

D. Gabai による, knot complement 上の foliation の構成

阪大 理 小 林 毅

§ 1.

1984 年の暮, 結び目理論の懸案であった Property R 予想及び Poincaré 予想が D. Gabai により肯定的に解決された。この際, 本質的な役割を果たしたのが \mathbb{R} の knot complement 上の foliation の存在定理である:

定理 (Gabai) K を S^3 内の非自明な結び目, S を K の minimal genus Seifert 膜とする。この時, K の complement $S^3 - N(K)$ 上の taut, finite depth foliation \mathcal{F} 下記のものが存在する:

- S は \mathcal{F} の leaf.
- \mathcal{F} に $\partial N(K)$ に transverse に交わる。また $\mathcal{F}|_{\partial N(K)}$ は, foliation by circles.

本稿では, 上の定理の証明の概略を述べる事にする。尚, Gabai 自身の論文 [G2] も存在するので詳しくは, いろいろを参照されたい。

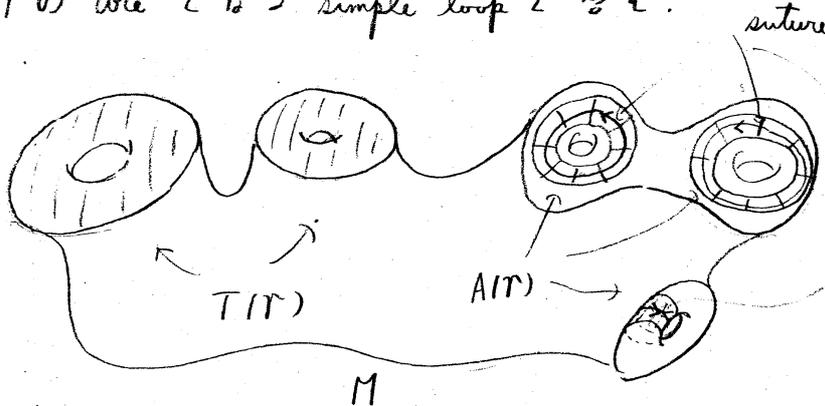
§1. 準備.

この節では, [G1]の結果のうち後述必要となるものを紹介しておく。用語等については Hempel [H], Gabai [G1] を参照されたい。

以下, M を compact, oriented 3-manifold とする。

定義. 組 (M, \mathcal{R}) が sutured manifold とは,

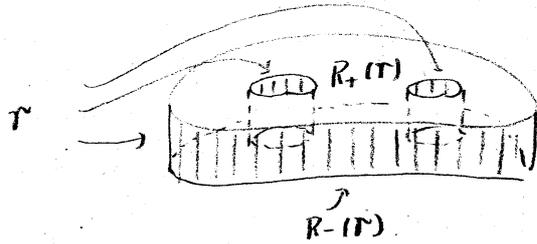
- (1) \mathcal{R} : a set of pairwise disjoint annuli $A(\mathcal{R})$, and tori $T(\mathcal{R})$.
- (2) $A(\mathcal{R})$ の各成分は, suture と呼ばれる, 向きをついた, γ の core となる simple loop を含む。



(3) $R(\mathcal{R}) = \partial M - \mathring{\mathcal{R}}$ の各成分には, 向きが入れられる。特に γ のうちの γ normal vector が 外向き (内向き resp.) のものの全体の和を $R_+(\mathcal{R})$ ($R_-(\mathcal{R})$ resp.) と書く。

例. (product sutured mfd.). S を compact surface $\neq \emptyset$ なるものとする。この時, $M = S \times [0, 1]$, $\mathcal{R} = \partial S \times [0, 1]$,

$R_+(T) = S \times \{1\}$, $R_-(T) = S \times \{0\}$ とすれば sutured mfd. (M, T) を得る。



定義. \mathcal{F} : a codimension 1 foliation of M . L : a leaf of \mathcal{F} とする。

この時, L 及び \mathcal{F} の depth を次のように定める。

L : depth 0 $\Leftrightarrow L$ compact

depth j ($1 \leq j$) leaf が定まり, L とする。この時

L : depth $k+1 \Leftrightarrow \bar{L} - L$: a union of depth j ($1 \leq j \leq k$) leaves, $\bar{L} - L$ は, depth k leaf を含む。

また, \mathcal{F} : depth $k \Leftrightarrow k = \max \{ \text{depth } L \mid L: \text{a leaf of } \mathcal{F} \}$.

注意. leaf 及び \mathcal{F} の depth は, 一般に定義出来るとは, 限らない。

定義. (M, T) : a sutured mfd. とする。この時:

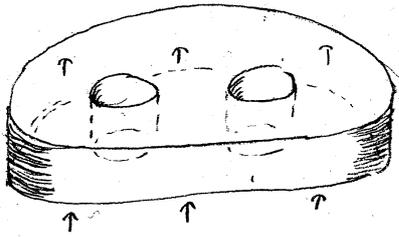
(M, T) : taut とは, $\bullet M$: irreducible, 及び $\bullet R(T)$: norm minimizing in $H_2(M, T)$ なる事。

($H_2(M, T)$ の norm に ついては, Gabai [G1], or Thurston [T] 参照)

定義. \mathcal{F} : a transversely oriented codim. 1 fol. ^(of) a sutured mfd. (M, T) とする。この時, \mathcal{F} が taut とは, 次を満たす事とする。

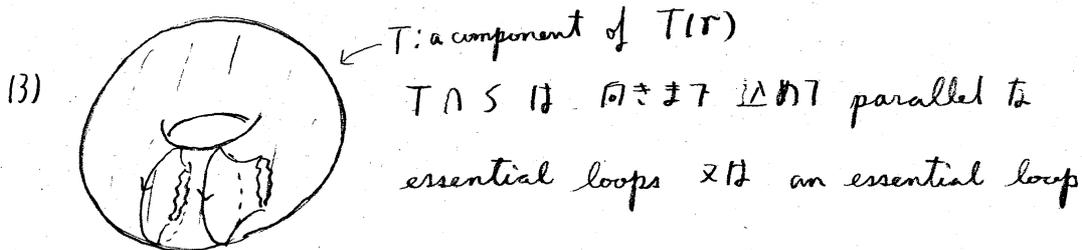
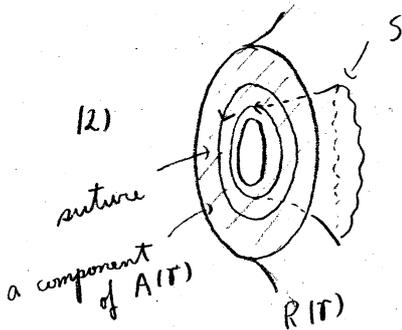
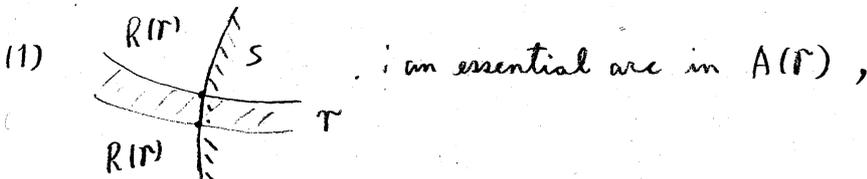
- 1) \mathcal{F} は, \mathcal{R} に対し横断的,
- 2) \mathcal{F} は, $R(\mathcal{R})$ に tangent. \mathcal{F} の normal direction $R_+(\mathcal{R})$ ($R_-(\mathcal{R})$ resp.) へ外向き (内向き resp.).

例. Product sutured mfd. 上の product foliation は, taut



以下 sutured mfd. decomposition & \mathcal{U} sutured mfd. hierarchy と定義

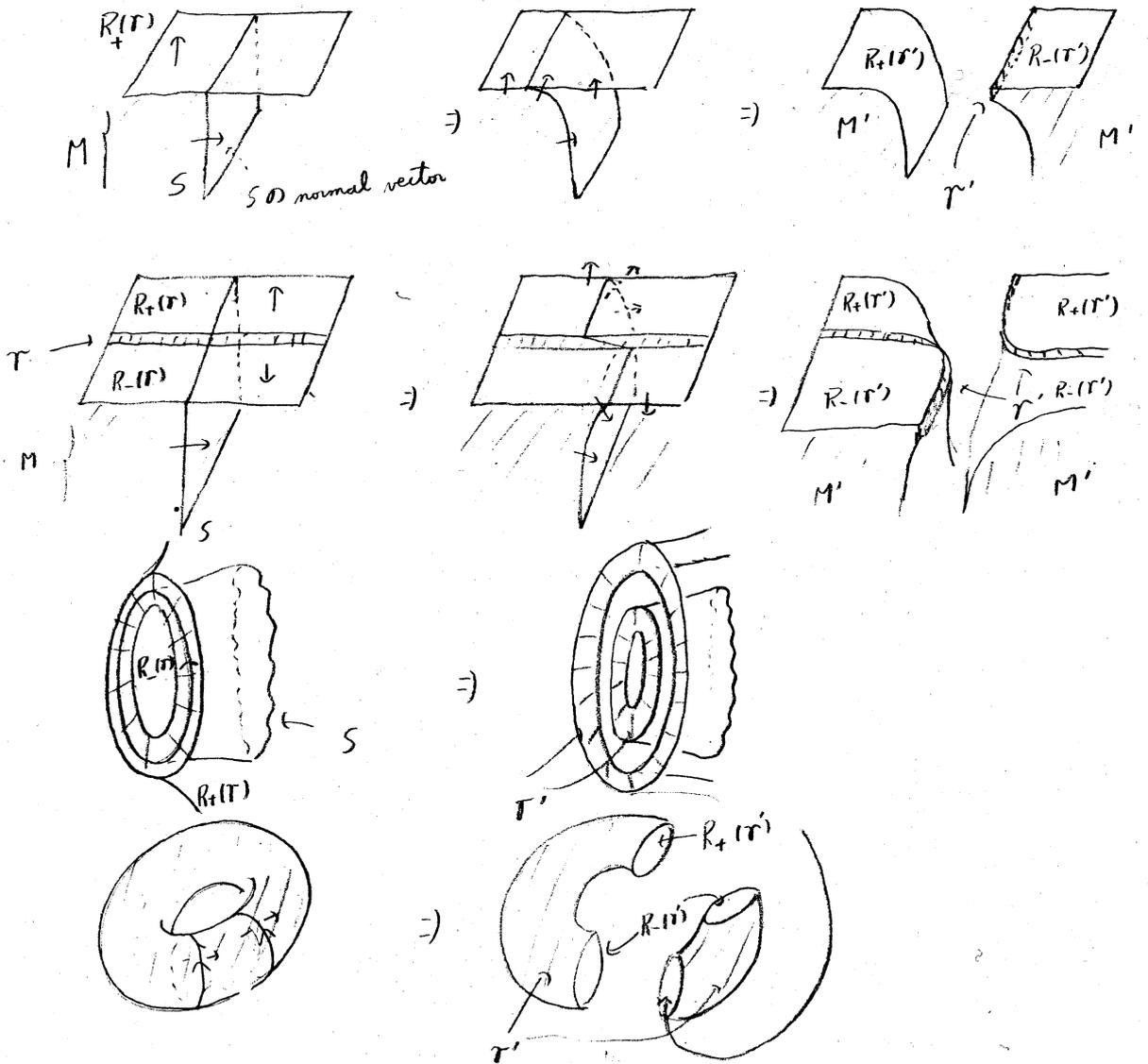
する. まず, $(M, \mathcal{R}) \in$ a sutured mfd. $S \in$ a properly embedded oriented surface in $M \setminus \mathcal{R}$ の各 component は, \mathcal{R} の (1) 以下の条件があるようにする.



二の時. sutured mfd. decomposition $(M, T) \xrightarrow{S} (M', T')$ は
 次で定める.

• $M' = M - \dot{N}(S)$

• T' は, 次のように定める.



定義. sutured mfd. (M, T) が decomposable とは, sutured
 mfd. decomposition の sequence:

$$(M, \mathcal{R}) \xrightarrow{S_1} (M_1, \mathcal{R}_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} (M_m, \mathcal{R}_m)$$

下 (M_m, \mathcal{R}_m) が a product sutured mfd. となるようなものが存在する事とする。またこの sequence のことを a sutured mfd. hierarchy と呼ぶ。

sutured mfd. hierarchy の存在に関しては、次の結果がある。

定理 ([G1]) (M, \mathcal{R}) を connected taut sutured mfd. とする。

また M が rational homology sphere の時は、essential torus を含むとする。

この時 (M, \mathcal{R}) の sutured mfd. hierarchy $(M, \mathcal{R}) \xrightarrow{S_1}$

$(M_1, \mathcal{R}_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} (M_m, \mathcal{R}_m)$ 下 " V : a component of $R(\mathcal{R}_i)$ とすると

$S_{i+1} \cap V$ は、向きを下込め k parallel な $k (\geq 0)$ 本の non-separating simple closed curves, or arcs." となるものが存在する。

証明の

以下 §1. 下述の定理の概略を述べる事にする。尚、各

定義, Lemma の後に (1) (2) の番号は、全 Γ Gabai の論文に

合わせての下所々に欠番がある事を予めお断りしておく。

§ 3.

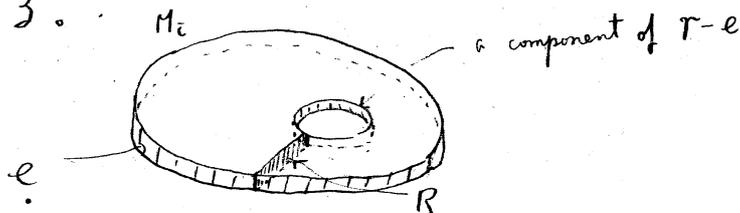
以下 M を knot K の exterior $S^3 - \mathring{N}(K)$ とする。

定義 3.2. $(M, \partial M) \xrightarrow{S_1} (M_1, \mathcal{T}_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, \mathcal{T}_m)$: a sutured mfd.

hierarchy とする。この時 boundary suture $E_i \subset \partial M_i$ を \mathbb{R}^2 のように定める。

$$\left. \begin{array}{l} E_0 = \partial M \\ E_i: \text{the union of those components of } E_i - \dot{N}(S_i) \text{ which are annuli and tori} \end{array} \right\}$$

1) e : a component of boundary suture とする。この時, e が boundary parallel とは, \mathbb{R}^2 のように rectangle R が存在する事とする。



Notation 3.3. (M, \mathcal{T}) : a sutured mfd.

E : a distinguished set of annular component of \mathcal{T} とする。この時 sutured mfd. $(\hat{M}, \hat{\mathcal{T}})$ を \mathbb{R}^2 のように定める。

\hat{M} : mfd. obtained by attaching 2-handle to M along each comp. of E

$$\hat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} - E$$

\mathbb{R}^2 の Lemma の証明は, [G1] の中下定義 $\times M$ は sutured mfd. complexity を用いた議論を要するの Γ Γ Γ は, 省略する。

Lemma 3.6. $(M, \partial M)$ に対し \mathcal{T} sutured mfd. decomposition の sequence

$$(M, \partial M) = (M_0, \partial M_0) \xrightarrow{S_1} (M_1, \partial M_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, \partial M_m)$$

下記の様なものが存在する。

- 1) S_i : connected, $[S_i] \neq 0 \in H_2(M_{i-1}, \partial M_{i-1})$,
- 2) V : a component of $R(M_{i-1})$ とする と $S_i \cap V$ は、向きま下
 ∂V へ parallel to non-separating simple closed curves, or arcs.
- 3) $E_{i-1} \cap S_i$: a union of simple closed curves,
- 4) $\hat{\partial M}_m$: a union of 2-spheres.

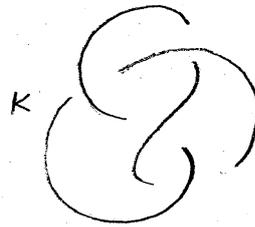
(\hookrightarrow distinguished sutures とし E_m とす.)

Remark: 結果的には、上の decomp. は (少し変形して) sutured mfd. hierarchy に
 なる事が示される。

§4.

K : a knot in S^3 とする。

Convention 4.1. S^3 内の 2点 x, y を fix する。



この時 $S^3 - \{x, y\}$ は、 $S^2 \times \mathbb{R}$ と同相。

また S^2 内の 1点 z を fix すると $(S^2 - \{z\}) \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

いまこの第2成分 \mathbb{R} の射影 h を考え、これを height function とする。また Q_α ($\alpha \in \mathbb{R}$) を (この height への) level α -sphere (or plane) を表す。また level planes Q_α は $S^2 - \{x, y\}$ or $(S^2 - \{z\}) \times \mathbb{R}$ の foliation を \mathcal{H} と表す。

定義 4.2. $f : S^1 \rightarrow S^3$: a presentation of K (i.e. f は embedding,

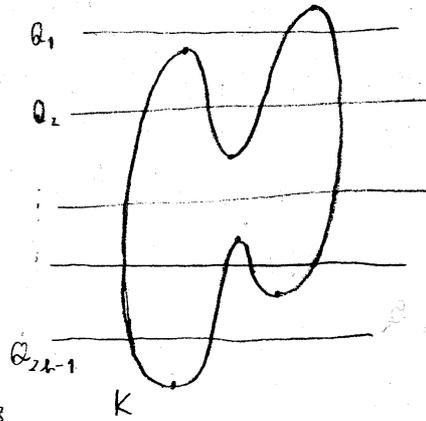
$\text{Image}(f) = K$) へ $h \circ f$ が Morse function であるものをとする。

いま $h \circ f$ の critical point は、2個あるとし、その方は、

全 7 異なる level にあるとする。 Q_1, \dots, Q_{2k+1} は各 critical point の間にお level planes とする。

この時、 K の width, $w(K)$ は 以下定める。

$$w(K) = \min \left\{ \frac{1}{2} \sum_i |Q_i \cap f(S^1)| \right\}$$



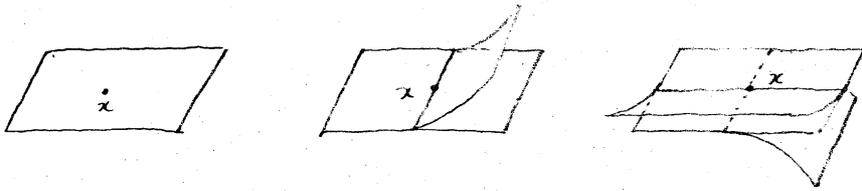
また、 f が $w(K)$ を実現している時、 f は、 thin presentation であると言う。

定義 4.4. M' を m -mf. とする M' 上の p -dim. lamination L とは、 M' 内の closed subset N の分割 $N = \bigcup_{\alpha} L_{\alpha}$ (L_{α} : connected) 下記の条件をみたすもの。

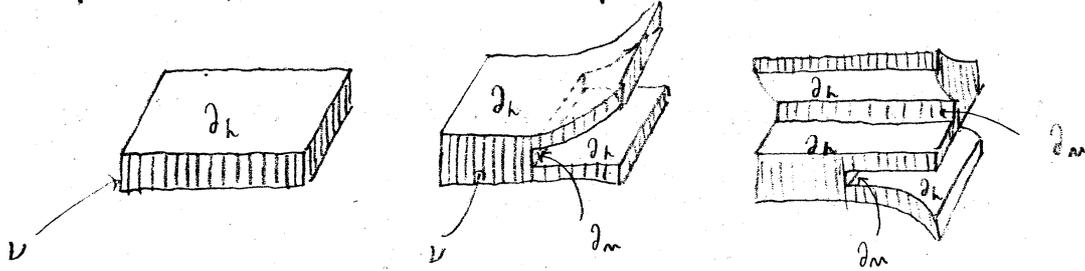
$\forall x \in M', \exists (U, \varphi)$: local coordinate of x s.t. 各 $L_{\alpha} \cap U$ は $\bigcup_{i=1}^p \{ \varphi_i^{-1}(c_i) \}$ の形。

また $\bigcup_{\alpha} L_{\alpha}$ の各 component を basis とする topology が L 上の leaf topology と呼ぶ。

定義 4.7. 3 -mf. M 内の branched surface (with generic branched locus) B とは、各点 $x \in B$ が次のような local model を持つ M の subspace



また B は、次のように表わす事も出来る。 M 内の $3\text{-dim. submf. } N(B)$ 下次のように各 leaf が $I=[0,1]$ 下あるような foliation



v をもつものを考える。この時、 v の各 leaf を 1 点につぶす操作を \sim 下表わすと $M/\sim \cong M$, この M/\sim 内下の $N(B)$ の image が B 下ある。又、 $\partial N(B)$ は v と transverse な部分と tangent な部分に分れるの下、それぞれを $\partial_h N(B)$, $\partial_n N(B)$ と表わす事にする。この $N(B)$ を B の fibered nbhd. と呼ぶ。

また、 M 内の lamination L が B によ、 τ carry されるとは、 B の fibered nbhd. $N(B)$ 下、" $L \subset N(B)$ " かつ " L は v に transverse" なるものが存在する事とする。 L が B によ、 τ fully carried とは " L が B によ、 τ carry される" かつ " v の各 leaf は L と交わる" 事とする。

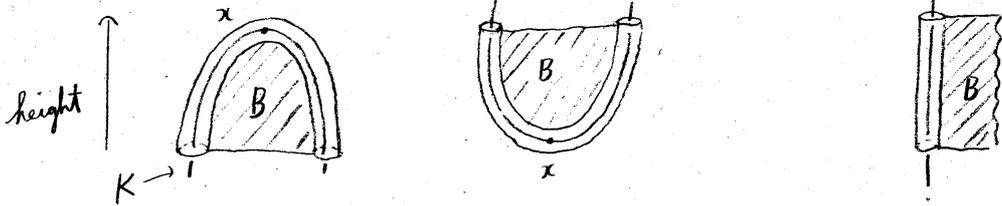
定義 4.8. $M=S^3-N(K)$ 内の branched surface B が normal form にあるとは、次の条件 1)~6) の条件をみたす事とする。

- 1) K は, thin presentation.

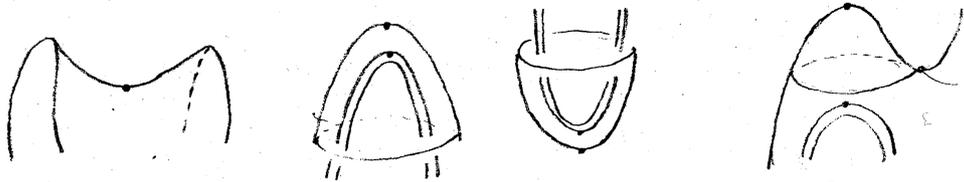
2) B は $N(K)$ の近くで次の状況:

• $x \in K$ が local max. or min. の時

• $x \in K$ 以外の時

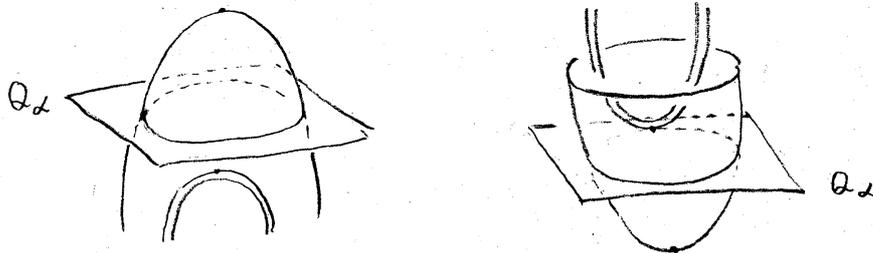


3) B は, isolated to 'saddle' 又は 'knot K の local max, or min. を ϵ to 'center' を除いた \mathbb{R}^3 に transverse



三つは normal form 下で

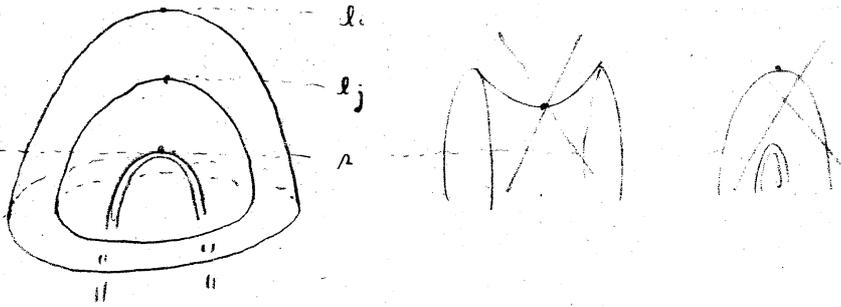
4) horizontal plane Q_α 下 " $Q_\alpha \cap B$ の α component C 下 $Q-B$ の disk component を bound する" 様なものが存在したとするとこれは 3) の center の状況の一部。即ち Q_α を上げ (or 下げ) 下ゆくと center にぶつかり, Q_α を下げ (or 上げ) 下ゆくと knot の local max. (or min.) にぶつかる。



5) z_1, \dots, z_r : points of tangency of B with \mathbb{R}^3 とする。

また z_i の height を h_i とする。この時 h_1, \dots, h_r は, K の local max, or min. とは異なる, 互いに相異なる level 下生じる。

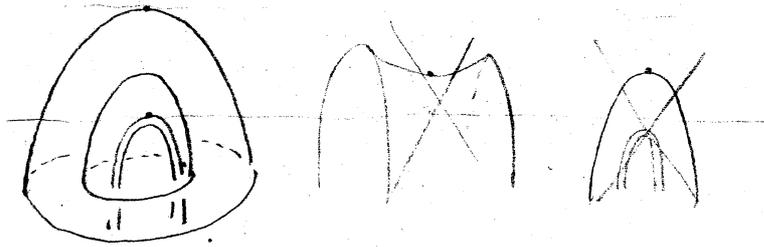
また z_i を height Δ の K の local max. (or min.) を含む center とする. この時 " $\Delta < l_j < l_i$ (or $l_i < l_j < \Delta$) $\Rightarrow z_j$ は l_i と同じ K の local max. (or min.) を含む center.



6) height fun. | branched locus of B は, Morse function f , γ の critical point は, K の critical points と異なる discrete level γ 生じる.

定義 4.9: $M = S^3 - N(K)$. 内の lamination L が normal form にあるとは, 次の条件 1) ~ 5) をみたす事とする

- 1) K は, thin presentation,
 - 2) L の $N(K)$ の近 γ 4.8 2) と同じ状況
 - 3) L を a leaf of L とする. L は (leaf topology γ) isolated to 'saddle' 又は, ' K の local max. or min. を含む center' を除 γ 外 に transverse
 - 4) horizontal plane $Q_\Delta \gamma$ " $Q_\Delta \cap L$ の a comp. $C \gamma$ $Q - L$ の disk component を bound する" 様なものも存在したとする.
- これは 3) の状況の一部.
- 5) (4.8 5) に 対応 する 条件)



次の Proposition は, 定義 4.8, 4.9 より直ちに従う.

Proposition 4.10. \parallel \exists 'lamination L (M) は, normal form にある branched surface B により carry される' とする. この時 L は, normal form にある lamination に isotopic.

定義 4.13. B を oriented 3-mf. P 内の transversely oriented branched surface とする. この時 $S(B) = (M, \tau)$; sutured mf. defined by B を次で定める.

$$\cdot M = P - N(B)$$

$$\cdot \tau = \partial_{\text{in}} N(B)$$

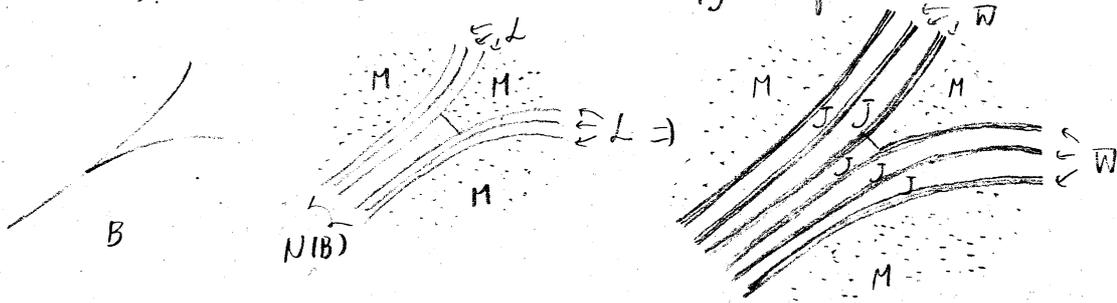
$\cdot R(\partial) = \partial_{\text{h}} N(B)$, $R_+(\partial)$, $R_-(\partial)$ は, B の orientation から自然に定まる.

$N(B)$ は, I による fibration ν をもつ事と B に carry される lamination の定義及び定義 4.13 より次の Proposition は, 容易に証明出来る.

Proposition 4.14. B : a branched surface in P , L : a lamination fully carried by B . W : a lamination obtained by thickening L とする。

この時、 $S(B)$ は W の complement に natural に埋め込まれる (特に $R(T) \subset \partial W$)。また $J = P - (W \cup M)$ は ν/J を fibration とする

finite depth



4.15. sutured mfd. decomp. seq. $k \geq 3$ の branched surface の構成

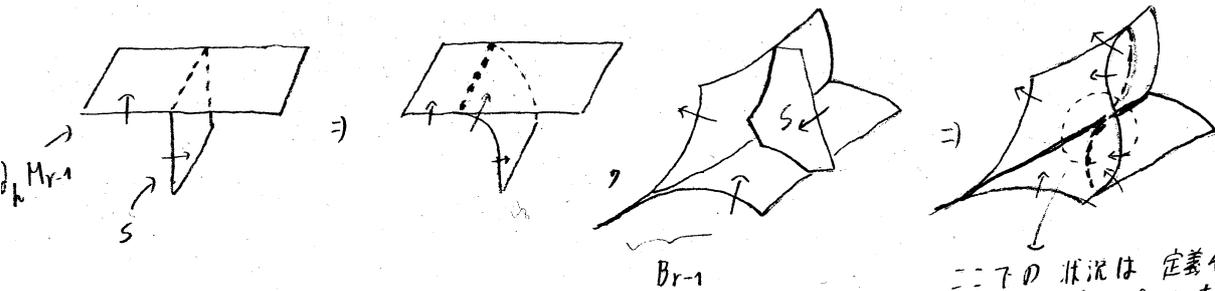
$(N, \partial N) = (M_0, \partial_0) \xrightarrow{S_1} (M_1, \partial_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, \partial_m)$: a seq. of sutured mfd.

decomp とする。この時、 N に proper に埋め込まれた branched surface (with generic branched locus) $B_i \subset N$ $S(B_i) = (M_i, \partial_i)$ とする (for $i=1, \dots, m$) ようなものを深のように帰納的に構成する

• $B_1 = S_1$

• B_1, \dots, B_{r-1} s.t. $S(B_i) = (M_i, \partial_i)$ が定まるとする。

$S(B_{r-1}) = (M_{r-1}, \partial_{r-1})$ より S_r は $N - \overset{\circ}{N}(B_{r-1})$ に proper に埋め込まれた surface. 従って B_r と深のように決めればよい。

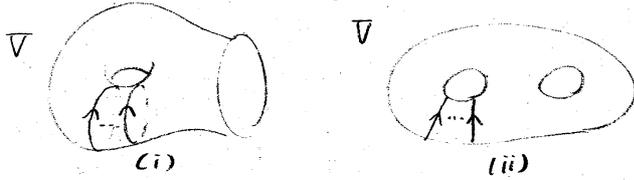


二下の状況は定義4.7 10p. の一番右の絵に同じ。

4.16 Constructing finite depth lamination from sutured mfd. decomp.

$(N, \partial N) = (M_0, \Gamma_0) \xrightarrow{S_1} (M_1, \Gamma_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, \Gamma_m)$ is a seq. of sutured mfd. decomp.

Suppose: V : a comp. of $R(\Gamma_i)$ とすると $V \cap S_i$ は, 向きま下込の Γ parallel to non-separating simple closed curves, or arcs.

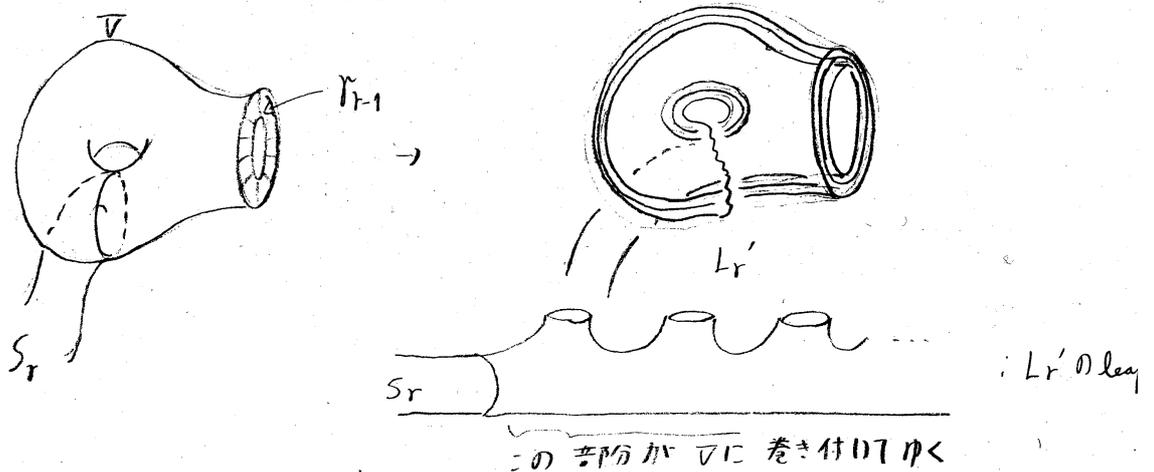


この時, L_i : finite depth lamination fully carried by B_i ($i=1, \dots, m$) を次のように帰納的に構成する。

• $L_1 = S_1$

• L_1, \dots, L_{r-1} が構成されたとする。この時 L_r を次のように構成する。まず 4.15 で得られる branched surface B_{r-1} から定まる N の分解 $M_{r-1} \cup W_{r-1} \cup J_{r-1}$ を考える。この時 $L_{r-1} \subset J_{r-1}$ 。いま $S_r \subset M_{r-1}$ と考え S_r の boundary を $R(M_{r-1})$ の component (S_r と交わるもの) に巻き付けてゆく事により lamination L_r' を Γ_{r-1} と横断的であらうにものを得る。

例えば上の絵の (ii) の場合。



J_r の部分は, (non-compact to) product sutured mfd. (④ 4.14) を
 かし, L_r' は容易に N の lamination L_r に拡張される。また
 構成より明らかなに L_r は finite depth τ fully carried by Br .

Lemma 4.20. K is a knot in a thin presentation $M = S^3 - \dot{N}(K)$

$(M, \partial M) = (M_0, \delta_0) \xrightarrow{S_1} (M_1, \delta_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, \delta_m)$: a seq. of sutured mfd. decomp.

- s.t. $\left\{ \begin{array}{l} \bullet (M_i, \delta_i) : \text{taut} \\ \bullet S_i \cap E_i : \text{向きま} \tau \text{ 込め} \tau \text{ parallel to simple closed curves.} \\ \quad \quad \quad \rightarrow \text{see 3.2} \\ \bullet V_i : \text{a component of } R(\delta_{i-1}) \text{ とする と } S_i \cap V_i \text{ は, 向きま} \tau \text{ 込め} \\ \quad \quad \quad \tau \text{ parallel to simple closed curves or arcs.} \end{array} \right.$

L : 上の seq. より 4.16 のようにし τ 定まる lamination. とする。

この時, 新しく 1) a seq. of sutured mfd. decomp.

$(M, \partial M) = (N_0, \delta_0) \xrightarrow{T_1} (N_1, \delta_1) \xrightarrow{T_2} \dots \xrightarrow{T_m} (N_m, \delta_m)$ τ 深をみたすものが
 ある。

(see 4.15)

1. B_1, \dots, B_m : (N, δ) -seq. から定まる branched surface とする と L

は fully carried by B_m

2. $(N_m, \delta_m) \ni$ product disk, or annulus に沿, τ 切り開く事により

(M_m, δ_m) と product sutured mfd. を得る (product disk, annulus の定義は
 [G2] と参照)

3. B_1, \dots, B_m は, normal form (see 4.8) 従, $\tau, 4.10$ より, L

は, normal form に τ 対応する。

Proof. Step 1. ($B_1 = T_1 (= S_1)$ を normal form にし, T を \llcorner)

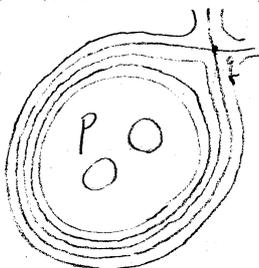
$(N_0, \delta_0) = (M, \partial M)$, $T_1 = S_1$ とする。まず general position の議論により $S_1 (= S)$ を次のような位置に \llcorner , T を付ける。

- S は, K の近 \llcorner T normal form (i.e. S_1 は 4.8 (2) をみたす)
- S は, 次の3つの状況を除く T 共に横断的

- saddle
- center in normal form (see 4.8.4)
- plateau P (i.e. P は S に embed さ \llcorner \forall T surface T $P \perp T$ h は, const., また h は, P T local max., or min.)

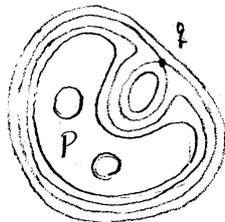


さて, plateau P ($\subset S$) の近 \llcorner T の $S \cap T$ の状況を見る。 ∂P の少し外 T は, foliation $S \cap T$ は, product $\partial P \times I$ (leaf は $\partial P \times \text{pt.}$) の形になり, T になるが \hookrightarrow この条件により leaf を外側にたどり, T を \llcorner は必ず saddle にぶつかる事になる。これに注意して P を次の3つの types に分ける。



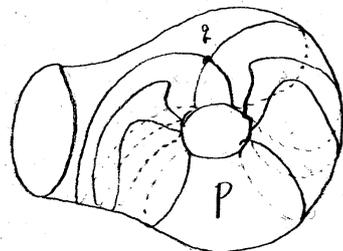
type I

∂P 上の1点が pinch する



type II

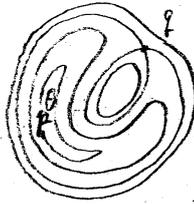
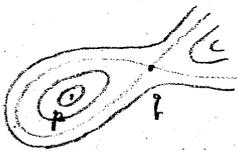
∂P の α comp. 上の2点が squeeze する



type III

∂P の互いに異なる comp. 上の2点が squeeze する。

同様に各 center も次のように type I, II に分ける。

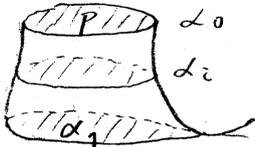


type I

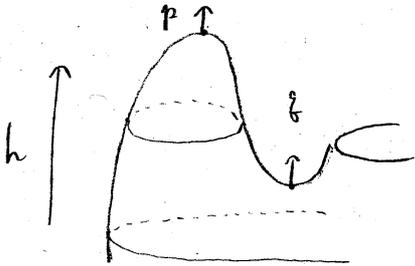
type II

この時, $F: PXI \rightarrow S^3$ 下 $F(PXI) = P$, $F|_{PXI(0,1)}$: embedding,
 $F(PXI) =$ となるものが存在する。

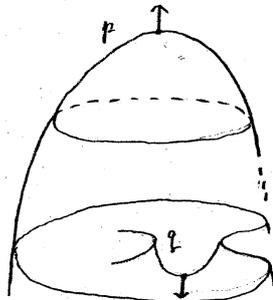
また $\alpha_i = F(PXI_i)$ とする (従, $\alpha_0 = P$).



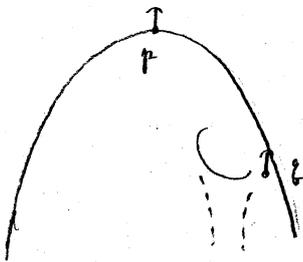
また type I, II を P (or P') と f 下の normal direction へ一致するか
 どうか下通りに a 型, b 型に分ける。即ち:



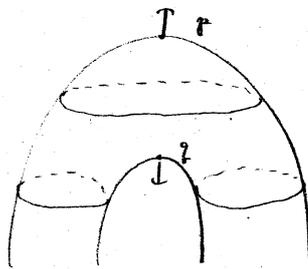
type Ia



type Ib



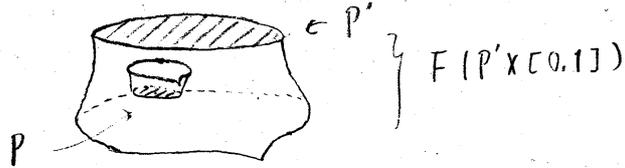
type IIa



type IIb

以上の状況のもと S の complexity (15) を 3 (plateaus の
 個数) + 2 (centers の個数) で定める。また P' を local max.

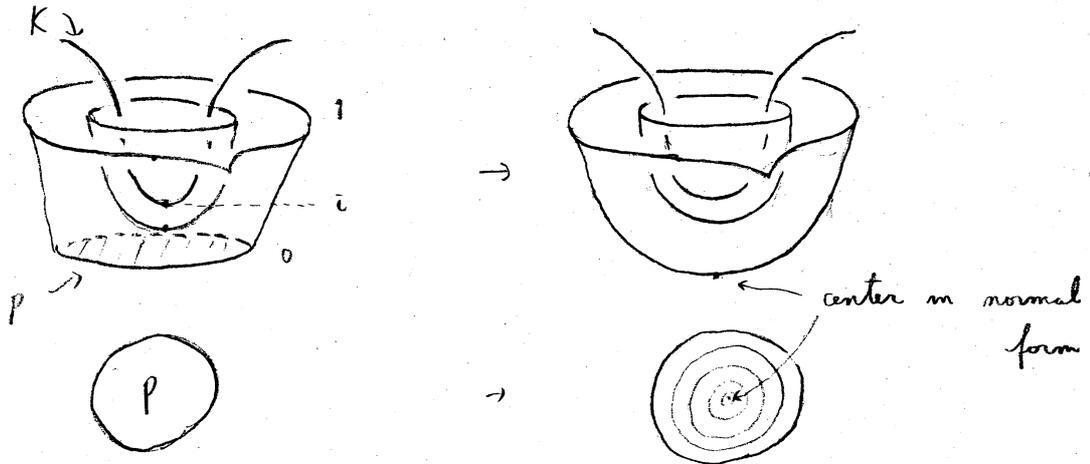
下ある plateaus のうち最も高さの低いもの, $P \in F(P' \times (0, 1))$ に含まれる plateaus のうち最も高さの高いものとする。(注: もし P' が存在しなければ P を local min. 下ある plateau 下最も高さの高いものとする。 P' も P も存在しなければ, 下の Case. 7A 行く)



Case 1. $K \cap F(P' \times [0, 1]) \neq \emptyset$

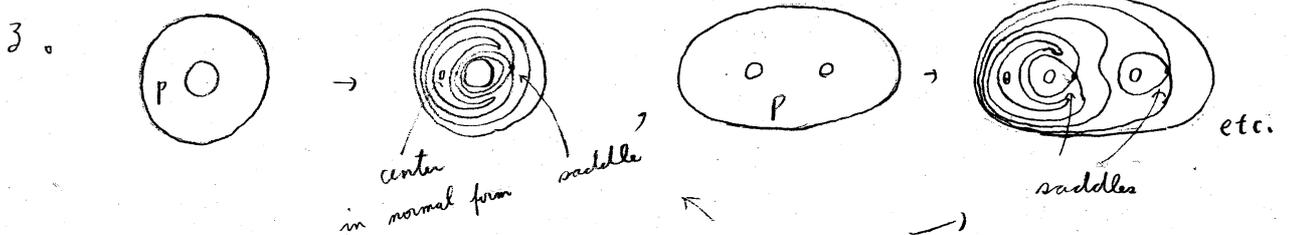
$\bar{c} = \min \{ j \mid F(P' \times [0, j]) \cap K \neq \emptyset \}$ とする。即ち $F(P' \times [0, \bar{c})) \cap K = \emptyset$, $F(P' \times \{\bar{c}\})$ は \bar{c} local min. point of K .

P が disk の時, S



を上の図のように P の nbhd. 下変形して complexity を下げた。

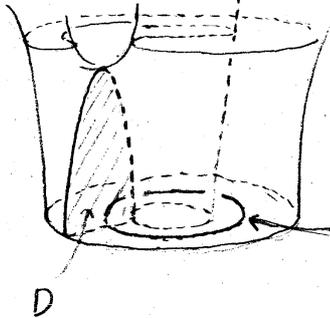
P が disk 下ない時も次のように S を変形して complexity を下げた。



この saddle は, \bar{c} より高い所にある。
(\bar{c} 下は新しい center は, normal form 下は)

以下, $K \cap F(PX[0,1]) = \emptyset$ とする.

Case 2 P is of type III

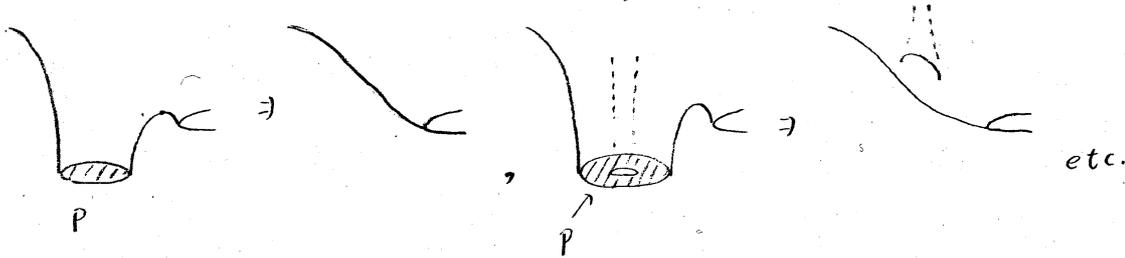


この時, 左の様に $D \cap S = \partial D$ とする disk D がとれる。いま S 上の loop γ が ∂D と transverse に 1 点で交わるものが存在するから ∂D は, S 上の essential loop.

これは, S が min. genus に矛盾.

Case 3 P is of type Ia

この場合, R のようにして complexity を下げられる。



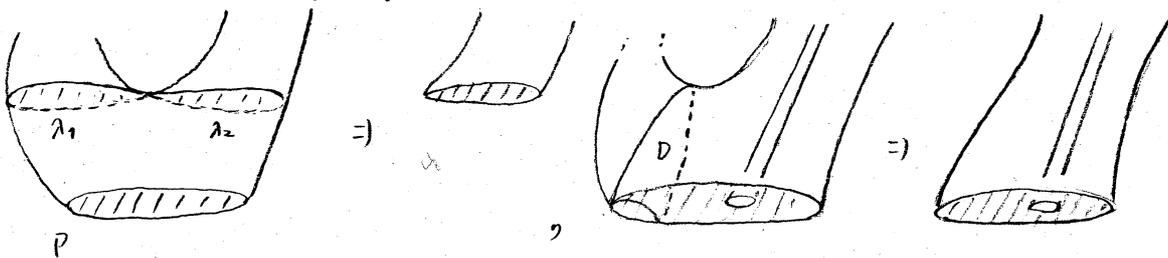
Case 4. P is of type Ib

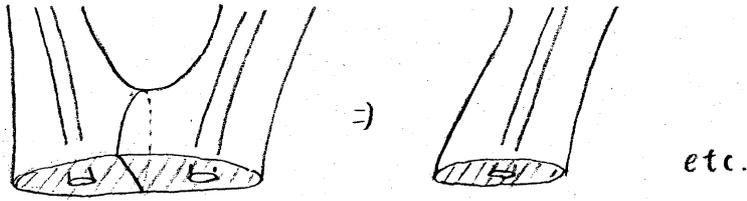


local min. として, P の取り方はこれは center としておけばなる。他方この saddle の存在と $K \cap F(PX[0,1]) = \emptyset$ より上の center は, normal form として事か用かす: 矛盾.

Case 5. P is of type IIb

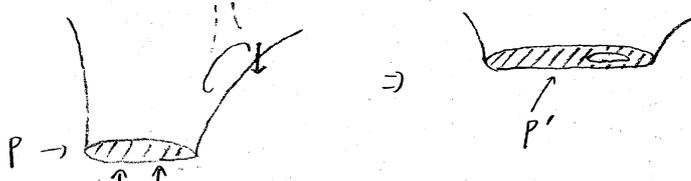
R のようにして complexity が下げられる。





Case 6. P is of type II

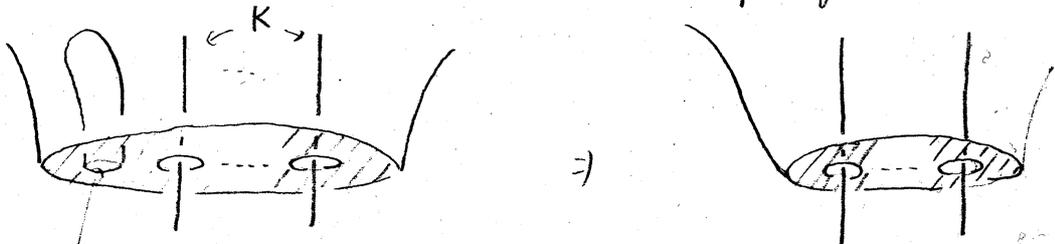
この時, P を次のように押し上げて P' を新しい plateau を作る。



注: この時 $|X(P')| = |X(P)| - 1$, また新しく得られた surface は, S と同じ complexity をもつ。

この新しい surface に Case 1~5 の議論が適用出来れば complexity が下がる。もし適用出来なければ上と同様 surface 上の a plateau を押し上げて新しい plateau を作る。この方法下 n つまでも complexity が下がるが、たしする。この時, a surface 上の a plateau P_r 下 $|X(P_r)| > \frac{m(K)}{2}$ なるものが存在する。
→ see 4.2

この時 P_r の component 下 surface 上の disk を bound するものか
 とれるからこれをを用いて次のように complexity を下げられる。



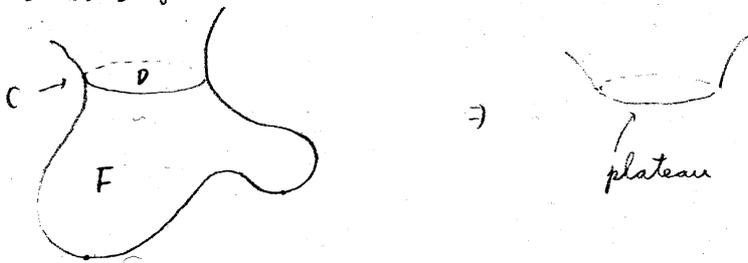
この中 K は 通る (⊙ def of $m(K)$)

以上の考察により S を min. complexity にとれば S 上に

plateau は存在し得る) 事がわかる。従、7. この S が normal form にある事を見る為には, あと 4.8.4) の条件をみたす事を確かめればよい。

Case 7 $\exists Q$: level plane, $\exists C$: a component of $Q \cap S$ s.t. C bounds a disk D in $Q-S$, C bounds a disk F in S s.t. F : not normal form.

この時 次のように S_1 を取り変える事により complexity を下げられる。



(注: Gabai は, 論文の中下 Case 7 を上のように取り扱, 7.1) したが, 実際には, Case 7 は起り得ないと思われる。

Step. 2

Lemma 4.21. B : a branched surface in normal form w.r.t. K s.t.

$S(B)$: taut,

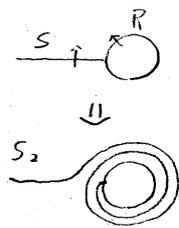
$S(B) = (M, \mathcal{R}) \xrightarrow{S} (M', \mathcal{R}')$: a sutured mfd. decomp. s.t.

- V : a comp. of $R(M) \Rightarrow S \cap V$: 向きまた向 ∂V parallel to simple closed curves or arcs.
- (M', \mathcal{R}') : taut

R : the components of $R(M)$ which intersects S_1

$S_{\mathcal{R}}$: the properly embedded surface in M obtained by oriented cut and paste surgery with S and \mathcal{R} parallel copies of R .

$(M, \tau) \xrightarrow{S_r} (M', \tau')$: sutured mfd. decomp. $\Rightarrow \exists \tau'$ 得る \exists τ
 branched surface Σ B_r とする。 (以上 \forall Lemma の仮定)
 $\Rightarrow \exists \tau'$ s.t. B_r は rel ∂ isotopy τ' branched surface in
 normal form に isotopic.



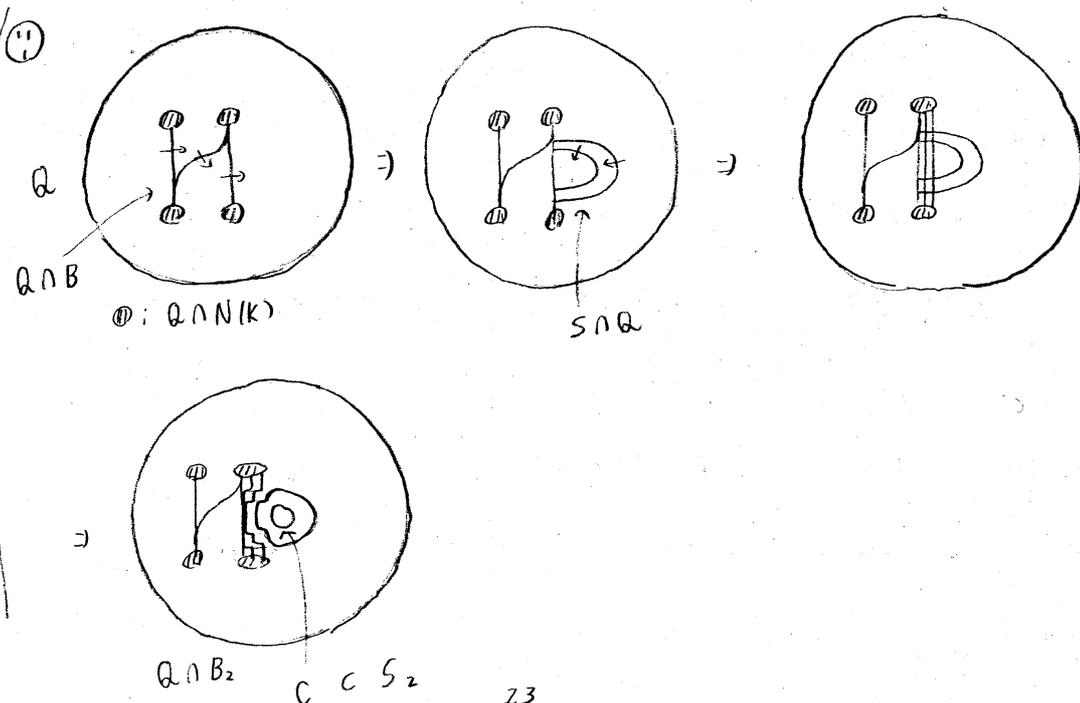
Proof. S_1 を次のように isotopy 下動かす。

- ∂S は, B の saddle, center の nbhd. と disjoint.
- $h|_{\partial S}$ は, Morse fun. centers in normal form
- S は, isolated saddle, plateaus / \forall 外 τ' と横断的.
- B の branched locus は, Def. 4.8 b) をみえす。

$\Rightarrow \tau'$

" m を十分大きくとれば, 次のように出来る:

$\delta > m$ とすれば $Q \cap B_\delta$ \forall smooth circle $C \subset Q - (B_\delta \cup N(K))$ の disk component Σ \in level plane Σ bound する ような ものを 含む $\Rightarrow C \subset S_\delta$, or C は, B_δ 内の disk τ' center in normal form を含む ような ものを bound する"



m' : the number of plateaus and centers of S_m とし $r = m + m'$ とする。

この時, $\mathcal{R} = \{\text{centers and plateaus in } B_r \text{ which are contained in } S_m\}$ とし
 \mathcal{R} の complexity を $C(\mathcal{R}) = 3|\text{plateaus の個数}| + 2|\text{centers の個数}|$ と定めれば,
 後は Step 1 と同様に議論が進行して Lemma が証明出来る。

Step 3. (Proof of Lemma 4.19)

まず S_1 に Step 1 を apply して normal form S_1^1 に持ってくる。

次に S_2 に Step 2 を apply し 新 (1) sutured mfd. の seq. :

$$(M_0, T_0) \xrightarrow{S_1^1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2^2} (M_2, T_2) \xrightarrow{S_3^3} (M_3, T_3) \xrightarrow{S_4^4} \dots \xrightarrow{S_m^m} (M_m, T_m)$$

を得る。(S_1^1 と S_2^2 から定まる branched surface は normal form に持ってくる)

次に S_3^3 に Step 2 を apply する ... 以下二回をくり返してあげれば,

Lemma 4.19 の, sutured mfd. decomp. の seq. を得る。

Lemma 4.22. $L \subset S^3 - \overset{\circ}{N}(K)$: a finite depth lamination with incompressible leaves, W : a lamination obtained by thickening L , (M, T) : a taut sutured mfd. embedded in $S^3 - (N(K) \cup W) \Rightarrow (M, T), W$ を isotopy 下動かして \mathcal{R} のような level plane Q を見つける。

0) $Q \cap K \neq \emptyset$

1) Q は $\overset{\circ}{W}$ 内の有限個の saddles, centers を除いて Q と横断的。

2) $\overset{\circ}{W} \cap Q$ の component のうち $Q - (\overset{\circ}{W} \cup N(K))$ で disk を bound するもののは高々 1 個。

3) Q は, M に横断的。 $Q \cap T$ の各 arc component は, T の

essential arc.

4) $Q \cap (\partial M - \dot{E})$ の各 arc component は, $\partial M - \dot{E}$ 下 essential.

Proof. M を isotopy 下動かして次のようにする.

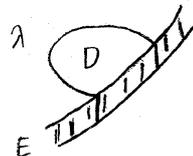
- | ∂M は, 有限個の saddles, centers を除いて level 2-spheres と横断的.
- | ∂T は, 有限個の critical points を除いて level 2-spheres と横断的.
- | 全ての tangency は, 相異なる level にある.

h を K の local min. 下最も高い所にあるものの高さ, a を K の local max. 下 h より高い所にあるもののうち最も低いものの高さとする.



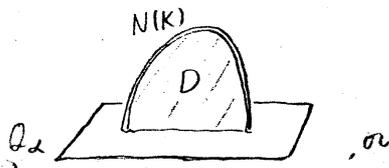
$h < a < a$ とし $Q = Q_a$ とする。この時 $Q \cap E$ の各 component は, \rightarrow boundary suture E の essential arc.

λ : an arc component of $(\partial M \cap Q) - E$ とする

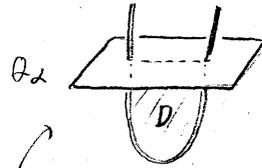


つまり, λ は $\partial M - E$ 下 inessential とし D を Y の compressing disk とする。

この Q_a, λ, D を S^3 の中で見ると次の状況:



このように Q_a を low plane



このように Q_a を high plane と呼ぶ。

$H(S_{resp.}) = \{ \alpha \in [h, a] \mid Q_\alpha \text{ is a high (low resp.) plane} \}$ とおく。

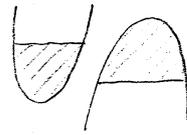
Claim $[h, a] \neq \overline{H \cup \overline{S}}$
 $[h, a] = \overline{H \cup \overline{S}}$ とせよ。

Proof of Claim. 以下の事実注意到す

" I : an open interval of $[h, a]$ s.t. $\partial M \cap Q_\alpha (\forall \alpha \in I) \Rightarrow 'I \subset H \text{ or } I \cap H = \emptyset'$ "

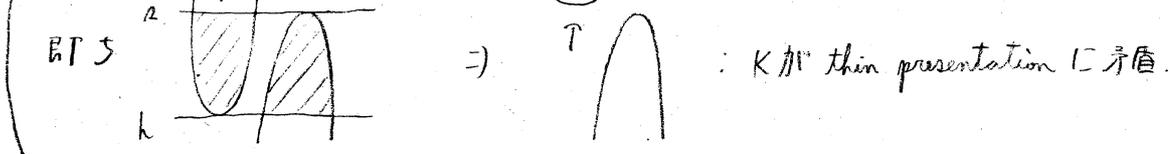
' $I \subset S$ or $I \cap S = \emptyset$ ' または ' $h \in \bar{H}, \Delta \in \bar{S}$ '

1) また Claim が成立し 右 1) とする。 即ち,



この時 " $\exists \alpha \in [h, \Delta]$ s.t. θ_α は ∂M に tangent"

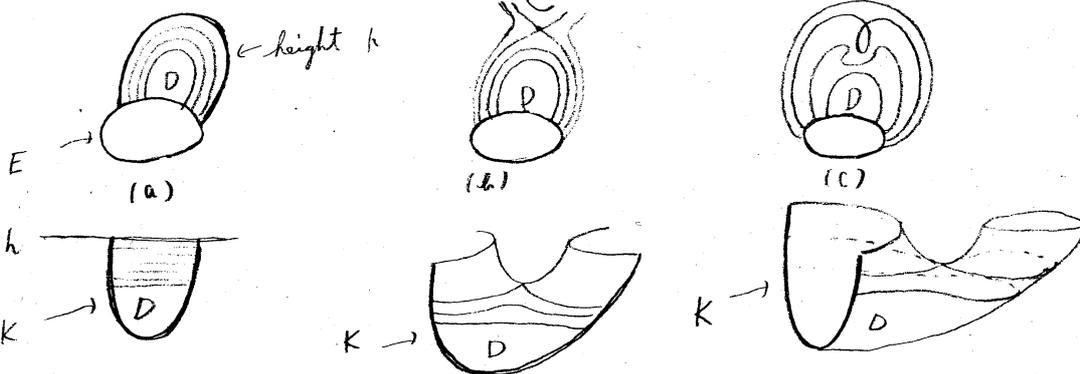
(1) $\forall \alpha, Q_\alpha$ が ∂M とする上の注意より $\bar{H} = \bar{S} = [h, \Delta]$.



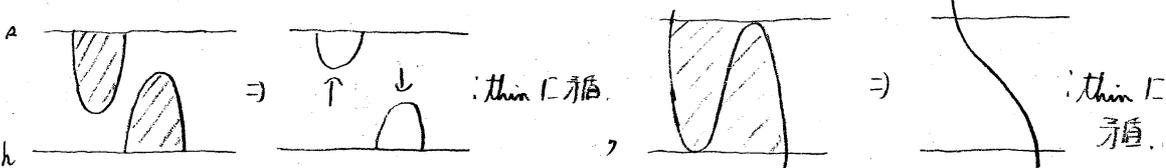
この時, $\alpha \in (h - \epsilon, h) \Rightarrow \alpha \in H, \alpha \in (h, h + \epsilon) \Rightarrow \alpha \in S$

1) また 4) によ, τ が ∂M 上に induce される foliation を考え τ が 1) に沿,

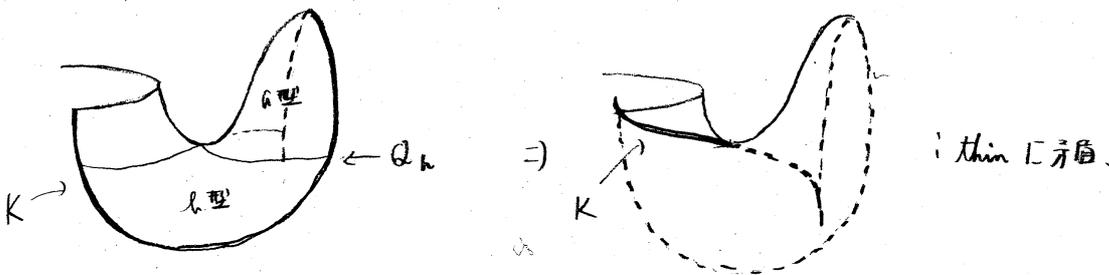
$\tau \cdot D$ を 外側に在ると, τ が 押く事により 次の 3 つの cases を得る。



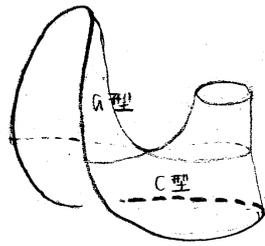
• Q_α の上に a 型, 下に a 型の disk がある時, 次の 2 つの状況を得る。



• a 型, b 型の時



• a 型, c 型の時



即ち、この時 K は、unknot: 矛盾.

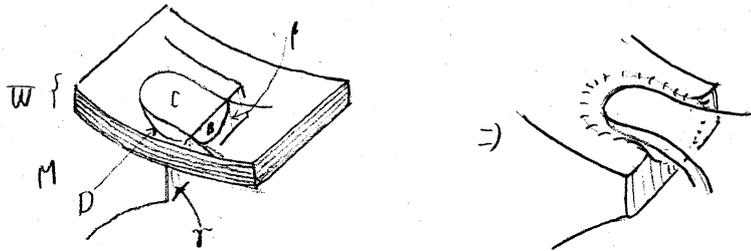
Q_α の取り方より A 型, C 型の組み合わせは右に事がわかる.

以上, Claim の証明終り.

Claim. より $\exists \alpha$ ($h < \alpha < n$) s.t. $Q_\alpha \neq$ high, low plane また $Q \cap L, Q \cap M$ としてよい. 以下この Q_α が Lemma の条件をみたす事をみる.

まず L が normal form より (1) は O.K. h, n の取り方より (2) も O.K. α の取り方より (4) も O.K. 従って, τ , α と (3) をみたすように M を変形する.

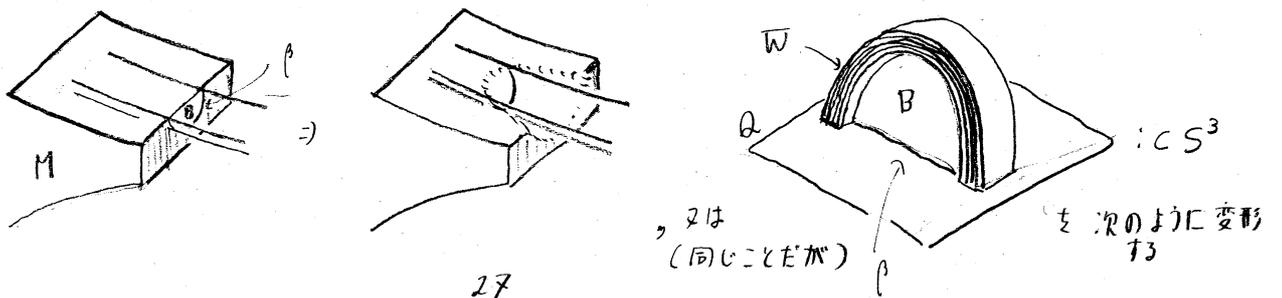
$\exists \beta$: a comp. of $Q \cap \tau$, $\exists D$ (a disk) s.t. $\partial D \subset \partial W$, $\partial D \cap W \cup \tau = \emptyset$ とする. この時, 次のように M を isotopy 下動かして β をはずしてしまおう.

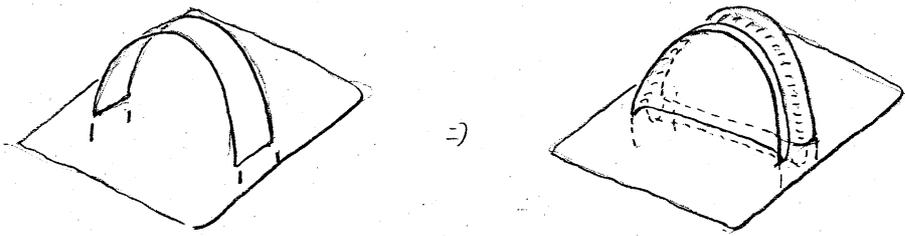


従って, $\tau \cap Q \cap \tau$ の各 comp. は, $Q - \overset{\circ}{W} \cap \tau$ essential としてよい.

$\exists \beta$: a comp. of $Q \cap \tau$, inessential in τ , essential in $Q - \overset{\circ}{W}$ とする.

この時, 次のように W, M を動かして β をはずしてしまおう.





この時、 $Q \cap W$ の pattern は \mathbb{R} のように変化する。



以上より $Q \cap T$ の comp. \neq essential なものは全て消せる。

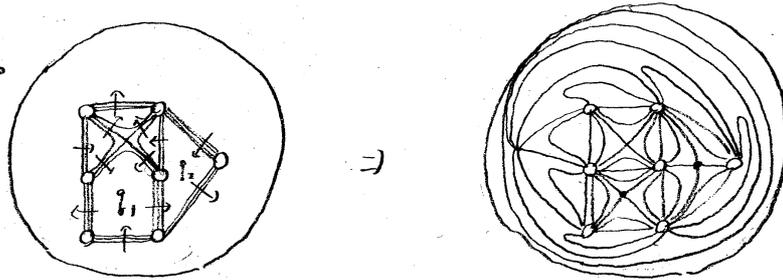
Lemma 4.24. $(S^3 - \dot{N}(K), \partial N(K)) \xrightarrow{S_1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, T_m)$: a seq. of sutured mfd. decomp. s.t.
 • (M_i, T_i) : taut
 • $S_i \cap \partial N(K)$: a union of simple closed curves
 • V : a comp. of $R(T_{i-1})$ とすると $S_i \cap V$ は、向き打込込め parallel to non-sep. simple closed curves, or arcs.

$\Rightarrow \exists Q$: level 2-sphere s.t.
 • $Q \cap K \neq \emptyset$,
 • $Q \cap M$,
 • $Q \cap T$ ($Q \cap (\partial M - \dot{E})$ resp.) の各 comp. は、 T ($\partial M - \dot{E}$ resp.) \neq essential
 • $Q \cap M = \{I_1, \dots, I_r\} \cup D$, $D = \emptyset$, or a disk, $\sum_{i=1}^r \frac{|I_i \cap \partial T|}{4} - \chi(I_i) \leq |Q \cap K| - 1$.

Proof. 4.16 より、 $S^3 - \dot{N}(K)$ 上の finite depth lamination L が定まる。

(M_i, T_i) : taut より L の各 leaf は, incompressible. 4.19, 4.10 より L は, normal form にあるとしてよい。

Q を 4.22 で得た level 2-sphere とする。この時、 $Q - \dot{N}(K)$ 上の lamination $Q \cap L$ は \mathbb{R} のように singular foliation に拡張する。



二二下各 singularity 上の index を次のように定める。



二の時、 $\chi(Q - \dot{N}(K)) = \sum_i (\text{index of singularities})$ (Poincaré-Hopf index formula)

従って $\sum_{i=1}^r \chi(Q_i) - \frac{|\partial Q_i \cap \partial F|}{4} = \sum_{i=1}^r \text{index}(f_i \text{ の sing.})$

$\leq \sum_{i=1}^r \sum_{\{i\} \cup \{j\} = \emptyset} \text{index}(f_i \text{ の sing.}) = 1 - |Q \cap K|$

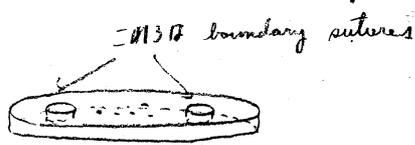
§5

Lemma 5.1. K : a knot, $(S^3 - \dot{N}(K), \partial N(K)) \xrightarrow{S_1} (M_1, T_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_m} (M_m, T_m)$: a seq.

of sutured mfd. decomp. n.t. $(M_i, T_i) - (M_m, T_m)$: taut

$\cdot \dot{M}$: a union of 2-spheres, $\cdot S_i$: not a compressible torus, $\cdot S_i \cap \partial N(K)$: union of circles,

$\cdot V$: a comp. of $R(T_{i-1})$ とすると, $S_i \cap V$ は、向きまたは ∂T parallel to simple closed curves or arcs \Rightarrow 次の (1) が成り立つ。



1) (M, T) : a product sutured mfd. 特に γ の形は

2) $\exists P \subset (S^3 - \dot{N}(K))$: a planar surface, $\exists Q \subset (S^3)$: a sphere n.t.

$\cdot |K \cap Q| = \mu > 0$, $\cdot P \cap \partial N(K)$: a union of $\nu (> 0)$ coherently oriented longitudes,

$\cdot \lambda = \partial P - \partial N(K)$: a simple closed curve n.t. $|K \cap Q| \leq \mu - 2$

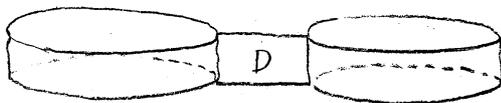
\cdot no component of $P - Q$ is a disk F with $\bar{F} \cap Q$ connected

Q 5 Lemma 4.24 のようにとる

Proof (of very special case.) $E = \{A_1, \dots, A_m\}$: boundary sutures

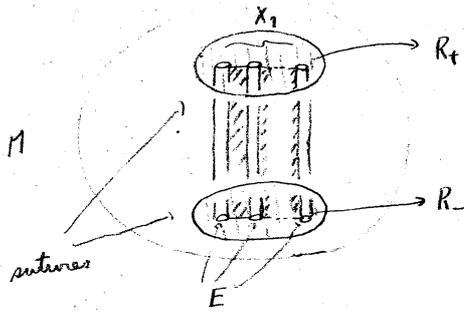
E の元の間には次の relation \sim T 生成 \leq 成る equivalence relation を Λ

成る: $A_i \sim A_j \Leftrightarrow \exists D$ a rectangle of $Q \cap M$ (D.t.) $\setminus D \cap A_i \neq \emptyset, D \cap A_j \neq \emptyset$



X_1, \dots, X_t 上の equivalence class. 1) また $t=1$ の時に Lemma を証明する
 事にする. 結論 1) が成り立ち 1) とすると

" $|Z_i \cap \Gamma| = 2 \Rightarrow Z_i \cap (\Gamma - E) = \emptyset$, or $Z_i \neq D^2$ " (注: $Z_i \cap E \neq \emptyset$) とする.
 See 4.24.

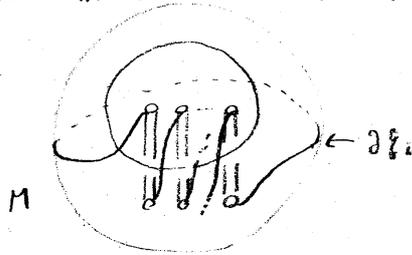


R_\pm : component of $R(\Gamma)$ を左のように定
 める。

1) また K を 0-framed surgery した mfd. が
 lens space 成分を含まない事より ∂Z_i

が E と $\Gamma - E$ を交互に渡るような disk Z_i は存在しない。即ち

$\# Z_i$: disk o.t.



D_\pm : the disk R_\pm reduced in size to eliminate trivial intersections with Q (?)

とすると, 従って, $|Z_i \cap \partial D_+| + |Z_i \cap \partial D_-| \leq 2 (|\partial Z_i \cap \partial \Gamma|/4 - \chi(Z_i))$

従って Lemma 4.24 より $\sum |Z_i \cap \partial D_+| + \sum |Z_i \cap \partial D_-| \leq 2 \sum (|\partial Z_i \cap \partial \Gamma|/4 - \chi(Z_i))$

$\leq 2|\partial \Gamma| - 2 = 2(\mu - 1)$. 故に $D_+ \cap M$ または $D_- \cap M$ が 成り立つ P.

一般の場合については, Gabai [G2] 参照.

§6.

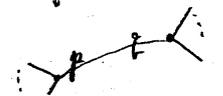
条件を全て満たす

Lemma 6.1. S^2 上には, 次のような (labell付) グラフは存在しない

1). $\mu \neq 0$, even) 個の edges が集まる vertex w は m ($0 \leq m \leq \mu - 2$) 個の edges が集まる

2) valency μ vertex から出る edges は, 時計方向に $1, 2, \dots, \mu$ と 1)

う labeling がなされる。113。

3)  一つの edge の両端に label がつけられる時、その一方は偶数、他方は奇数。

4) D : the closure of a comp. of $S^2 - G$ which is a disk, $D \cap M = \emptyset$ この時 $\partial D \cap G$, 7 edge の label を読んでゆくとき $(j, j-1, j, j-1, \dots, j, j-1) \pmod{\mu}$ という形になる。

証明略。

§7. Proof of Theorem

Step 1. 3.6 より $(S^2 - \overset{\circ}{N}(K), \partial N(K))$ から始まる sutured mfd. decomp. の seq. を得る。

Step 2. 4.20, Step 1 より $S^2 - \overset{\circ}{N}(K)$ 内の finite depth lamination L を得る。 L が $S^2 - \overset{\circ}{N}(K)$ の foliation \mathcal{F} に拡張したことを得る。この時 5.1 の結論 2) が成立して P, Q が存在する。とこが 6.1 よりそのように P, Q は存在しないう事になる。従って L は常に foliation \mathcal{F} に拡張する。

References.

- [G 1] D. Gabai "Foliations and the topology of 3-mfds", J. Diff. Geom. 18(1983), 445~503
- [G 2] ——— "Foliations and the topology of 3-mfds II", preprint.
- [H] J. Hempel, 3-mfds., Ann. Math. Studies 86.
- [T] W. Thurston, "Norm on the homology of 3-mfds" preprint