \le i \le \ell)$ は $\mathbb{C}c + \mathbb{C}d$ 上では 0 として $\mathfrak{h}$ 上に拡張したもので, $\alpha_0 = \delta - \theta$ である。$\delta \in \mathfrak{h}^*$ は $\langle \delta, \mathring{\mathfrak{h}} \rangle = \langle \delta, c \rangle = 0$, $\langle \delta, d \rangle = 1$ によって定義される元である。

$\mathfrak{g}$ 上の内積 $(\ ,\ )$ を,

$$\begin{cases} (x(m), y(n)) = \delta_{m+n,0}\,(x,y), \quad (c, x(m)) = (d, x(m)) = 0, \\ (c,c) = (d,d) = 0, \quad (c, d) = 1 \end{cases}$$

によって $\mathfrak{g}$ 上の非退化で対称な不変双線形形式に拡張すると, $\mathfrak{h}$ 上に制限したものも非退化になる。同型 $\nu : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^*$ が $(h, h') = \langle \nu(h), h' \rangle$ によって定義でき, $\nu(c) = \delta$ となる。また $\Lambda_0 = \nu(d)$ とおくと $\langle \Lambda_0, \mathring{\mathfrak{h}} \rangle = \langle \Lambda_0, d \rangle = 0$, $\langle \Lambda_0, c \rangle = 1$ となる。$\mathfrak{h}^*$ の内積を ν によって $\mathfrak{h}$ の内積から決めると, $(\delta, \delta) = (\Lambda_0, \Lambda_0) = 0$ となる。

$\mathring{\mathfrak{g}}$の $(\ ,\ )$ に関する dual basis を $\{u_1,\cdots,u_\ell\}$, $\{u^1,\cdots,u^\ell\}$ と選び，任意のルート $\alpha\in\mathring{\Delta}$ において，$u_\alpha\in\mathring{\mathfrak{g}}_\alpha$，$u^\alpha=u_{-\alpha}\in\mathring{\mathfrak{g}}_{-\alpha}$ を $(u_\alpha,u^\alpha)=1$ をみたすように選べば，$\{u_i\ (i=1,\cdots,\ell),\ u_\alpha\ (\alpha\in\Delta)\}$ と $\{u^i, u^\alpha\}$ は $\mathring{\mathfrak{g}}$ の dual basis になる。そのとき $\mathring{\mathfrak{g}}$ の Casimir作用素 $\mathring{\Omega}$ は，

$$\mathring{\Omega}=\sum_{i=1}^{\ell}u^i\otimes u_i+\sum_{\alpha\in\mathring{\Delta}}u^\alpha\otimes u_\alpha\quad\in\mathring{\mathfrak{g}}\otimes\mathring{\mathfrak{g}}\subset U(\mathring{\mathfrak{g}})$$

で定義されるものである。$\mathring{\Omega}$ は dual basis の取り方に依らず，$U(\mathring{\mathfrak{g}})$ の中心に属し，$\mathring{\mathfrak{g}}$ と $2g\cdot id$ として作用する。ここで，g は $\mathring{\mathfrak{g}}$ の双対コクセター数で，$2g=|\theta+\mathring{\rho}|^2-|\mathring{\rho}|^2$ となっている。$\mathring{\rho}\in\mathfrak{h}^*$ は $\mathring{\rho}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\mathring{\Delta}_+}\alpha$ である。

$\mathring{\mathfrak{g}}$ の basis を $\{u_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}$ とまとめて書くことにすると，$\{u_\lambda(m)\ (m\in\mathbb{Z},\lambda\in\Lambda),\ c, d\}$ と $\{u^\lambda(m)\ (m\in\mathbb{Z},\lambda\in\Lambda),\ d, c\}$ は互に dual な $\mathfrak{g}$ の basis を与えている。このとき，Kac は $\mathfrak{g}$ の Casimir作用素 Ω を

$$\Omega=2\sum_{m\geq1}\sum_{\lambda\in\Lambda}u^\lambda(-m)u_\lambda(m)+2\sum_{\alpha\in\mathring{\Delta}_+}u^\alpha u_\alpha+2\nu^{-1}(\rho)+\sum_{j=1}^{\ell}u^ju_j+2dc$$

と定義した。ここで，$\rho\in\mathfrak{h}^*$ は $\rho=g\Lambda_0+\mathring{\rho}$ で定められる。

さて $\mathring{\mathfrak{g}}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ の元の正規積を

$$:x(m)\,y(n):=\begin{cases}x(m)\,y(n) & (m<n)\\ \frac{1}{2}\{x(m)y(n)+y(n)\,x(m)\} & (m=n)\\ y(n)\,x(m) & (m>n)\end{cases}$$

と定義し，形式的Laurent級数

$$\hat{S}(z)=\sum_{j=1}^{\ell}:\hat{u}^j(z)\,\hat{u}_j(z):+\sum_{\alpha\in\mathring{\Delta}}:\hat{u}^\alpha(z)\,\hat{u}_\alpha(z):$$

を考えよう。ここで、形式的Laurent級数 $\hat{x}(z)$ $(x \in \mathring{\mathfrak{g}})$ は

$$\hat{x}(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} x(m)\, z^{-m-1}$$

と定義されるものである。更に、$\hat{S}(z)$ を展開すると、

$$\hat{S}(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} S(m)\, z^{-m-2},$$

その係数 $S(m)$ は $\mathring{\mathfrak{g}}$ の dual basis の取り方に依らず決まり，特に

$$S(0) = \Omega - 2(g+c)\, d$$

であることも分る。

最初に導入した G. Segal（[9] 参照）に因んで Segal 作用素と呼ぶ $S(m)$ は次の交換関係を満足している。

$$[S(m), \hat{x}(z)] = 2(g+c)\, z^{m} \left\{ z\frac{d}{dz} + (m+1) \right\} \hat{x}(z),$$

$$[S(m), S(n)] = 2(g+c)(m-n)\, S(m+n) + \frac{\dim \mathring{\mathfrak{g}}}{12}(m^3-m)\,\delta_{m+n,0}\, 4(g+c)c.$$

左 $\mathfrak{g}$-module V が、最高ウェイト $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ を持つ最高ウェイト表現 (h.w. module) であるというのは，

$$\mathfrak{n}_+ v = 0 \quad , \quad h v = \langle \Lambda, h \rangle v \quad (h \in \mathfrak{h}) \; ; \quad V = U(\mathfrak{g}) v$$

を満たすベクトル $v \in V$（真空ベクトルという）が存在するときである。ここで $\mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n}_+(\mathfrak{g})$ は、単純ルート系 Π に対して $\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$ で与えられるものである。

正規積の定義により、Segal 作用素 $S(m)$ は、任意の h.w. module に働く作用素になっていることが分る。また、最高ウェイト Λ

を持つ h.w. module V 上で、Casimir作用素Ωは

$$\Omega = \{(\Lambda, \Lambda) + 2(\Lambda, \rho)\}\, id_V$$

として作用する（[8] 参照）。

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の単純コルート $\alpha_i^\vee$ $(0 \leq i \leq l) \in \mathfrak{h}$ を $\alpha_i^\vee = \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \nu^{-1}(\alpha_i)$ で定義し，基本ウェイト Λ_i $(0 \leq i \leq l) \in \mathfrak{h}^*$ を $\langle \Lambda_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$，$\langle \Lambda_i, d \rangle = 0$ と定義すると，$\langle \rho, \alpha_i^\vee \rangle = 1$ $(0 \leq i \leq l)$, $\langle \rho, d \rangle = d$ となる。$\mathfrak{g}$ のルート束 Q とウェイト束 P は

$$P = \sum_{i=0}^{l} \mathbb{Z} \Lambda_i \oplus \mathbb{C}\delta \supset Q = \sum_{i=0}^{l} \mathbb{Z} \alpha_i$$

と与えられ，また

$$P_+ = \sum_{i=0}^{l} \mathbb{Z}_{\geq 0} \Lambda_i \oplus \mathbb{C}\delta \supset Q_+ = \sum_{i=0}^{l} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$$

とおく。P_+の元を dominant な整ウェイトと言う。

最高ウェイト Λ を持つ h.w. module V はウェイト分解 $V = \sum_{\lambda \in P(V)} V_\lambda$ を持つが，そのウェイトの集合 $P(V)$ は $\Lambda - Q_+$ に含まれる。

$\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\mathfrak{g}$ の Verma module $M(\Lambda)$ が $\mathcal{L}$ に対するのと同様に定義され、その既約な商 module $L(\Lambda)$ は1つしかない。

h.w. module V が integrable とは、任意の実ルート α に対し $\mathfrak{g}_\alpha$ の任意の元が V に局所巾零に作用するときである。$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の実ルートとは，単純ルート系 Π の元から Weyl 群 W の作用での像になっているもののことである。また Weyl群 W は $GL(\mathfrak{h}^*)$ の部分群で、単純鏡映 $r_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ $\left(r_i(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i \right.$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\left. 0 \leq i \leq l \right)$

で生成したもののことである。今の場合、所謂affine Weyl群になっている。

Kac [8] に依って次のことが知られている。h.w. module $L(\Lambda)$ が integrable であることと $\Lambda \in P_+$ が同値であり、integrable な h.w. module はある $L(\Lambda)$, $\Lambda \in P_+$ と同型になる。

$\Lambda \in P_+$ に対して、非負整数 $k = \langle \Lambda, c \rangle$ を Λ の level といい、c は $L(\Lambda)$ 上 $k \cdot id$ として働く。また Casimir作用素 Ω は $L(\Lambda)$ 上 $\{(\Lambda, \Lambda) + 2(\rho, \Lambda)\}\, id$ として働くことが分る。このとき $g + k > 0$ となるので、

$$T(m) = \frac{1}{2(g+c)}\, \mathcal{S}(m) \quad (m \in \mathbb{Z}); \quad T'(0) = \frac{\dim \mathring{g}}{g+c}\, c$$

とおけ、$\mathcal{S}(m)$ の交換関係から、

$$\begin{cases} [T(m), T(n)] = (m-n)\, T(m+n) + \dfrac{m^3 - m}{12}\, \delta_{m+n,0}\, T'(0); \\ [T(m), T'(0)] = 0 \qquad\qquad (m, n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

となり、Virasoro環 $\mathcal{L}$ の表現が $L(\Lambda)$ 上に得られることになる。双対コクセター数 g が具体的に知られていることから、人の $L(\Lambda)$ 上に得られた表現の中心チャージ（e_0' の作用の値）は1より大きくなり、離散パラメーター領域のユニタリ表現は表わし得ない。

そこで $X_\ell^{(1)}$ 型の Lie環 $\mathfrak{g}$ に対し、$X_{\ell'}^{(1)}$ $(\ell' < \ell)$ 型の部分環（又はそのような部分環の直交直和の部分環）$\mathfrak{k}$ を考えて、同様に

Segal 作用素 $T_k(m)$, $T_k'(0)$ を考える。$T_k(m)$ に対しても $T(m)$ に対する conformal 共変性

$$[T(m),\ \hat{x}(z)] = z^m\left\{z\frac{d}{dz}+(m+1)\right\}\hat{x}(z)$$

が同じ形で成り立つことから, $[T(m),\ T_k(n)] = 0$ が分り,

$$T_\perp(m) = T(m) - T_k(m)\ ; \quad T_\perp'(0) = T'(0) - T_k(0)$$

とおけば, これらも Virasoro 環の関係式

$$[T_\perp(m),\ T_\perp(n)] = (m-n)\,T_\perp(m+n) + \frac{m^3-m}{12}\,\delta_{m+n,0}\,T_\perp'(0);$$

$$[T_\perp(m),\ T_\perp'(0)] = 0 \qquad\qquad (m, n \in \mathbb{Z})$$

を満足する。

古典型の Lie 環に対して, 次のような部分環をとることができる。

$$A_\ell^{(1)} \supset A_0^{(1)} \times A_{\ell-1}^{(1)}\ ;\quad C_\ell^{(1)} \supset C_1^{(1)} \times C_{\ell-1}^{(1)}\ ;\quad B_\ell^{(1)} \supset B_{\ell-1}^{(1)}\ ;\quad D_\ell^{(1)} \supset D_{\ell-1}^{(1)}.$$

すると, level k の integrable h.w. module $L(\Lambda)$ 上での $\{T_\perp(m),\ T'(0)\}$ による Virasoro 環 $\mathcal{L}$ の表現の中心チャージは,

$A_\ell^{(1)}$: $(k-1)\left\{1-\dfrac{k(k+1)}{(k+\ell+1)(k+\ell)}\right\}$; $k=1$ のとき 0 ; $k=2$ のとき $1-\dfrac{6}{(\ell+2)(\ell+3)}$

$C_\ell^{(1)}$: $k\left\{\dfrac{2\ell^2+\ell}{\ell+1+k}-\dfrac{3}{2+k}-\dfrac{2(\ell-1)^2+\ell-1}{\ell+k}\right\}$; $k=1$ のとき $1-\dfrac{6}{(\ell+1)(\ell+2)}$,

$B_\ell^{(1)}, D_\ell^{(1)}$: $k=1$ のとき $\frac{1}{2}$; $k=2$ のとき 1

となる。Friedan らの定理から, $A_\ell^{(1)}$ 型で level 2 の表現, $C_\ell^{(1)}$ 型で level 1 の表現が候補となる。次節では $C_\ell^{(1)}$ 型の場合を扱か

おう。この場合は、神保・三輪[6]により分岐則が計算されているので都合が良い。

$\Lambda \in P_+$ に対する $L(\Lambda)$ には

$$\{v_\Lambda, v_\Lambda\} = 1 \ , \quad \{u, av\} = \{\overline{\omega}(a)u, v\} \qquad (u, v \in L(\Lambda), a \in \mathfrak{g})$$

をみたす正定値の hermite 形式が一意的に存在することが、H. Garland によって知られている。ここで、v_Λ は $L(\Lambda)$ の真空ベクトルを1つ固定したもので、$\overline{\omega}$ は $\mathfrak{g}$ の反線形な反対合で

$$\overline{\omega}(x(m)) = \overline{\omega}_0(x)(-m) \quad (x \in \mathring{\mathfrak{g}}) ; \quad \overline{\omega}(c) = c \ , \ \overline{\omega}(d) = d$$

で与えられるものである。$\overline{\omega}_0$ は $\mathring{\mathfrak{g}}$ の反線形な反対合を1つ固定したものである。またこのとき、Segal 作用素 $T(m)$ に対しても $\overline{\omega}(T(m)) = T(-m)$ が成り立ち、従って $\overline{\omega}(T_\perp(m)) = T_\perp(-m)$ となり、Virasoro 環の表現 $\{T_\perp(m)\ (m \in \mathbb{Z}),\ T_\perp'(0)\}$ に対して、

$$\{u, T_\perp(-m)v\} = \{T_\perp(m)u, v\}, \quad \{u, T_\perp'(0)v\} = \{T_\perp'(0)u, v\}$$

が、任意の $u, v \in L(\Lambda)$ に対して成り立つという意味で、ユニタリ表現を与えていることになる。

§2. $C_\ell^{(1)}$ 型 affine Lie 環と Virasoro 環のユニタリ表現

$\mathfrak{g}$ を $C_\ell^{(1)}$ 型の affine Lie 環とし、少し精しく述べることにしよう。$\mathring{\mathfrak{g}}$ の実現を

$$\mathring{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sp}(\ell, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2\ell; \mathbb{C}) ; {}^tXJ + JX = 0\}$$

(ここで $J = \begin{pmatrix} & I \\ -I & \end{pmatrix}$ とする) と与えると、$h_i = E_{ii} - E_{i+\ell, i+\ell}$ は

$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ を張っている $\mathfrak{h}=\sum_{i=1}^{l}\mathbb{C}h_i$ 。(ここで E_{ij} は $\mathfrak{gl}(2l;\mathbb{C})$ の (i,j)-行列単位である。) $\varepsilon_i\in\mathfrak{h}^*$ を $\varepsilon_i(h_j)=\delta_{ij}$ で定めると、$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ のルート系 $\mathring{\Delta}$ は

$$\mathring{\Delta}=\{\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)\ (1\le i<j\le l);\ \ \pm 2\varepsilon_i\ (1\le i\le l)\}$$

で与えられ、単純ルート系 $\mathring{\Pi}$ は $\mathring{\Pi}=\{\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2,\cdots,\alpha_{l-1}=\varepsilon_{l-1}-\varepsilon_l,\ \alpha_l=2\varepsilon_l\}$ と取ることが出来る。最大ルート θ は $\theta=2\varepsilon_1$, $\mathring{\rho}$ は $\mathring{\rho}=l\varepsilon_1+(l-1)\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_l$ と表わされる。

$\mathfrak{g}$ 上の $\mathfrak{g}$-不変な対称双線形式 $(\ ,\ )$ を $(X,Y)=\mathrm{tr}(XY)$ とおくと非退化になる(ここで、tr は $\mathfrak{gl}(2l;\mathbb{C})$ の元と見てのもの)。この $(\ ,\ )$ によって、$\nu(h_i)=2\varepsilon_i$ となり、$(h_i,h_j)=4(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=2\delta_{ij}$ になっており、$(\theta,\theta)=2$ を満足している。Segal作用素 $T(m)$ は $(\ ,\ )$ の取り方には依らないが($(\ ,\ )$ に課された条件を満たす限り)、この内積が具体的で分り易い。また双対コクセター数 g は、$g=\frac{1}{2}(\theta,\theta)+(\theta,\mathring{\rho})=l+1$ となっている。

$\mathfrak{g}$ の反線形な反対合 $\bar{\omega}_0$ を

$$\bar{\omega}_0(E_\alpha)=E_{-\alpha}\ \ (\alpha\in\mathring{\Delta}),\qquad \bar{\omega}_0(h_i)=h_i\ \ (1\le i\le l)$$

と定まるものと取ることにする。ここで E_α は $\alpha\in\mathring{\Delta}$ に対するルートベクトルで、$E_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=E_{ij}-E_{j+l,i+l}$; $E_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}=E_{ij}+E_{j,i+l}$; $E_{-(\varepsilon_i+\varepsilon_j)}=E_{i+l,j}+E_{j+l,i}$; $E_{2\varepsilon_i}=E_{i,i+l}$; $E_{-2\varepsilon_i}=E_{i+l,i}$ で与えられるものとする。$\mathfrak{g}_\alpha=\mathbb{C}E_\alpha\ (\alpha\in\mathring{\Delta})$ とおくと、ルート分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\mathring{\Delta}}\mathfrak{g}_\alpha$ が得られる。

ルート系$\mathring{\Delta}$と$\mathfrak{g}$の Cartan 部分環$\mathring{\mathfrak{h}}$を

$$\mathring{\Delta} = \mathring{\Delta}_1 \cup \mathring{\Delta}_2 \cup \mathring{\Delta}_\perp \ , \quad \mathring{\Delta}_1 = \{\pm 2\varepsilon_1\}, \quad \mathring{\Delta}_\perp = \{\pm(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j)\ (2\leq j\leq \ell)\}$$
$$\mathring{\Delta}_2 = \{\pm 2\varepsilon_i\ (2\leq i\leq \ell),\ \pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)\ \ (2\leq i<j\leq \ell)\},$$
$$\mathring{\mathfrak{h}} = \mathring{\mathfrak{h}}_1 + \mathring{\mathfrak{h}}_2 , \quad \mathring{\mathfrak{h}}_1 = \mathbb{C}h_1 , \quad \mathring{\mathfrak{h}}_2 = \mathbb{C}h_2 + \cdots + \mathbb{C}h_\ell$$

と分解し.

$$\mathring{k}_i = \mathring{\mathfrak{h}}_i \oplus \sum_{\alpha\in\mathring{\Delta}_i} \mathfrak{g}_\alpha \qquad (i=1,2)$$

とおくと，$\mathring{k}_1$と$\mathring{k}_2$は$\mathfrak{g}$の部分環で（，）に関して互に直交している。$\mathring{k}_1$と$\mathring{k}_2$はそれぞれC_1型と$C_{\ell-1}$型の単純 Lie 環となり，$\mathring{\mathfrak{h}}_i$は$\mathring{k}_i$ $(i=1,2)$ の Cartan 部分環で，上の分解がルート空間分解を与えている。$\mathring{\pi}_i = \mathring{\pi} \cap \mathring{\Delta}_i$ は$\mathring{\Delta}_i$の単純ルート系になり，$\mathring{\Delta}_i$の正のルートの和の半分$\mathring{\rho}_i$と最大ルートθ_iは，

$$\mathring{\rho}_1 = \varepsilon_1 , \ \theta_1 = 2\varepsilon_1 \ ; \ \mathring{\rho}_2 = (\ell-1)\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_\ell , \ \theta_2 = 2\varepsilon_2$$

と与えられる。（，）を$\mathring{k}_i\times\mathring{k}_i$に制限すると，$(\theta_i,\theta_i)=2$ と正規化された$\mathring{k}_i$-不変な対称双線形形式になっている。

$\mathfrak{g}$の部分空間 k_1, k_2, k を

$$k_i = \mathring{k}_i \otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d \quad (i=1,2) ; \quad k = k_1 + k_2$$

と定めると，k_1は$C_1^{(1)}$型の，k_2は$C_{\ell-1}^{(1)}$型の affine Lie 環になる。またk_iはそれぞれ$\overline{\omega}$に関して不変である。前節で述べたように，conformal 共変性がk_iに対しても定義される Segal 作用素$T_i(m)$に対して成り立つことと，$\mathring{k}_1\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$と$\mathring{k}_2\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$との直交性とから，$[T(m)-T_i(m),\ T_i(n)] = [T_1(m), T_2(n)] = 0$ が成

り立つことから,

$$T_\perp(m) = T(m) - T_1(m) - T_2(m) \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

$$T_\perp'(0) = \left\{ \frac{\dim \mathring{\mathfrak{g}}}{2(g+c)} - \frac{\dim \mathring{\mathfrak{k}}_1}{2(g_1+c)} - \frac{\dim \mathring{\mathfrak{k}}_2}{2(g_2+c)} \right\} c$$

が、Virasoro環$\mathcal{L}$の関係式を満たすことが分る(ここで, g_iは$\mathring{\mathfrak{k}}_i$の双対コクセター数で, $g_1 = 2$, $g_2 = l$ である)。

$\mathfrak{n}_\pm(\mathfrak{k}) = \mathfrak{n}_\pm \cap \mathfrak{k}$ とおくと, $\mathfrak{k} = \mathfrak{n}_-(\mathfrak{k}) \oplus \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{n}_+(\mathfrak{k})$と分解される。

$\Lambda \in P_+$ の level を 1 とし, $L(\Lambda)$ を考えよう。$L(\Lambda)$ の元vが $\mathfrak{n}_+(\mathfrak{k})v = 0$ を満たすとき, $\mathfrak{k}$-特異ベクトルと呼び、その全体を $\mathcal{S}(\Lambda;\mathfrak{k})$ と書こう。$\mathcal{S}(\Lambda;\mathfrak{k})$ は$\mathcal{L}$の作用で不変であり, $\{,\}$に関してユニタリ表現を与えており, $\mathfrak{f}$-不変でもあることから、ウェイト空間分解

$$\mathcal{S}(\Lambda;\mathfrak{k}) = \sum_{\lambda \in P(\Lambda:\mathfrak{k})} \mathcal{S}_\lambda(\Lambda;\mathfrak{k})$$

を持つ。$\pi : \mathfrak{f}^* \longrightarrow \mathring{\mathfrak{f}}^*$ を $(,)$ に関する直交射影とし, $\overline{P}(\Lambda:\mathfrak{k}) = \pi(P(\Lambda:\mathfrak{k}))$ とおき, 各 $\overline{\lambda} \in \overline{P}(\Lambda:\mathfrak{k})$ に対して

$$\mathcal{S}(\Lambda;\mathfrak{k},\overline{\lambda}) = \sum_{\substack{\lambda \in P(\Lambda:\mathfrak{k}) \\ \pi(\lambda) = \overline{\lambda}}} \mathcal{S}_\lambda(\Lambda;\mathfrak{k})$$

とおくと, これも$\mathcal{L}$の作用で不変となり, $\mathcal{S}(\Lambda;\mathfrak{k},\overline{\lambda})$ 上で

$$T_\perp(0) = \left\{ \frac{(\Lambda,\Lambda) + 2(\rho,\Lambda)}{2(l+2)} - \frac{(\overline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_1) + 2(\mathring{\rho}_1,\overline{\lambda}_1)}{2 \times 3} - \frac{(\overline{\lambda}_2,\overline{\lambda}_2) + 2(\mathring{\rho}_2,\overline{\lambda}_2)}{2(l+1)} \right\} - d$$

となることが分る。ここで $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 \in \mathring{\mathfrak{h}}_1^* \oplus \mathring{\mathfrak{h}}_2^*$ である。つまり，$\mathcal{S}(\Lambda : k, \bar{\lambda})$ 上で $T_L(0)$ は $-d+$(定数) として働いている。

k のルート分解を持っており，そのルート系 $\Delta(k)$ は $\Delta(k) = \{\alpha \in \Delta ; \mathfrak{g}_\alpha \subset k\}$ で与えられる。$\alpha \in \Delta(k)$ に対して，$k_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$ とおく。k の実ルートは $\mathfrak{g}$ の実ルートで $\Delta(k)$ に属すものとすると，k の h.w. module に対しても integrable という概念が定義できる。$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，既約な h.w. k-module $L(k, \lambda)$ (λ を最高ウェイトとして)が定義されるし，それが integrable である為の条件も $\lambda \in P_+(k) = \{\lambda = k\Lambda_0 + \sum_{j=1}^{\ell} n_j \varepsilon_j + a\delta ; a \in \mathbb{C},\ k \geq n_1 \geq 1,\ k \geq n_2 \geq n_3 \geq \cdots \geq n_\ell \geq 0\}$ で与えられることが分る。

Kac-Peterson [9] の完全可約性定理から，$\Lambda \in P_+$ に対して，integrable な h.w. $\mathfrak{g}$-module $L(\Lambda)$ は，k-module として integrable な h.w. k-modules の直和に分解することが分る。

各 $\lambda \in P_+(k)$ に対して真空ベクトル $v_\lambda \in L(k, \lambda)$ を選んでおく。すると，$\Lambda \in P_+$ に対して，$P(k, \Lambda) \subset P_+(k)$ となり，

$$\Phi : \sum_{\lambda \in P(\Lambda ; k)} L(k, \lambda) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{S}_\lambda(\Lambda : k) \longrightarrow L(\Lambda)$$

なる線形写像を，
$$\Phi((a v_\lambda) \otimes u) = au \qquad (a \in U(k),\ u \in \mathcal{S}_\lambda(\Lambda : k))$$

で定め，左辺の k-module 構造を $a(v \otimes u) = av \otimes u \quad (a \in U(k))$ で与えると，Φ は k-module としての同型を与えることが分る。

さて、level 1 の dominant 整ウェイト $\Lambda \in P_+$ で $\langle \Lambda, d \rangle = 0$ を満たすものは、

$$\Lambda_0, \quad \Lambda_1 = \Lambda_0 + \varepsilon_1, \quad \cdots\cdots, \quad \Lambda_\ell = \Lambda_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_\ell$$

の $\ell+1$ 個である。この時、次の主定理を得る。

<u>定理</u>　各 j $(0 \leq j \leq \ell)$ に対して、

i) $$\overline{P}(\Lambda_j ; k) = \left\{ r\varepsilon_1 + \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_{i+1} \;;\; r, s \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq s \leq \ell-1 \atop r+ \ \equiv j \pmod 2. \right\}$$

ii) 各 $\overline{\lambda}(r,s) = r\varepsilon_1 + \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_{i+1} \in \overline{P}(\Lambda_j ; k)$ に対して、$\mathcal{L}$-module $\mathcal{S}(\Lambda_j ; k, \overline{\lambda}(r,s))$ は既約 $\mathcal{L}$-module $L(h,c)$ と同型である。ここで、

$$c = 1 - \frac{1}{(\ell+1)(\ell+2)}, \qquad h = \frac{\{(\ell+2)(s+1) - (\ell+1)(j+1)\}^2 - 1}{4(\ell+1)(\ell+2)}$$

この定理により、Friedan らの与えたパラメーターすべてに対して既約ユニタリ表現を構成できることが容易に分るであろう。

定理を示す為に、Λ を Λ_i $(0 \leq i \leq \ell)$ のどれかとし、$L(\Lambda)$ の k-module としての分解を用い、$L(\Lambda)$ の指標を integrable h.w. k-module の指標で展開し、その係数に対応する既約 $\mathcal{L}$-module の指標が一通り出てくることを示すという方針で行う。

h.w. module $V = \sum_{\lambda \in P(V)} V_\lambda$ の指標は、$ch_V = \sum_{\lambda \in P(V)} \dim V_\lambda \, e^\lambda$ と

定義される。ここで $e^{\lambda}\,(\in \mathfrak{h}^*)$ は形式的に $e^{\lambda}e^{\mu}=e^{\lambda+\mu}$ を満たすものとしても良いし，$\mathfrak{h}$ のある領域上で収束する正則関数と見ても良い。

さて，$\Lambda\in P_+$ に対して integrable h.w. module $L(\Lambda)$ の指標 $ch_{L(\Lambda)}$ は Weyl-Kac の公式として知られているが([8]参照)，Kac-Peterson [9] によりテータ級数を用いて書き直すことが出来る。

$(\nu,k)\in\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}_{>0}$ に対して，テータ関数 $\vartheta_{\nu,k}(\tau,v)$ を $(\tau,v)\in\mathcal{H}_+\times\mathbb{C}$ $(\mathcal{H}_+=\{\tau\in\mathbb{C}\,;\,\mathrm{Im}\,\tau>0\})$ の関数として

$$\vartheta_{\nu,k}(\tau,v)=\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}+\frac{\nu}{k}} e\left[\frac{k}{2}\tau\gamma^2+k\gamma v\right]$$

と定義する。ここで，$e[*]=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,*)$ である。また $\mu=\sum_{j=1}^{\ell}\mu_j\varepsilon_j\in\mathring{P}\subset\mathring{\mathfrak{h}}^*$ と $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$A_{\mu,k}(\tau,u)=\det\left(\vartheta_{\mu_i,2k}(\tau,u_j)-\vartheta_{-\mu_i,2k}(\tau,u_j)\right)_{1\le i,j\le\ell}$$

なる $(\tau,u)\in\mathcal{H}^+\times\mathbb{C}^{\ell}$ の関数を定義する。

$\Lambda=k\Lambda_0+\bar{\lambda}+a\delta\in P_+$ に対し，$L(\Lambda)$ の指標は $h\in\mathfrak{h}$ の関数

$$ch_{L(\Lambda)}(h)=e[-s_\Lambda+kt]\,\chi_\Lambda(\tau,u),$$

$$\chi_\Lambda(\tau,u)=\frac{A_{\bar{\lambda}+\mathring{\rho},k+g}(\tau,u)}{A_{\mathring{\rho},g}(\tau,u)}\quad ;\ s_\Lambda=\frac{|\bar{\lambda}+\mathring{\rho}|^2}{2(k+g)}-\frac{|\mathring{\rho}|^2}{2g}+a$$

と与えられる。但し，$h=2\pi\sqrt{-1}\,(-\tau d+\sum_{j=1}^{\ell}u_jh_j+tc)\in\mathfrak{h}$ を $h=(\tau,u,t)$ と書くとき，$ch_{L(\Lambda)}(h)$ は $\mathcal{H}_+\times\mathbb{C}^{\ell}\times\mathbb{C}$ 上の関数として

収束する。神保－三輪[6] により分母公式は

$$A_{\hat{\rho}, \mathfrak{g}}(\tau, u) = \eta(\tau)^{\ell(1-\ell)} \prod_{i=1}^{\ell} \theta(\tau, 2u_i) \prod_{1\le i<j\le \ell} \theta(\tau, u_i+u_j)\, \theta(\tau, u_i-u_j)$$

と書き直される。ここで

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n\ge 1} (1-q^n) \quad ; \quad q = \mathbf{e}[\tau] \ , \ (\text{Euler の eta 関数})$$

$$\theta(\tau, v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \mathbf{e}\left[\tfrac{1}{2}(n+\tfrac{1}{2})^2 \tau + (n+\tfrac{1}{2})v\right] \ , \quad (\tau, v) \in \mathcal{H}_+ \times \mathbb{C}$$

である。

さて，$\Lambda_j \ (0\le j\le \ell)$ に対して $\chi_j^{\ell}(\tau, u) = \chi_{L(\Lambda_j)}(\tau, u)$ とかくと，指標は

$$ch_{L(\Lambda_j)}(h) = \mathbf{e}[-s_{\Lambda_j}\tau + t]\, \chi_j^{\ell}(\tau, u) \quad ; \quad s_{\Lambda_j} = \frac{4\ell+3}{24} - \frac{(\ell+1-j)^2}{4(\ell+2)}$$

となる。$L(\Lambda_j)$ の $\mathfrak{k}$-module としての分解は

$$L(\Lambda_j) = \sum_{r=0}^{1} \sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{\substack{\pi(\lambda) = \bar{\lambda}(r,s) \\ \lambda \in P(\Lambda_j)}} L(\mathfrak{k}; \lambda) \otimes \mathcal{S}_\lambda(\Lambda_j; \mathfrak{k})$$

となる。

$u = (u_1, u')$, $u' = (u_2, \cdots, u_\ell)$ と分けて，$\mathfrak{h}_1 = \{(\tau, u, t) \in \mathfrak{h} \ ; \ u' = 0\}$, $\mathfrak{h}_2 = \{(\tau, u, t) \in \mathfrak{h} \ ; \ u_1 = 0\}$ とおけば，$\mathfrak{h}_i$ は $\mathfrak{k}_i$ の Cartan 部分環になっている。$L(\Lambda_j)$ の分解を指標で表わすと，

$$\chi_j^{\ell}(\tau, u) = \sum_{r=0}^{1} \sum_{s=0}^{\ell-1} e(j; r, s; \tau)\, \chi_r^{1}(\tau, u_1)\, \chi_s^{\ell-1}(\tau, u')$$

となる。ここで，

$$e(j; r, s; \tau) = \mathbf{e}[s(j; r, s)\tau] \sum_{a\ge 0} \mathbf{e}[a\tau] \dim \mathcal{S}_{\Lambda_0 + \bar{\lambda}(r,s) - a\delta}(\Lambda_j; \mathfrak{k})$$

$$s(j;r,s;\tau) = S_{\Lambda_j} - S_{\lambda^1_r} - S_{\lambda^2_s} \quad ,$$

$$\lambda^1_r = \Lambda_0 + r\varepsilon_1 \in P_+(k_1)\ ;\ \chi^1_r(\tau,u_1) = \chi_{L(k_1;\lambda^1_r)}(\tau,u_1),$$

$$\lambda^2_s = \Lambda_0 + \sum_{i=1}^{8} \varepsilon_{i+1} \in P_+(k_2)\ ;\ \chi^2_s(\tau,u') = \chi_{L(k_2;\lambda^2_s)}(\tau,u')$$

である。

このとき，$(C^{(1)}_{\ell+1}, C^{(1)}_\ell)$ に対する分岐則 神保-三輪[6]) から，神保氏の巧妙な計算により，$r+s \equiv j \pmod 2$ なる条件下に

$$\eta(\tau)\mathbf{e}\left[-\frac{\{(\ell+2)(s+1)-(\ell+1)(j+1)\}^2}{4(\ell+1)(\ell+2)}\tau\right]e(j;r,s;\tau) =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{e}[\{(\ell+1)(\ell+2)n^2 + ((\ell+2)(s+1)-(\ell+1)(j+1))n\}\tau]$$

$$- \mathbf{e}[(j+1)(s+1)\tau] \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{e}[\{(\ell+1)(\ell+2)n^2 + ((\ell+2)(s+1)+(\ell+1)(j+1))n\}\tau]$$

であることが導かれる。$e(j;r,s;\tau)$ がテータ定数で書かれることがこれから直ちに分る。即ち

$$\eta(\tau)e(j;r,s;\tau) = \vartheta_{(\ell+2)(s+1)-(\ell+1)(j+1),\,2(\ell+2)(\ell+1)}(\tau,0) - \vartheta_{(\ell+2)(s+1)+(\ell+1)(j+1),\,2(\ell+2)(\ell+1)}(\tau,0).$$

ところで，F.L. Feigin - D.B. Fuks [2] は Virasoro 環 $\mathcal{L}$ の Verma module $M(h,c)$ に対して，$\mathcal{L}$-module としての Jordan-Hölder 列を与えている。今望む場合 $c = c(\ell) = 1 - 6/(\ell+1)(\ell+2)$，$h = h(\ell;p,q) = [\{p(\ell+1)-q(\ell+2)\}^2 - 1]/4(\ell+1)(\ell+2)$ に，それを適用すると $L(h,c)$ の指標がもとめられる。$\mathfrak{f}^*(\mathcal{L})$ の $\{e_0, e_0'\}$ に dual な basis $\{\mu, \mu'\}$ をと

ろう。そのとき $\ell \geq 1,\ 0 \leq p \leq \ell+1,\ 0 \leq q \leq \ell$ に対して $\mathcal{L}$-module $L(h(\ell;p,q), c(\ell))$ の既約指標は

$$ch_{L(h,c)} = \frac{e^{h\mu+c\mu'}}{\prod_{n\geq 1}(1-e^{n\mu})}\Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{[n\{p(\ell+1)-q(\ell+2)\}+n^2(\ell+1)(\ell+2)]\mu} - e^{pq\mu}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{[n\{p(\ell+1)+q(\ell+2)\}+n^2(\ell+1)(\ell+2)]\mu}\Big]$$

で与えられる。

ところで $\mathcal{S}(\Lambda_j;k,\bar{\lambda}(r,s))$ 上で $T_L(0)$ は，$\left\{s(j;r,s)+\frac{\ell^2+3\ell-4}{24(\ell+1)(\ell+2)}\right\}-d$ として働き，$T_L'(0)$ は $L(\Lambda_j)$ 全体で $c(\ell)$ 倍として働いていることに注意する。$T_L(0)$ は $L(\Lambda_j)$ の分解の各項の上で $-d+$(定数)として働いているので，$e^{c\mu'}$ の項を忘れて $e^{\mu}=\mathbf{e}[\tau]$ と考えることが出来る。そして $\mathcal{L}$-module $\mathcal{S}(\Lambda_j;k,\bar{\lambda}(r,s))$ の指標を τ だけの関数とみて $ch(j;r,s;\tau)$ と書くと，

$$ch(j;r,s;\tau) = \mathbf{e}\left[\left\{s(j;r,s)+\frac{1}{24}-\frac{1}{4(\ell+1)(\ell+2)}\right\}\tau\right]\sum_{a\geq 0}\mathbf{e}[a\tau]\dim\mathcal{S}_{\Lambda_0+\bar{\lambda}(r,s)-a\delta}(\Lambda_j;k)$$

となり，$\mathbf{e}(j;r,s;\tau)$ の表示式より

$$\mathbf{e}\left[-\frac{\{(\ell+2)(s+1)-(\ell+1)(j+1)\}^2-1}{4(\ell+1)(\ell+2)}\tau-\frac{1}{24}\tau\right]\eta(\tau)\,ch(j;r,s;\tau)=$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}\left[\left\{(\ell+1)(\ell+2)n^2+\big((\ell+2)(s+1)-(\ell+1)(j+1)\big)n\right\}\tau\right]$$

$$-\mathbf{e}[(j+1)(s+1)\tau]\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}\left[\left\{(\ell+1)(\ell+2)n^2+\big((\ell+2)(s+1)+(\ell+1)(j+1)\big)n\right\}\tau\right]$$

が得られる。従って、$ch(j;r,s;\tau)$ は既約 $\mathcal{L}$-module $L(h(l;j+1, s+1), c(l))$ の指標に一致することが分る。定理の証明が得られたことになる。

$A_1^{(1)}$ の表現のテンソル積の分解による方法も本質的には同じであることにも注意しておこう。$\mathfrak{g}$ を $A_1^{(1)}=C_1^{(1)}$ 型 affine Lie環とすると、記号は殆んど同じに使える。$\mathfrak{g}$ の基本ウェイトは Λ_0, Λ_1 の2つである。レベル l の P_+ (d での値が0として) の元は、

$$\Lambda_{l,j} = j\Lambda_0 + (l-j)\Lambda_1 \qquad (0 \leq j \leq l)$$

の $l+1$ 個である。レベル1とレベル $l-1$ の integrable h.w. module のテンソル積 $L(\Lambda_{1,r}) \otimes L(\Lambda_{l-1,s})$ $(0 \leq r \leq 1,\ \leq s \leq l-1)$ をレベル l の $L(\Lambda_{l,j})$ で展開することが出来、その分岐係数 $\tilde{e}(j;r,s;\tau)$ を、($\chi_{l,j}(\tau,u) = \chi_{L(\Lambda_{l,j})}(\tau,u)$ とかくとき)、

$$\chi_{1,r}(\tau,u)\,\chi_{l-1,s}(\tau,u) = \sum_{j=0}^{l} \tilde{e}(j;r,s;\tau)\,\chi_{l,j}(\tau,u)$$

と定めると、実は

$$\tilde{e}(j;r,s;\tau) = e(j;r,s;\tau)$$

となるのである。

References

[1] Feigin F.L., Fuks D.B., Skew-symmetric invariant differential operators on a straight line and Virasoro algebra, *Func. Anal. & its Appl.*, 16-2(1982), 47-63(in Russian).

[2] Feigin F.L., Fuks D.B., Verma modules over Virasoro algebra, *Func. Anal. & its Appl.*, 17-3(1983), 91-92(in Russian).

[3] Friedan D., Qiu Z., Shenker S., Conformal invariance, unitarity and two dimensional critical exponents, *Phys. Rev. Letters* 52(1984), 1575-1578; *Vertex Operators in Math. & Phys.*, *Publ. MSRI*, 3(1984), 419-449.

[4] Goddard P., Kent A., Olive D., Virasoro algebra and coset space models, *Physics Letter*, 152B, no1-2(1985), 88-90.

[5] Goddard P., Kent A., Olive D., Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebra, to appear in *Comm. Math. Phys.*

[6] Jimbo M., Miwa T., On a duality of branching rules for affine Lie algebras, *Algebraic Groups and Related Topics, Advanced Studies in pure Math.*, 6(1985), 17-65.

[7] Kac V.G., Contravariant form for infinite dimensional Lie algebras and superalgebras, *Lecture Notes in Phys.*, 94(1979), 441-445.

[8] Kac V.G., *Infinite Dimensional Lie Algebras, Progress in Math.*, 44, Birkhäuser, 1983.

[9] Kac V.G., Peterson D.H., Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms, *Advances in Math.*, 53(1984), 125-264.

[10] Kac V.G., Wakimoto M., Unitarizable highest weight representations of the Virasoro, Neveu-Schwarz and Ramond algebras, *preprint*.

[11] Tsuchiya A., Kanie Y., Fock space representations of the Virasoro algebra —— Intertwining operators ——, to appear in *Publ. R.M.S., Kyoto Univ.*

[12] Tsuchiya A., Kanie Y., Unitary representations of the Virasoro algebra, submitted to *Duke Math. J.*