数理解析研究所講究録
第 577 巻 1985 年 116-131

葉層 C^*-環の K-理論的 Thom 同型について

都立大 理　高井博司

§0. 序　2次元トーラス T^2 上の線型葉層 $\mathcal{F}_\theta$ ($\theta \notin \mathbb{Q}$) について，その C^*-環 $C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ の K-群 $K(T^2/\mathcal{F}_\theta)$ は，T^2 の K-群 $K(T^2)$ に同型であるが，これは T^2 からリーフ空間 $T^2/\mathcal{F}_\theta$ への剰余写像 p_{T^2} の Gysin 写像 $p_{T^2}! : K(T^2) \to K(T^2/\mathcal{F}_\theta)$ が，Kasparov K-群 $KK(T^2, T^2/\mathcal{F}_\theta)$ の元として可逆であることから得られる。即ち $KK(T^2/\mathcal{F}_\theta, T^2)$ の元 g で，$p_{T^2} \otimes g = 1_{T^2}$ かつ $g \otimes p_{T^2}! = 1_{T^2/\mathcal{F}_\theta}$ が成り立つものが存在する。一方 $\theta \in \mathbb{Q}$ とすると成り立たない。3次元球面 S^3 上の Reeb 葉層，n 次元トーラス T^n 上の Anosov 葉層，n 次元双曲型多様体 H^n の単位球面バンドル $T_1(H^n)$ 上のホロサイクル葉層及び Anosov 葉層等については $p!$ は可逆である。

そこで我々は次の定義を用意する：一般に与えられた葉層化多様体 $(M, \mathcal{F})$ に対して，剰余写像 $p_M : M \to M/\mathcal{F}$ を考えて，K-方向付いているとする。p_M の Gysin 写像 $p_M! : K(M) \to K(M/\mathcal{F})$ が $KK(M, M/\mathcal{F})$ の元として可逆であれば，$(M, \mathcal{F})$ は <u>Thom 同型</u>を持つと云うことにする。Connes は [1]

の中で次の予想をしている：

<u>予想（Connes）</u>　葉層化多様体 $(M, \mathcal{F})$ の全ての葉が可縮ならば，$(M, \mathcal{F})$ は Thom 同型を持つ．

本報告では，上記予想が Anosov 微分同相写像から作られる葉層化多様体について成り立つことを示す．

<u>§1. 準備</u>　M をコンパクト多様体，φ をその上の Anosov 微分同相写像とする．$\mathcal{F}_\varphi$ を φ による M の安定（不安定）葉層とし，A を φ の遷移行列とする．そのとき，A の正符号（力学）系 (Σ_A^+, σ^+) は $\mathcal{F}_\varphi$ の横断多様体 N を作る．即ち Σ_A^+ から M への連続写像 π_+ が存在して $N = \pi_+(\Sigma_A^+)$ は $\mathcal{F}_\varphi$ の忠実横断多様体になる．（∂N は病的であるかも知れないので，N を $N \setminus \partial N$ と考えておいて一般性を失なわない。）Bowen [3] により，μ^+, μ をそれぞれ Σ_A^+, N の平衡状態とすると，Γ^+, Γ なる μ^+, μ ー零集合で，$(\Sigma_A^+ \setminus \Gamma^+, \mathcal{F}^+, \mu^+)$ は $(N \setminus \Gamma, \mathcal{F}_\varphi, \mu)$ に同値なものが存在する。更に $N \setminus \Gamma$ は完全不連結な G_δー集合になるから，それ自身 0ー次元可分完備距離空間になる．

さて Connes [1] 及び Connes－Skandalis [2] より，M から $M/\mathcal{F}_\varphi$ への剰余写像 P_M の Gysin 写像 $P_M!$ は M と $M/\mathcal{F}_\varphi$ の Kasparov Kー群 $KK(M, M/\mathcal{F}_\varphi)$ の元として，次の様にし

て定義される：$\mathcal{F}_\varphi$のホロノミー亜群を$\mathcal{G}$とし，$\Omega^{1/2}$を$\mathcal{G}$上の½-密度バンドルとする。今$\mathcal{F}_\varphi$はスピン^c-構造を持つと仮定しているので，SをM上の$\mathcal{F}_\varphi$に接するスピノールの成す複素 *Hermitian* バンドルとすると，$\mathcal{G}$からMへの値域写像rによるSの引き戻し$r^*(S)$を考え，$\Omega^{1/2}\otimes r^*(S)$の連続断面で，コンパクト台を持つもの全体を$C_c(\mathcal{G},\Omega^{1/2}\otimes r^*(S))$で表わすことにする。$\xi,\eta\in C_c(\mathcal{G},\Omega^{1/2}\otimes r^*(S))$, $f\in C(M)$, $g\in C_c(\mathcal{G})$に対して，

$$\begin{cases} \langle\xi|\eta\rangle(\gamma) = \displaystyle\int_{\gamma_1^{-1}\circ\gamma_2=\gamma} \langle\xi(\gamma_1)|\eta(\gamma_2)\rangle_S \\ (L(f)\xi)(\gamma) = f\circ r(\gamma)\,\xi(\gamma) \\ (\xi g)(\gamma) = \displaystyle\int_{\gamma_1\circ\gamma_2=\gamma} \xi(\gamma_1)\,g(\gamma_2) \end{cases}$$

とおくと，$C_c(\mathcal{G},\Omega^{1/2}\otimes r^*(S))$は *Hermitian* $(C(M),C_c(\mathcal{G}))$-モジュールになる。$\mathcal{E}$をその完備化とすると，$(C(M),C^*(M,\mathcal{F}))$-$C^*$-モジュールになる。そこで$\mathcal{E}$上の *Fredholm* 作用素$F$を，$S$の *Clifford* シンボル$c$を使って，

$$(F\xi)(\gamma) = \int e^{i\varphi(\delta,X)}\,c_{s(\delta)}\left(\frac{X}{\|X\|}\right)\chi(\delta)\,\xi(\delta\gamma)\,d\delta\,dX$$

と定義する。ただしφは$\mathcal{G}\times\mathcal{F}_\varphi^*$上の相写像で局所的には$\langle r(\delta)-s(\delta),X\rangle$なる形をしている。又$\chi(\gamma)$は$\Omega^{1/2}\otimes S_{s(\gamma)}$から

$\Omega^{1/2}\otimes S_{r(\gamma)}$ への(有界)線型作用素で，$\chi|_M = 1$ なるものである．

今　$p_M! = (\mathcal{E}, L, B_M) \in KK(M, M/\mathcal{F}_\varphi)$ とおく．一方任意の分解：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p_M"] \arrow[dr, "f"'] & M/\mathcal{F}_\varphi \\ & M' \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

に対して，K-群の分解：

$$\begin{tikzcd} K(M) \arrow[r, "p_M!"] \arrow[dr, "f!"'] & K(M/\mathcal{F}_\varphi) \\ & K(M') \arrow[u, "g!"'] \end{tikzcd}$$

が成り立つ．一般に $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ を与えると，$(f\circ g)! = f! \otimes_Y g! \in KK(X, Z)$ が成り立つ．

ただし $\otimes_Y$ は Kasparov 積を意味する．([1],[2]) 更に，可換図式：

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "p_{M'}"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "k"] & M'/k^*(\mathcal{F}_\varphi) \arrow[d, "\tilde{g}"] \\ M \arrow[r, "p_M"'] & M/\mathcal{F}_\varphi \end{tikzcd}$$

を考えたとき，K-群の図式は，

$$\begin{tikzcd} K(M') \arrow[r, "p_{M'}!"] \arrow[d, "g!"'] \arrow[dr, "k!"] & K(M'/k^*(\mathcal{F}_\varphi)) \arrow[d, "\varepsilon_k"] \\ K(M) \arrow[r, "p_M!"'] & K(M/\mathcal{F}_\varphi) \end{tikzcd}$$

となる．ただし $k^*(\mathcal{F}_\varphi)$ は $\mathcal{F}_\varphi$ の k による引き戻しであり，ε_k は次の組で定義される $KK(M'/k^*(\mathcal{F}_\varphi), M/\mathcal{F}_\varphi)$ の元である：

$$\varepsilon_k = \hat{C}_c(G_k, \Omega^{1/2}), \quad G \xrightarrow{i} G_k \xrightarrow{r_k} M'$$

$\hat{C}_c(\cdot)$ は

$$\langle \xi | \eta \rangle_{C_c(G)}(\gamma) = \int_{\gamma_1^{-1}\circ\gamma_2 = \gamma} \overline{\xi(\gamma_1)}\,\eta(\gamma)$$

による $C_c(\cdot)$ の完備化である．又 $(C^*(M', k^*(\mathcal{F}_\varphi)), C^*(M, \mathcal{F}_\varphi))$ ーモジュール作用は，

$$(\xi f)(\gamma) = \int_{\gamma_1\circ\gamma_2 = \gamma} \xi(\gamma_1) f(\gamma_2), \quad f \in C_c(G, \Omega^{1/2})$$

$$(\pi_k(g)\xi)(\gamma) = \int_{\gamma_1\circ\gamma_2=\gamma} g(\gamma_1)\,\xi(\gamma_2)\ ,\quad g\in C_c(G_{M'},\Omega^{1/2})$$

で与える．ただし $G_{M'}$ は $k^*(\mathcal{F}_\varphi)$ のホロノミー亜群であり，$G_{M'}$ から G_k への自然な自由作用による積を考える。そのとき，$\varepsilon_k = (\mathcal{E}_k, \pi_k, 0) \in KK(M/k^*(\mathcal{F}_\varphi), M/\mathcal{F}_\varphi)$ が求めるものである（[2]）。

最後に KK－群に関する基本的性質を2,3掲げておくことにする。

◦ (普遍係数定理)　$\mathfrak{A}$ を可分 C^* 環，$\mathcal{B}$ を C^*－環とし，$\mathfrak{A}$ は (AI) とする，即ち I 型 C^* 環の帰納極限とする。そのとき

$$0 \to \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}_2} \mathrm{Ext}_q(\mathfrak{A})\otimes K_{q+p}(\mathcal{B}) \to K_{p+1}K(\mathfrak{A},\mathcal{B}) \to \bigoplus_{q\in\mathbb{Z}_2} \mathrm{Tor}(\mathrm{Ext}_{q+1}(\mathfrak{A}), K_{q+p}(\mathcal{B})) \to 0 \qquad (p\in\mathbb{Z}_2),$$

が成り立つ．

◦ (Steenrod 型定理)　$\mathfrak{A}_n$ を可分核型 C^* 環とし，$\mathfrak{A} = \varinjlim \mathfrak{A}_n$ とすると，任意の C^*－環 $\mathcal{B}$ に対して，

$$0 \to \varprojlim{}^1 KK(S\mathfrak{A}_n, \mathcal{B}) \to KK(\mathfrak{A},\mathcal{B}) \to \varprojlim KK(\mathfrak{A}_n,\mathcal{B}) \to 0,$$

が成り立つ．ただし $S\mathfrak{A}_n$ は $\mathfrak{A}_n$ のサスペンション C^*－環で $\varprojlim^1$ は Milnor inverse divisor を意味する．（[4]）

◦　P を 0－次元空間ならば，$\mathrm{Ext}(P)=0$ である．

◦　(Mayer－Vietoris)　$M = A\cup B$，$A\cap B=\phi$ ならば，

$$0 \to \mathrm{Ext}^p(A)\oplus \mathrm{Ext}^p(B) \to \mathrm{Ext}^p(M) \to \mathrm{Ext}^p(S^0) \to 0$$

がなりたつ．ただし $S^0=\{\pm 1\}$ である。

§2. Thom同型　特にことわらない限り§1の記号を使うことにする。$(M,\mathcal{F}_\varphi)$, N, Γ, G を§1のようにとる。$\tau(\mathcal{F}_\varphi)$ を $\mathcal{F}_\varphi$ の接平面場とすると，$x\in M$ に対して $\nu_x : \tau_x(\mathcal{F}_\varphi)\to l_x \in \mathcal{F}_\varphi$ なる位相同型写像がとれて，$x\in M \mapsto \nu_x(X_x)\in l_x$ は $\tau(\mathcal{F})$ 上のベクトル場 X に対して連続になる．そこで $\tau(\mathcal{F}_\varphi)$ に亜群の性質を次の様にして入れる：　$0\le t\le 1$ に対して，

$$\xi\circ_t\eta = \begin{cases} t^{-1}\,\nu^{-1}_{s_t(\xi)}\circ\nu_{s_t(\eta)}(t\eta) & \begin{pmatrix} s_t(\xi)=r_t(\eta)\\ t\neq 0\end{pmatrix} \\ \xi+\eta & (s_0(\xi)=r_0(\eta),\ t=0)\end{cases}$$

ただし　$s_t(\xi)=\pi(\xi)$, $r_t(\xi)=\nu_{\pi(\xi)}(t\xi)$, $\xi\in\tau(\mathcal{F}_\varphi)\xrightarrow{\pi} M$ とする、そのとき $G_t=(\tau(\mathcal{F}_\varphi),\circ_t)$ は位相亜群になり，$G_t\ (t\neq0)$ は G に位相亜群として同型である。そのとき $C^*_r(G_t)$ は $C^*(M,\mathcal{F})$ に同型になる。今 $\alpha_t\in KK(M, C^*_r(G_t))$, $\beta_t\in KK(C^*_r(G_t),M)_{(0\le t\le 1)}$ を次の様にして定義する：

$\mathcal{O}_t = \hat{C}_c(G_t,\ \Omega^{1/2}\otimes r_t^*(S))$ に次の作用を考える．

$$\begin{cases} \langle\xi|\eta\rangle_t(\gamma) = \displaystyle\int_{\gamma_1^{-1}\circ\gamma_2=\gamma} \langle\xi(\gamma_1)|\eta(\gamma_2)\rangle_S \\ (L_t(f)\xi)(\gamma) = f\circ r_t(\gamma)\,\xi(\gamma) & (f\in C(M)) \\ (\xi g)(\gamma) = \displaystyle\int_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} \xi(\gamma_1)g(\gamma_2) & (g\in C_c(G_t)) \\ (F_t\xi)(\gamma) = \displaystyle\int e^{i\nu_t(\delta,X)}\, c_{s_t(\delta)}\left(\frac{X}{\|X\|}\right)\chi_t(\delta)\,\xi(\delta\gamma)\,d\delta\, dX \end{cases}$$

ただし $\gamma_t(\delta, X)$ は局所的に $< r_t(\delta) - s_t(\delta), X >$ ($\delta \in G_t$, $X \in \tau_{r_t(\delta)}(\mathcal{F}_\varphi)^*$) で与えられる。又 $\chi_t(\delta)$ は $\Omega^{1/2} \otimes S_{r_t(\delta)}$ から $\Omega^{1/2} \otimes S_{s_t(\delta)}$ への線型作用素で $\chi_t(x) = id_{\Omega^{1/2} \otimes S_x}$ $(x \in M)$ を満たす。

今 $\alpha_t = (\mathcal{O}_t, L_t, F_t)$ とおくと、$\alpha_t \in KK(M, C_r^*(G_t))$ となり、$\alpha_1 = P_M!$ が成り立つ。更に $\mathcal{F}_\varphi$ はスピン^c-構造を持つと仮定しているので、α_0 は $K(M)$ と $K(\tau(\mathcal{F}_\varphi))$ 間の Thom 同型を与える $KK(M, \tau(\mathcal{F}_\varphi))$ の元である。

一方 $KK(C_r^*(G_t), M)$ の元 β_t を定義するのに、先ず Hilbert 空間の連続場 $x \in M \longmapsto \mathcal{H}_x^t = L^2((G_t)_x) \otimes S_x$ を考え、その基本族 $\mathcal{K}_t$ を $C(M, \mathcal{H}^t)$ の中でとる。そのとき、$\mathcal{K}_t$ に次の作用を考える： $\xi, \eta \in \mathcal{K}_t$ に対して、

$$
\begin{cases}
< \xi | \eta >_t (x) = < \xi(x) | \eta(x) >_{\mathcal{H}_x^t} & (x \in M) \\
(\xi f)(x) = \xi(x) f(x) & (f \in C(M)) \\
(\tilde{L}_t(g)\xi)(x) = (L_t(g) \otimes 1)\xi(x) & (g \in C_c(G_t)) \\
(\Delta_t \xi)(x, \gamma) = C_x\left(\frac{\dot{\gamma}(r_t(\gamma))}{\| \dot{\gamma}(r_t(\gamma)) \|} \right) \xi(x, \gamma) &
\end{cases}
$$

とおく。$\mathcal{B}_t$ を $<\cdot|\cdot>_t$ による $\mathcal{K}_t$ の完備化とすると、$\beta_t = (\mathcal{B}_t, \tilde{L}_t, \Delta_t)$ は $KK(C_r^*(G_t), M)$ の元になり、$\beta_0 = \alpha_0^{-1}$ を得る。即ち、$\beta_0 \otimes_M \alpha_0 = 1_{\tau(\mathcal{F}_\varphi)}$, $\alpha_0 \otimes_{\tau(\mathcal{F}_\varphi)} \beta_0 = 1_M$ となる。

そこで今 $x_t = \alpha_t \otimes_{C_r^*(G_t)} \beta_t \in KK(M, M)$ を考えると、これは $KK(M, M \times [0,1])$ の元で $\alpha_1 \otimes_{C^*(M, \mathcal{F}_\varphi)} \beta_1$ と $\alpha_0 \otimes_{\tau(\mathcal{F}_\varphi)} \beta_0$ とのホモトピー同値を定める。$\alpha_1 \otimes_{C^*(M, \mathcal{F}_\varphi)} \beta_1 = P_M! \otimes_{C^*(M, \mathcal{F}_\varphi)} \beta_1$,

$\alpha_0 \otimes_{\mathcal{T}(\mathcal{F}_\varphi)} \beta_0 = 1_M$ より， $p_M! \otimes_{C^*(M,\mathcal{F}_\varphi)} \beta_1 = 1_M$ が成り立つ。よって一般に次が成り立つ：

<u>命題1.</u> 葉層化多様体 $(M,\mathcal{F})$ について，任意の $x \in M$ に対して，$\mathcal{T}_x(\mathcal{F})$ から $l_x \in \mathcal{F}$ $(l_x \ni x)$ への位相同型 γ_x で，$\mathcal{T}(\mathcal{F})$ 上のベクトル場 X をとると，$x \mapsto \gamma_x(X_x)$ が連続ならば，$p_M! \in KK(M, M/\mathcal{F})$ は右逆元を持つ。

さて本論である $p_M!$ が左逆元を持つことを示す為に§1で述べたことを用いる。 $M, \mathcal{F}_\varphi, N, \Gamma, G$ etc は§1と同じものとする。更に φ は位相可遷的であるとする。そのとき $\mathcal{F}_\varphi$ は極小になるので，$C^*(M,\mathcal{F}_\varphi)$ は単純 C^*-環になる。N は忠実な横断多様体であるから，Fack-Skandalis [5] により

<u>補助定理2.</u> $C^*(M,\mathcal{F}_\varphi) \simeq C^*_r(G^N_N) \otimes \mathcal{C}$

を得る。ただし $G^N_N = \{\gamma \in G \mid s(\gamma), r(\gamma) \in N\}$ であり $\mathcal{C}$ は可分可算無限次元 Hilbert 空間上のコンパクト作用素全体の成す C^*-環である。 $\tau_N = (\hat{C}_c(G^N), \pi^N, 0) \in KK(C^*_r(G^N_N), M/\mathcal{F}_\varphi)$ とおく。ただし $\xi, \eta \in C_c(G^N)$ に対して

$$\begin{cases} (\pi^N(f)\xi)(\gamma) = \int_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} f(\gamma_1)\xi(\gamma_2) & (f \in C_c(G^N_N)) \\ (\xi g)(\gamma) = \int_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} \xi(\gamma_1) g(\gamma_2) & (g \in C_c(G)) \\ \langle \xi | \eta \rangle(\gamma) = \int_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} \overline{\xi(\gamma_1)}\,\eta(\gamma_2) & (\gamma \in G) \end{cases}$$

とおき，$\hat{C}_c(G^N)$ は $\langle\cdot|\cdot\rangle$ による $C_c(G^N)$ の完備化である。

そのとき補助定理2より次の系を得る：

<u>系3.</u>　$i_N \in KK(C_r^*(G_N^N), M/\mathcal{F}_\varphi)$ は可逆元である。

実際，逆元 i_N^{-1} は $(\hat{C}_c(G_N), \pi_N^*, 0)$ なる形をしている。
ただし (G_N, π_N) は (G^N, π^N) と同様に作られる。

今 N から M への自然な埋め込み j を考えると，次の可換図式が得られる：

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "p_N"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, "k"] & N/k^*(\mathcal{F}_\varphi) \arrow[d, "\tilde{j}"] \\ M \arrow[r, "p_M"'] & M/\mathcal{F}_\varphi \end{tikzcd}$$

ただし $k^*(\mathcal{F}_\varphi)$ は $\mathcal{F}_\varphi$ の k による N への引き戻しである。
よって§1により，K-群の次の可換図式が得られる：

$$\begin{tikzcd} K(N) \arrow[r, "p_N!"] \arrow[d, "j!"'] \arrow[dr, "k!"] & K(N/k^*(\mathcal{F}_\varphi)) \arrow[d, "\varepsilon_k = \tilde{j}!"] \\ K(M) \arrow[r, "p_M!"'] & K(M/\mathcal{F}_\varphi) \end{tikzcd}$$

k の定義より，$k^*(\mathcal{F}_\varphi)$ の元は $N \cap \ell$ $(\ell \in \mathcal{F}_\varphi)$ の連結成分 $(N\cap\ell)_0$ から成る。よって $k^*(\mathcal{F}_\varphi)$ のホロノミー亜群は G_N^N となる。$\varepsilon_k = \tilde{j}!$ の定義を検証すると，j は $\mathcal{F}_\varphi$ に横断的であるから，$G_k = \{(x,\gamma) \in N \times G \mid j(x) = r(\gamma)\} = \bigcup_{x\in N} \{x\} \times G^x \simeq \bigcup_{x\in N} G^x = G^N$ であり，$\pi_k = \pi^N$ を得る。よって $\varepsilon_k = i_N$ になる。上記可換図式より $j! \otimes_M p_M! = p_N! \otimes_{C_r^*(G_N^N)} i_N$ を得る。もし $\eta \otimes_N p_N! = 1_{C_r^*(G_N^N)}$ なる $\eta \in KK(C_r^*(G_N^N), N)$

が存在すれば，$i_N^{-1} \otimes_{C_r^*(G_N^N)} \eta \otimes_N j! \otimes_M P_M ! = 1_{C^*(M, \mathcal{F}_\varphi)}$ となり，$P_M!$ は左逆元を持つ。よって $P_N!$ が左逆元を持つことを示せばよい。前の議論で，埋め込み $j : N \to M$ について，$\tau(j^*(\mathcal{F}_\varphi)) = \mathrm{Ker}\, dj + j^*(\tau/\mathcal{F}_\varphi)) = \tau(\mathcal{F}_\varphi)|_N$ となるから，$j^*(\mathcal{F}_\varphi)$ のスピン^{c}ー構造 S_N は $S|_N$ である。

§1 において $(N\backslash\Gamma, \mathcal{F}_\varphi, \mu)$ は $(\Sigma_A^+\backslash\Gamma^+, \mathcal{F}^+, \mu^+)$ に同値であることを述べたが，実際 $N\backslash\Gamma$ は N で稠密な G_δー集合で $\mu(N\backslash\Gamma) = \mu(N)$ を満たし，更に $\Sigma_A^+\backslash\Gamma^+$ と位相同値であることが分かる。よって $N\backslash\Gamma$ はそれ自身非可算完全不連結可分完備距離空間である。

$P_{N\backslash\Gamma}! \in KK(N\backslash\Gamma, C_r^*(G_{N\backslash\Gamma}^{N\backslash\Gamma}))$ を次の様にして定義する：$S_{N\backslash\Gamma}^2 = S \otimes S|_{N\backslash\Gamma}$ とおき，$G_{N\backslash\Gamma}^{N\backslash\Gamma}$ 上のバンドル $r^*(S_{N\backslash\Gamma}^2)$ の連続断面でコンパクト台を持つもの全体を $C_c(G_{N\backslash\Gamma}^{N\backslash\Gamma}, r^*(S_{N\backslash\Gamma}^2))$ で表わすと，その2元 ξ, η に対して

$$\langle \xi | \eta \rangle (\gamma) = \sum_{\gamma_1^{-1}\gamma_2 = \gamma} \langle \xi(\gamma_1) | \eta(\gamma_2) \rangle_{S_{N\backslash\Gamma}^2} \quad (\gamma \in G_{N\backslash\Gamma}^{N\backslash\Gamma})$$

とおくことにより，$C_c(G_{N\backslash\Gamma}^{N\backslash\Gamma})$ー値内積が定義出来る。これに関する $C_c(\cdot)$ の完備化を $\hat{C}_c(\cdot)$ と書くことにする。更に $\xi \in C_c(\cdot)$ に対して

$$\begin{cases} (\xi g)(\gamma) = \sum_{\gamma_1\gamma_2 = \gamma} \xi(\gamma_1) g(\gamma_2) & (g \in C_c(G_{N\backslash\Gamma}^{N\backslash\Gamma})) \\ (\pi_{N\backslash\Gamma}(f)\xi)(\gamma) = f \circ r(\gamma)\, \xi(\gamma) & (f \in C_0(N\backslash\Gamma)) \end{cases}$$

とおくと，$\hat{C}_c(G_{N\backslash\Gamma}^{N\backslash\Gamma}, r^*(S_{N\backslash\Gamma}^2))$ は $(C_0(N\backslash\Gamma), C_r^*(G_{N\backslash\Gamma}^{N\backslash\Gamma}))$ーモジュールに

なる。又 $\xi\in C_c(\cdot)$ に対して

$$(D_{N\backslash\Gamma}\xi)(\gamma)=\int e^{i\nu(\delta,X)}c_{\rho(\delta)}\left(\frac{X}{\|X\|}\right)\chi(\delta)\,\xi(\delta\gamma)\,d\tilde{\mu}(\delta)\,dX$$

とおく。ただし ν は適当な相関数, $\chi(\delta):(S^2_{N\backslash\Gamma})_{r(\delta)}\to(S^2_{N\backslash\Gamma})_{\rho(\delta)}$ なる適当な線型作用素, $d\tilde{\mu}(\delta)=d\mu\times d\mu\,(r(\delta),\rho(\delta))$ である。そのとき, $P_{N\backslash\Gamma}!=(\hat{C}_c(G^{N\backslash\Gamma}_{N\backslash\Gamma},p^*(S^2_{N\backslash\Gamma})),\pi_{N\backslash\Gamma},D_{N\backslash\Gamma})$ とおくと, $P_{N\backslash\Gamma}!\in KK(N\backslash\Gamma,C^*_r(G^{N\backslash\Gamma}_{N\backslash\Gamma}))$ となる。これは $N\backslash\Gamma$ の中の開集合(閉かつ開) $\Omega\neq\phi$ についても $P_\Omega!=(\hat{C}_c(G^\Omega_\Omega),\pi_\Omega,D_\Omega)\in KK(\Omega,C^*_r(G^\Omega_\Omega))$ として定義することが出来る。

次に $\varepsilon_{P_N\circ k}$ $(k:\Omega\subset N\backslash\Gamma\to N)$ を $KK(C^*_r(G^\Omega_\Omega),C^*_r(G^N_N))$ を次の様にして定める: $\xi,\eta\in C_c(G^\Omega_N)$ について

$$\langle\xi|\eta\rangle(\gamma)=\sum_{\gamma_1^{-1}\gamma_2=\gamma}\xi(\gamma_1)\eta(\gamma_2)\qquad(\gamma\in G^N_N)$$

とおき, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関する $C_c(G^\Omega_N)$ の完備化を $\hat{C}_c(G^\Omega_N)$ と書く。そのモジュール作用を

$$\begin{cases}(\pi_{P_N\circ k}(f)\xi)(\gamma)=\sum_{\gamma_1\gamma_2=\gamma}f(\gamma_1)\xi(\gamma_2) & (f\in C_c(G^\Omega_\Omega))\\ (\xi g)(\gamma)=\sum_{\gamma_1\gamma_2=\gamma}\xi(\gamma_1)g(\gamma_2) & (g\in C_c(G^N_N))\end{cases}$$

で定義する。 $\varepsilon_{P_N\circ k}=(\hat{C}_c(G^\Omega_N),\pi_{P_N\circ k},0)$ とおくと, $\varepsilon_{P_N\circ k}\in KK(C^*_r(G^\Omega_\Omega),C^*_r(G^N_N))$ となる。

最後に, 埋め込み $k:\Omega\subset N\backslash\Gamma\to N$ に対して, $k!\in KK(\Omega,N)$ を次の様にして定義する: $\Omega\times N\xrightarrow{P_r}\Omega$ を考えて $\Omega\times N$ 上のバンドル $P_r^*(S_\Omega)$ を考える。 $C_c(\Omega\times N,P_r^*(S_\Omega))\ni\xi,\eta$ に対して,

$$\langle\xi|\eta\rangle(x)=\langle\xi(x)|\eta(x)\rangle_{S_\Omega}\qquad(x\in N)$$

とおき，$\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関する $C_c(\Omega\times N, R^*(S_\Omega))$ の完備化を $\hat{C}_c(\cdot)$ と書く．その上の作用を，$\xi\in C_c(\Omega\times N, R^*(S_\Omega))$ に対して

$$\begin{cases} (L(f)\xi g)(x,y) = f(x)\xi(x,y)g(y) & \left(f\in C_0(\Omega),\ g\in C(N)\right) \\ (F_\Omega\xi)(x,w) = \int e^{i\psi(x,y,\xi)} c_{(x,w)}\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\chi(x,y,w)\,\xi(y,w)\,d(\mu\times\mu)(y)\,d\xi & \\ \qquad\qquad (x\in\Omega\times N,\ w\in\Omega) \end{cases}$$

とおくと，$k! = (\hat{C}_c(\Omega\times N, R^*(S_\Omega)), L, F_\Omega)$ は $KK(\Omega, N)$ の元を定める。

<u>補助定理4</u>　　$k!\otimes_N P_N! = P_\Omega!\otimes_{C_r^*(G_\Omega^\Omega)} \varepsilon_{P_N\circ k} \in KK(\Omega, C_r^*(G_N^N))$.

実際，$P_\Omega!\otimes_{C_r^*(G_\Omega^\Omega)}\varepsilon_{P_N\circ k} = (\mathcal{E}_1, \pi_1, F_1)$ とすると，$\mathcal{E}_1 = \hat{C}_c(G_\Omega^\Omega, r^*(S_\Omega^2))\otimes_{C_r^*(G_\Omega^\Omega)}\hat{C}_c(G_N^\Omega)\simeq\hat{C}_c(G_N^\Omega, r^*(S_\Omega^2))$ で，右辺の $\hat{C}_c(\cdot)$ は

$$\langle\xi|\eta\rangle(\gamma) = \sum_{\gamma_1^{-1}\gamma_2=\gamma}\langle\xi(\gamma_1)|\eta(\gamma_2)\rangle_{S^2_{P_N\circ r}} \qquad (\gamma\in G_N^N)$$

に関する完備化である。$\pi_1 = \pi_\Omega\otimes_{C_r^*(G_\Omega^\Omega)}\pi_{P_N\circ k}\simeq\pi_\Omega$，$F_1 = D_\Omega\otimes 1\simeq\pi_{P_N\circ k}(D_\Omega)$ であるから，$P_\Omega!\otimes_{C_r^*(G_\Omega^\Omega)}\varepsilon_{P_N\circ k} = (\hat{C}_c(G_N^\Omega, r^*(S_\Omega^2)), \pi_\Omega, \pi_{P_N\circ k}(D_\Omega))$ を得る．次に $k!\otimes_N P_N! = (\mathcal{E}_2, \pi_2, F_2)$ とおくと，$\mathcal{E}_2 = \hat{C}_c(\Omega\times N, R^*(S_\Omega))\otimes_{C(N)}\hat{C}_c(G_N^N, r^*(S_N)) \simeq \hat{C}_c(G_N^\Omega, r^*(S_\Omega^2))$．実際，$(\xi\otimes\eta)(\gamma) = \xi(r(\gamma), s(\gamma))\otimes\eta(\gamma) \in (S_\Omega)_{r(\gamma)}\otimes(S_N)_{r(\gamma)} = (S_\Omega)_{r(\gamma)}\otimes(S_\Omega)_{r(\gamma)} = (S_\Omega^2)_{r(\gamma)}$ $(\gamma\in G_N^\Omega)$ となる。更に Connes-~~Skandalis~~ [2] と同様にして，$\pi_{P_N\circ k}(D_\Omega)$ は

D_N-接続であり，$[F_\Omega \otimes 1, \pi_{P_N \circ k}(D_\Omega)]$ は $\mathcal{C}(\hat{C}_c(G_N^\Omega, r^*(S_\Omega^2)))$ を法にして正の元である．よって $\pi_{P_N \circ k}(D_\Omega) = F_\Omega \otimes_{C(N)} D_N$ を得るので証明が終わる。

<u>補助定理 5</u>　$\varepsilon_{P_N \circ k} \in KK(C_r^*(G_\Omega^\Omega), C_r^*(G_N^N))$ は左逆元を持つ．

実際，$\varepsilon_{P_N \circ k} = (\hat{C}_c(G_N^\Omega), \pi_{P_N \circ k}, 0)$ であるので，$\xi = (\hat{C}_c(G_\Omega^N), \rho, 0)$ とすると，$\hat{C}_c(G_\Omega^N) \otimes_{C_r^*(G_\Omega^\Omega)} \hat{C}_c(G_N^\Omega)$ は $C_r^*(G_N^N)$-モジュールで $C_r^*(G_N^N)$ は単純であるから，$\hat{C}_c(G_\Omega^N) \otimes_{C_r^*(G_\Omega^\Omega)} \hat{C}_c(G_N^\Omega) \simeq C_r^*(G_N^N)$ となり，$\pi_{P_N \circ k} \otimes_{C_r^*(G_\Omega^\Omega)} \rho \simeq id_{C_r^*(G_N^N)}$ となる。ただし ρ は左正則表現である。よって $\xi \otimes_{C_r^*(G_\Omega^\Omega)} \varepsilon_{P_N \circ k} = 1_{C_r^*(G_N^N)}$ を得る。

補助定理 4, 5 より，適当な非可算完全集合 Ω に対して，$P_\Omega!$ が左逆元を持つことを示せばよい。

<u>補助定理 6</u>．$N \setminus \Gamma \supset \Omega$ なるコンパクト(開)集合に対して，$C_r^*(G_\Omega^\Omega) \simeq \varinjlim_n (CF(\Omega, M_{m_n}(\mathbb{C})), f_n)$ が成り立つ．ただし，$CF(\cdot)$ は連続場 C^*-環である．

証明には $(N \setminus \Gamma, \mathcal{F}, \mu) \sim (\Sigma_A^+ \setminus \Gamma^+, \mathcal{F}^+, \mu^+)$ を使う．今 G_Ω^Ω の位相部分亜群 G_n を次の様に定義する。

$$G_n = \{ \gamma \in G_\Omega^\Omega \mid (\pi_+^{-1}(r(\gamma)), \pi_+^{-1}(s(\gamma))) \in \mathcal{F}_n^+ \} \quad (n \geq 1)$$

ただし，$(\omega, \omega') \in \mathcal{F}_n \Leftrightarrow \omega_j = \omega'_j \ (\forall j \geq n)$ である．そのとき，

$$G_\Omega^\Omega = \varinjlim G_n \ , \quad (G_n)^0 = \Omega \qquad (n \geq 1)$$

となり，$C_r^*(G_\Omega^\Omega) \simeq \varinjlim C_r^*(G_n)$ を得る。$C_r^*(G_n) \simeq CF(\Omega, M_{m_n}(\mathbb{C}))$ は $f \mapsto (x \in \Omega \mapsto R_x(f))$ の対応を考えることにより

得られる。

Cantor－Bendixon の定理より，$N\setminus\Gamma = D\cup E$，$D\cap E=\phi$ で D は可算集合，E は $[0,1]$ 内の無理数全体 $\mathbb{Q}^c$ の成す可分完備距離空間に同相である。よって $N\setminus\Gamma \supset \Omega$ を(非可算)コンパクト完全集合 Ω に対して $P_\Omega!$ を考える。(実際 Ω は $\mathbb{Q}^c$ 内の Cantor 集合 C と同相にとればよい。)

補助定理6より，$KK(\Omega, C_r^*(G_\Omega^\Omega)) = \varinjlim_n (KK(\Omega,\Omega),(j_n)_*)$ であるから，$P_\Omega! = \varinjlim \xi_n$，$\xi_n\in KK(\Omega,\Omega)$ となる。実際，$\xi_n \in KK(\Omega,\Omega)=KK(\Omega, C_r^*(G_n))$ の作り方は，$\xi_n=(\hat{C}_c(G_n, r^*(S_\Omega^2)), \pi_\Omega|_{G_n}, D_\Omega|_{G_n})$ $(n\ge1)$ なる形をしている。$\hat{C}_c(G_n, r^*(S^2_\Omega))\otimes \mathbb{C} \simeq L^2_\mu(\Omega, S^2_\Omega)\otimes\mathbb{C}$，$D_\Omega|_{G_n}\simeq D_n$ となる。ただし D_n は通常の Dirac 作用素である。よってその双対な Dirac 作用素 ∇_n を考えれば，対応する $KK(\Omega,\Omega)$ の元 ξ_n^{-1} は ξ_n の逆元になる。つまり $\xi_n^{-1}\otimes_\Omega \xi_n = 1_\Omega$，$\xi_n\otimes_\Omega\xi_n^{-1}=1_\Omega$ を満たす。そこで $j_{n+1,n}: CF(\Omega, M_{m_n}(\mathbb{C}))\otimes\mathbb{C} \longrightarrow CF(\Omega, M_{m_{n+1}}(\mathbb{C}))\otimes \mathbb{C}$ を考えると，$(j_{n+1,n})_*: KK(\Omega,\Omega)\longrightarrow KK(\Omega,\Omega)$ を引き起こす。同様に，$(j_{m,n})^*: KK(\Omega,\Omega)\leftrightarrow KK(\Omega,\Omega)$ も考える。今

$$e_n = \varinjlim_{m\ge n} (j_{m,n})_*^*(1_\Omega) \in KK(\Omega, C_r^*(G_\Omega^\Omega))$$

を作ると，$(j_{m,n})_*(1_\Omega) = (j_{m,n})_*(\xi_n^{-1}\otimes_\Omega\xi_n) = \xi_n^{-1}\otimes_\Omega (j_{m,n})_*(\xi_n)$ より $e_n = \xi_n^{-1}\otimes_\Omega P_\Omega!$ を得る。更に，$e=\varprojlim e_n$，$\xi^{-1}=\varprojlim \xi_n^{-1}$ が定義出来るので，$e\in \varprojlim KK(\Omega, C_r^*(G_\Omega^\Omega))$

$\xi^{-1} \in \varprojlim KK(\Omega,\Omega)$ で，$e = \xi^{-1} \otimes_{\Omega} P_{\Omega}1$ となる．

§1で述べたKK−理論の基本性質の中でSteenrod型定理を用いると，任意のC^*−環$\mathfrak{A}$に対して，

$$0 \to \varprojlim{}^1 KK(S\Omega, \mathfrak{A}) \to KK(C_r^*(G_\Omega^\Omega), \mathfrak{A}) \to \varprojlim KK(\Omega, \mathfrak{A}) \to 0$$

が成り立つので，$\mathfrak{A} = C(\Omega)$又は$C_r^*(G_\Omega^\Omega))$のとき，$\varprojlim{}^1 KK(S\Omega, \mathfrak{A}) = 0$を示せば，$KK(C_r^*(G_\Omega^\Omega), \mathfrak{A}) = \varprojlim KK(\Omega, \mathfrak{A})$かつ$1_{\mathfrak{A}} = e$となり，証明が終わる．

$KK(S\Omega, C_r^*(G_\Omega^\Omega)) = \varinjlim KK(S\Omega, \Omega)$より，$KK(S\Omega,\Omega) = 0$を示せば十分である．次に§1で述べた普遍係数定理を適用すると，$KK(S\Omega,\Omega) = Ext(\Omega,\Omega)$より

$$0 \to \bigoplus_{g=0,1} Ext^g(\Omega) \otimes K^{g+1}(\Omega) \to Ext(\Omega,\Omega) \to \bigoplus_{g=0,1} Tor(Ext^{g+1}(\Omega), K^{g+1}(\Omega)) \to 0$$

を得る．$Ext(\Omega) = K^1(\Omega) = 0$（$\Omega$は完全不連結より）であるから，

$$Ext(\Omega,\Omega) \simeq Tor(Ext^0(\Omega), K^0(\Omega))$$

となる．更に$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$，$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$ Ω_1は可算無限，Ω_2はQ^cに位相同型であるから，Mayer−Vietoris型定理を使うと，

$$0 \to Ext^0(\Omega_1) \oplus Ext^0(\Omega_2) \to Ext^0(\Omega) \to Ext^0(S^0) \to 0$$

が得られる．ただし$S^0 = \{\pm 1\}$である．Alexander双対定理より，$Ext^0(\Omega_2) \simeq K^0(Q)$となり，$Ext^0(\Omega)$はTorsion freeになる．よって$Ext(\Omega,\Omega) = 0$となる。

以上をまとめると次の命題，定理を得る：

命題7. Ωを完全不連結可分完備距離空間とすると，$\mathrm{Ext}(\Omega,\Omega)=0$である．

定理8. $(M,\mathcal{F}_\varphi)$をAnosov微分同相φから作られる葉層化多様体とすると，$(M,\mathcal{F}_\varphi)$はThom同型を持つ．

文献リスト

[1] A. Connes : A survey of foliations and operator algebras, Proc. Symp. Pure. Math., 38 (1982), Part 1, 521-628.

[2] A. Connes - G. Skandalis : The longitudinal index theorem for foliations, Publ. RIMS, 20 (1984), 1139-1183.

[3] R. Bowen : Anosov foliations are hyperfinite, Ann. Math., 106 (1977), 549-565.

[4] J. Rosenberg : Homological invariants of extensions of C*-algebras, Proc. Symp. Pure. Math., 38 (1982) Part 1, 35-75.

[5] T. Fack - G. Skandalis : Stabilité des C*-algèbres de feuilletages, Ann. Inst. Fourier. 33 (1983), 201-208.