数理解析研究所講究録
第 578 巻 1985 年 1-20

無限階微分方程式の局所可解性

九大 理 石村隆一

ISHIMURA, Ryuichi

0. 序

X を $\mathbb{C}^n$ の開集合, x_0 を X の点とし, x_0 における正則函数の芽の全体を $\mathcal{O}_{x_0}$, X 上の正則函数の層を $\mathcal{O}_X$ と書く. 層準同型 $P : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ のうちで《連続》なものは局所作用素として特徴づけられる([5]): P は無限階微分作用素 $P(x, D_x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} a_\alpha(x) D_x^\alpha$, $a_\alpha(x) \in \mathcal{O}(X)$ の形であって, 表象 $p(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ は $X \times \mathbb{C}^n$ で正則かつ, $x \in X$ について一様に, ξ についての整函数として指数型 0 である i.e. X の任意のコンパクト集合 K に対し, $\overline{\lim_{r \to \infty}}\, r^{-1} \ln \sup_{x \in K, |\xi| = 1} |p(x, r\xi)| = 0$.

ここでは先ずもう少し一般的に, 連続な線型写像 $P : \mathcal{O}_{x_0} \to \mathcal{O}_{x_0}$ とは何か, ということを考えることから始め, それがやはり無限階の微分作用素の形になることを見る. さて, 一方無限階の微分方程式

(0) $\qquad P(x, D_x) u = \sum a_\alpha(x) D_x^\alpha u = f \qquad (u, f \in \mathcal{O}_{x_0})$

について, その重要性と歴史については青木[1]に記されているが, そこにあるように, 何れの場合も従来は定数係数の場合が殆んどであった.

しかし，変数係数の場合についてごく最近になって，[6]で扱ったようないくつかの型の方程式や，代数的に特殊な型で，かつ有限指数をもつ（青木－柏原－河合[3]）作用素で定義された方程式については，(0)の局所可解性が証明されるようになってきた。ここでは，前記のような拡張された無限階微分作用素について，微分方程式(0)の局所可解性を考える。以下では $x=0$ として考えることにする。

1. 一点における微分作用素

先ず記号を準備する：$\xi, \eta \in \mathbb{C}^n$ に対し，次のように書く。

$$\xi \cdot \eta = (\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2, \cdots, \xi_n\eta_n) \quad ,$$

$$\vec{\xi}^{\,-1} := (\xi_1^{-1}, \xi_2^{-1}, \cdots, \xi_n^{-1}) \quad \text{但し} \quad \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \neq 0 ,$$

$$\overrightarrow{|\xi|} := (|\xi_1|, |\xi_2|, \cdots, |\xi_n|) \quad . \quad \text{ここで} \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \text{ etc.}$$

また，$r, s \in \mathbb{R}_+^n$ に対し，$r \le s$ とは $r_1 \le s_1, r_2 \le s_2, \cdots, r_n \le s_n$ ということであり，$r << s$ と書いたら $r_1 < s_1, r_2 < s_2, \cdots, r_n < s_n$ を意味する。$\vec{e} := (1, 1, \cdots, 1)$ とおく。$r >> 0$ に対し，原点中心の多重円板 $\Delta_r := \{x \in \mathbb{C}^n \mid |x_1| < r_1, |x_2| < r_2, \cdots, |x_n| < r_n\}$ と書き，$\|f\|_r := \sup_{x \in \Delta_r} |f(x)|$ として $H_r^\infty := \{f \in \mathcal{O}(\Delta_r) \mid \|f\|_r < +\infty\}$ とおけば，これはノルム $\|\cdot\|_r$ で Banach 空間になる。すると (DFS) 空間として $\mathcal{O}_0 = \varinjlim_r H_r^\infty$ である。さて，$P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ を連続な線型写像として $\forall \mu \in \mathbb{Z}_+^n$ に対し，

(1) $$b_\mu(x) = P\left(\frac{x^\mu}{\mu!}\right)$$

とおく。以下 $P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ は連続線型写像とする。

補題 1. 増加函数 $s : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$ があって、任意の $r \in \mathbb{R}_+^n$ に対し、P は連続線型写像（P と書く）：$H_r^\infty \to H_{s(r)}^\infty$ を定める。

（証明）. H_r^∞ での単位球を B_r で表わすと、B_r は $\mathcal{O}_0 = \varinjlim_{t} H_t^\infty$ の有界集合。従って任意の $r >> 0$ に対し $s = s(r) \in \mathbb{R}_+^n$ があって、PB_r は $H_{s(r)}^\infty$ の中に含まれてそこで有界（小松 [9]，定理 (IV.3.28))：定数 $C_r > 0$ があって、

(2) $$PB_r \subset C_r B_{s(r)} .$$

B_r は H_r^∞ で吸収的だから、結局 $P : H_r^\infty \to H_{s(r)}^\infty$ で P は連続。かつ明らかに s は増加函数としてよい。（証終）。

特に、ある $s_0 \in \overline{\mathbb{R}_+}^n$ があって、各 $b_\mu(x) \in H_{s_0}^\infty \subset \mathcal{O}(\Delta_{s_0})$。但し、$\overline{\mathbb{R}_+} :=]0, \infty]$. また明らかに $P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ は $f \mapsto \sum_\mu b_\mu(x) D_x^\mu f(0)$：$H_r^\infty \to H_{s(r)}^\infty$ で定義されるとしてよい：実際 $f \in H_r^\infty$ に対し、その Taylor 展開 $f(x) = \sum_\mu \frac{x^\mu}{\mu!} D_x^\mu f(0)$ を考えればよい。

(2)より、$\|Pf\|_{s(r)} \leq C_r \|f\|_r$ であるから、特に各 μ に対し、

(3) $$\|b_\mu\|_{s(r)} \leq C_r \frac{r^\mu}{\mu!} \qquad (\forall r >> 0) .$$

さて、そこで $x \in \Delta_{s_0}$ と $\xi \in \mathbb{C}^n$ に対し、形式的に $Q(x, \xi) := \sum_\mu b_\mu(x) \xi^\mu$ とおこう。この時、

補題 2. $Q(x, \xi)$ は $\Delta_{s_0} \times \mathbb{C}^n$ で正則で、各 $x \in \Delta_{s_0}$ に対して、ξ の整函数として階数 ≤ 1 である。更に associated order ρ と associated type σ の組で $\rho \leq \vec{e}$, $\sigma << (+\infty, +\infty, \cdots, +\infty)$ となるものがある。即ち $Q(x, \cdot)$ は指数型である。

注意. associated order ρ と associated type σ の組 (ρ, σ) を associated category と呼ぶ. 以上の用語については Ронкин [13] 参照.

(証明) 実際, (3) より, $x \in \Delta_{\delta(r)}$ として,

$$|Q(x, \zeta)| \leq \sum_{\mu} \|b_\mu\|_{\delta(r)} |\vec{\zeta}|^\mu \leq C_r \sum_{\mu} \frac{r^\mu}{\mu!} |\vec{\zeta}|^\mu$$

$$= C_r \exp\langle r, |\vec{\zeta}|\rangle \leq C_r \exp |r| \cdot |\zeta| \qquad \text{(証終)}$$

この補題を念頭に, 今 $Q(x, \zeta) = \sum_{\mu} b_\mu(x) \zeta^\mu$ は 各 $x \in \Delta_{\delta_0}$ に対し associated category $\leq (\vec{e}, \sigma(x))$ をもつとしよう. 但し, $\sigma(x) = (\sigma_j(x)) \gg 0$. 即ち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $A_\varepsilon > 0$ があって,

$$\left|\sum_{\mu} b_\mu(x) \zeta^\mu\right| = |Q(x, \zeta)| \leq A_\varepsilon \exp\langle \varepsilon \vec{e} + \sigma(x), |\vec{\zeta}|\rangle .$$

従って任意の $R \gg 0$ に対し, Cauchy の評価式から

$$|b_\mu(x)| \leq A_\varepsilon e^{\langle \varepsilon \vec{e} + \sigma(x), R\rangle} R^{-\mu},$$

ここで $R := (\varepsilon e + \sigma(x))^{-1} \cdot \mu$ とおけば,

$$|b_\mu(x)| \leq A_\varepsilon \frac{e^{|\mu|}}{\mu_1^{\mu_1} \mu_2^{\mu_2} \cdots \mu_n^{\mu_n}} (\varepsilon \vec{e} + \sigma(x))^\mu$$

となる. 従って

$$\sup_{\mu} |b_\mu(x)| \mu! \, s^\mu < +\infty \qquad \text{for every } s \ll (\varepsilon \vec{e} + \sigma(x))$$

であり, $\varepsilon > 0$ は任意だから, 結局 for $s \ll \sigma(x)$ で成立つ。従って

$$\rho : H_r^\infty \to \mathcal{O}(\{x \in \Delta_{\delta_0} \mid \sigma(x) \ll r\}) \quad \text{連続}$$

で また任意の $r \gg \sigma(x)$ に対し 定数 $C_r > 0$ があって

(3)' $$|b_\mu(x)| \leq C_r \frac{r^\mu}{\mu!} \qquad (\forall \mu).$$

ここで我々は 正則パラメータ $x \in \Delta_{\delta_0}$ をもつ ζ の整函数 $P = \sum_\alpha a_\alpha(x) \zeta^\alpha$ を

(4) $$P(x, \zeta) := Q(x, \zeta) \exp(-\langle x, \zeta\rangle)$$

と定義する．これは各 α に対し，

(4)′ $$a_\alpha(x) = \sum_{\mu\le\alpha} \frac{b_\mu(x)}{(\alpha-\mu)!}(-x)^{\alpha-\mu}$$

と云ってもよい．$P(x,\zeta)$ は ζ について指数型である．

<u>注意</u>．逆に各 μ に対し次の逆公式を得る：

(4)″ $$b_\mu(x) = \sum_{\alpha\le\mu} \frac{a_\alpha(x)}{(\mu-\alpha)!} x^{\mu-\alpha}\ .$$

以上のことより，次の定理を得る：

<u>定理</u> 1．連続線型写像 $P:\mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ に対し，$b_\mu(x) := P\left(\frac{x^\mu}{\mu!}\right)$ とおくと，$\rho_0 >\!> 0$ があって $Q(x,\zeta) = \sum_\mu b_\mu(x)\zeta^\mu$ は $x\in\Delta_{\rho_0}$ と $\zeta\in\mathbb{C}^n$ の正則函数で，各 $x\in\Delta_{\rho_0}$ に対し，ζ の整函数として指数型である．そこでその associated category $\le(\vec{e},\sigma(x))$ なるものがあって，$\sigma(x) = (\sigma_j(x))_{1\le j\le n}$ として各 $\sigma_j(x)$ は x について上半連続とする．この時 P は任意の $r >\!> 0$ に対し，$P:\mathcal{O}(\Delta_r) \to \mathcal{O}(\{x\in\Delta_{\rho_0} \mid \sigma(x) <\!< r\})$ なる連続写像であり，かつ作用素：$\mathcal{O}(\Delta_r) \to \mathcal{O}(\{x\in\Delta_{\rho_0} \mid \sigma(x)+2\vec{|x|} <\!< r\})$ として微分作用素 $P(x,D_x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ の形である．

（証明）．まず各 $\sigma_j(x)$ は上半連続として構わないことは，かわりに $\limsup_{\eta\to 0}\sup_{|x-y|<\eta} \sigma_j(y)$ なる函数を考えればよいから明らか．そこで，各 α に対し (4)′ 及び (3)′ から，任意の $\rho >\!> \sigma(x)$ に対し，

$$|a_\alpha(x)| \le \sum_{\mu\le\alpha} \frac{\vec{|x|}^{\alpha-\mu}}{(\alpha-\mu)!}|b_\mu(x)| \le C_\rho \sum_{\mu\le\alpha} \frac{\vec{|x|}^{\alpha-\mu}}{(\alpha-\mu)!}\cdot\frac{\rho^\mu}{\mu!}$$
$$= C_\rho \frac{1}{\alpha!}(\rho+\vec{|x|})^\alpha\ .$$

次に，各 $f\in H_r^\infty$ と各 $x\in\Delta_{\rho_0}$ で $\sigma(x)+2\vec{|x|} <\!< r$ なるものに対し，

$$|D_x^\alpha f(x)| \leq \|f\|_r (r-|\vec{x}|)^{-\alpha}\alpha!$$

だから，結局

$$\sum_\alpha |a_\alpha(x) D_x^\alpha f(x)| \leq C_\rho \|f\|_r \sum_\alpha \frac{(\rho+|\vec{x}|)^\alpha}{(r-|\vec{x}|)^\alpha} < +\infty$$

が $\rho+|\vec{x}| \ll r-|\vec{x}|$ の時，従って $\sigma(x)+2|\vec{x}| \ll r$ の時成立つ．

次に，$\bar{P} := \sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha$ とおけば，それはすぐわかるように連続写像 $: \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ となる．特に $f := 1$ と取れば，$\bar{P}f = a_0 = b_0 = Pf$．

また $f := x^m/m!$ と取れば帰納法で

$$\bar{P}\left(\frac{x^m}{m!}\right) = \frac{1}{m!}\sum_{\alpha \leq m} a_\alpha(x) \frac{m!\, x^{m-\alpha}}{(m-\alpha)!} = b_m(x) = P\left(\frac{x^m}{m!}\right).$$

従って連続性から $P = \bar{P}$ 即ち $P = \sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha$ である．（証終）．

<u>系</u>． $Q(x,\xi)$ はある $\sigma \gg 0$ に対し，associated category $\leq (\vec{e}, \sigma|\vec{x}|)$ をもつとしよう．すると，$P : \mathcal{O}(\Delta_r) \to \mathcal{O}(\Delta_{\sigma^{-1}\cdot r})$ (for every $r \gg 0$) であり，かつ P は作用素 $: \mathcal{O}(\Delta_r) \longrightarrow \mathcal{O}(\Delta_{(2\vec{e}+\sigma)^{-1}\cdot r})$ として微分作用素 $P(x, D_x) = \sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha$ の形である．

<u>注意</u>． 以上より，結局，層準同型を与えないような無限階微分作用素の表象は，簡単の為 $n=1$ として，階数 1，正規型ということになる．

<u>2．例</u>

ここでは，$r \gg 0$ に対し，$r^{\frac{1}{2}} = (r_1^{\frac{1}{2}}, r_2^{\frac{1}{2}}, \cdots, r_n^{\frac{1}{2}})$ と書く．

1°　$\sigma(x) = \sigma \cdot |\vec{x}|^{\frac{1}{2}}$　*with* $\sigma \gg 0$ ．

この場合，

$$P: f(x) \mapsto \sum_m b_m(x) D_x^m f(0) : \mathcal{O}(\Delta_r) \to \mathcal{O}(\Delta_{r^2}) \quad (r \gg 0)$$

かつ，

$$\sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha : \mathcal{O}(\Delta_r) \to \mathcal{O}(\Delta_{\frac{-\sigma+\sqrt{\sigma^2+8r}}{4}}) .$$

2° $\sigma(x) = \sigma \cdot |\vec{x}|^{\frac{1}{2}} - 2|\vec{x}| \quad (\sigma \gg 0)$.

この時，

$$P : \mathcal{O}(\Delta_r) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \qquad \text{if } r \ll \frac{\sigma}{\sqrt{8}}$$

$$P : \mathcal{O}(\Delta_r) \longrightarrow \mathcal{O}(\Delta_{\frac{\sigma-\sqrt{\sigma^2-8r}}{4}}) \qquad \text{if } r \geqq \frac{\sigma}{\sqrt{8}}$$

かつ

$$\sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha : \mathcal{O}(\Delta_r) \to \mathcal{O}(\Delta_{\sigma-2r^2}) .$$

3° $\sigma(x) \equiv 0$.

この時， $Q(x,\xi) \equiv$ const. ; $\equiv 1$ としよう． すると， $P(x,\xi) = \exp(-\langle x,\xi\rangle)$

$$P : f(x) \mapsto f(0) \ : \mathcal{O}(\Delta_r) \longrightarrow \mathbb{C}$$

となる．また実際

$$\sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha f(x) = \sum_\alpha \frac{(-x)^\alpha}{\alpha!} D_x^\alpha f(x) = f(0) .$$

4° $P(x,\xi)$ が ξ について 指数型 0 の時．

この 時， $Q(x,\xi) = e^{\langle x,\xi\rangle} P(x,\xi)$ は associated category $(\vec{e}, |\vec{x}|)$ をもつ．

3. 無限階微分方程式

さて，以下では $Pu = f$ の $x=0$ での局所可解性，即ち， $P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ の全射性を考えることにする．これからは， ρ, R, r などはスカラーを表わすとする．

さて，$\mathbb{C}^n$上の$\{0\}$に関する正則超函数の全体（S.K.K.［14］）

$$\mathcal{B}^\infty_{\{0\}|\mathbb{C}^n} = \mathcal{H}^n_{\{0\}}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = \Big\{u=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} u_\alpha \delta^{(\alpha)}(x) \;\Big|\; \sum_\alpha u_\alpha \zeta^\alpha \text{ は指数型0の整函数}\Big\}$$

は（FS）空間であるが，ここでは次のことにだけ注意しておく：

(5) $$x^\beta\delta^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} (-1)^{|\beta|}\dfrac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}\,\delta^{(\alpha-\beta)}(x) & (\beta\le\alpha) \\ 0 & (\beta\not\le\alpha) \end{cases}$$

更にそれは次の内積によって（DFS）空間$\mathcal{O}_0$に双対な（FS）空間と同一視される：任意の$f=\sum_\gamma f_\gamma x^\gamma\in\mathcal{O}_0$と$u=\sum u_\alpha\delta^{(\alpha)}(x)\in\mathcal{B}^\infty_{\{0\}|\mathbb{C}^n}$に対し，

(6) $$\langle f,u\rangle = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|}\alpha!\, f_\alpha u_\alpha \qquad (\text{K.K.［7］}).$$

さて，$\mathcal{O}_0$を更にその各元のTaylor展開の係数の成す空間

$$E := \Big\{\varphi=(\varphi_m)_{m\in\mathbb{Z}_+^n} \;\Big|\; \sum_m \varphi_m \frac{x^m}{m!}\in\mathcal{O}_0\Big\}$$

と同一視する i.e. $f\mapsto (D^m f(0))_m : \mathcal{O}_0 \xrightarrow{\sim} E$．その位相を一応書いておこう：$\varphi=(\varphi_m)_{m\in\mathbb{Z}_+^n}\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+^n}$に対し，norm

$$\|\varphi\|_\rho := \sup_m |\varphi_m|\,\rho^{-|m|}(m!)^{-1} \qquad (\rho>0)$$

とおき Banach空間 $E_\rho := \{\varphi=(\varphi_m) \mid \|\varphi\|_\rho<+\infty\}$と定義して

$$E \simeq \varinjlim E_\rho = \{\varphi=(\varphi_m)\mid \rho>0\text{が存在して } \|\varphi\|_\rho<+\infty\}.$$

（DFS）空間として$\mathcal{B}^\infty_{\{0\}|\mathbb{C}^n}\simeq E' = \{\psi=(\psi_m)\mid$ 任意の$\rho>0$に対し，$\|\psi\|'_\rho := \sup_m|\psi_m|\,\rho^{|m|}m! < +\infty\}$となり，$E'$の位相はsemi-normの系$(\|\cdot\|'_\rho)_{\rho>0}$で与えられる．そして，$E$と$E'$の双対性は$\langle\varphi,\psi\rangle := \sum\varphi_m\psi_m$で与えられる．同一視$\mathcal{B}^\infty_{\{0\}|\mathbb{C}^n}\xrightarrow{\sim}E'$は<u>Fourier-Borel変換</u>であり，それを$\mathcal{F}$と書けば，$\mathcal{F}$は次のように表わされる．但し，ここでE'は

指数型0の整函数の空間 $\{\sum_m \varphi_m z^m \mid \varphi=(\varphi_m)\in E'\}$ と同一視する:

(7) $$\mathfrak{F}(u)(z) = \langle e^{\theta\cdot z}, u(\theta)\rangle \qquad (z\in\mathbb{C}^n).$$

そこで転置写像 ${}^tP : \mathcal{B}^\infty_{\{0\}|\mathbb{C}^n} \longrightarrow \mathcal{B}^\infty_{\{0\}|\mathbb{C}^n}$ は

$$ {}^tPu = {}^tP(x,D_x)u = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_\alpha(x)u(x)) = \sum_m (-1)^{|m|}\langle b_m, u\rangle \delta^{(m)}(x)$$

で与えられるから, ${}^tP : E'\longrightarrow E'$ と思ってみれば,

(7)' $$\mathfrak{F}({}^tPu) = P(D_z, z)(\mathfrak{F}u)(z) := \sum_\alpha z^\alpha a_\alpha(D_z)(\mathfrak{F}u)(z).$$

さて, 同一視 $\mathcal{O}_0 \simeq E$ によって $P:\mathcal{O}_0\to\mathcal{O}_0$ はどうなるか見る: 各αに対し, $a_\alpha(x)=\sum_\beta a_\alpha^\beta x^\beta$ と展開する. 任意の $f=\sum f_\alpha x^\alpha\in\mathcal{O}_0$ に対し,

$$Pf(x) = \sum_m b_m(x) D^m f(0) = \sum_m \Big(\sum_{\alpha\le m}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\sum_\beta a^\beta_{m-\alpha}x^\beta\Big) D^m f(0)$$
$$= \sum_\gamma \Big(\sum_m \gamma! \sum_{\alpha\le\gamma,m}\frac{a^{\gamma-\alpha}_{m-\alpha}}{\alpha!} D^m f(0)\Big)\frac{x^\gamma}{\gamma!}$$

ここで $C^\gamma_m := \gamma! \sum_{\alpha\le\gamma,m}\frac{a^{\gamma-\alpha}_{m-\alpha}}{\alpha!}$ とおけば

$$= \sum_\gamma \Big(\sum_m C^\gamma_m D^m f(0)\Big)\frac{x^\gamma}{\gamma!}.$$

即ち, P に対し, その特性《行列》 $C_P := (C^\gamma_m)_{(m,\gamma)\in\mathbb{Z}_+^n\times\mathbb{Z}_+^n}$ とおけば, $\mathcal{O}_0\simeq E$ の下 P は C_P と同一視される:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_0 \arrow[r, "P"] & \mathcal{O}_0 \\ E \arrow[u, phantom, "\wr"] \arrow[r, "C_P"] & E \arrow[u, phantom, "\wr"] \\ (\varphi_m) \arrow[u, phantom, "\in"] \arrow[r, mapsto] & \big(\sum_m C^\gamma_m\varphi_m\big)_\gamma \arrow[u, phantom, "\in"] \end{tikzcd}$$

また

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}^\infty_{\{0\}|\mathbb{C}^n} \arrow[r, "{}^tP"] & \mathcal{B}^\infty_{\{0\}|\mathbb{C}^n} \\ E' \arrow[u, phantom, "\wr"] \arrow[r, "{}^tC_P"] & E' \arrow[u, phantom, "\wr"] \\ (\psi_\gamma) \arrow[u, phantom, "\in"] \arrow[r, mapsto] & \big(\sum_\gamma C^\gamma_m\psi_\gamma\big)_m \arrow[u, phantom, "\in"] \end{tikzcd}.$$

さて, $P:\mathcal{O}_0\to\mathcal{O}_0$ が全射である為の必要十分条件は次の2つが同時に成立つことである:

(i) ${}^tC_P : E'\longrightarrow E'$ は単射.

(ii) 像 $C_P(E)$ は E で閉である.

(DFS)空間と(FS)空間の双対性においては閉値域の定理が成立つ(小松[9])から，(ii)は更に次と同値である：

(ii)' 像 ${}^tC_P(E')$ は E' で閉である．

そこで，まず(i)が成立たねばならないから《行列》C_P は，その形の見易いものを扱うことになる．C_P の形次第で(i)又は(ii)'を考える：

例 I. C_P が《上三角行列》になる：

$P=P(x,D_x)=\sum_\alpha a_\alpha(x)D_x^\alpha$ は係数 $a_\alpha(x)$ が α《階》以下の多項式である時，Коровейник型と云おう．これは Коровейник [10] がこの型の作用素を最初に扱ったことによる： $a_\alpha(x)=\sum_{\beta\le\alpha} a_\alpha^\beta x^\beta$.

注意．但し，[10]では $n=1$，$a_0\equiv1$，$a_\alpha=\sum_{\beta<\alpha}a_\alpha^\beta x^\beta$ を扱っており，かつ考える方程式 $Pu=f$ で u と f は整函数．

さて，この時には，

$$C_m^\gamma = \begin{cases} \gamma!\sum_{\alpha\le\gamma}\dfrac{a_{m-\alpha}^{\gamma-\alpha}}{\alpha!} & (\gamma\le m)\\ 0 & (\gamma\not\le m)\end{cases}$$

と C_P は《上三角行列》．従って各対角成分 $C_m^m\ne0$ とすれば，${}^tC_P:E'\to E'$ は単射である．特に，P が定数係数 $\sum_\alpha a_\alpha D_x^\alpha$ の時は，

$$C_P=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ & & a_0 & a_1 & \cdots \\ & 0 & & a_0 & \cdots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

例 II. C_P が《下三角行列》になる：

$P=P(x,D_x)=\sum_\alpha a_\alpha(x)D_x^\alpha$ は各係数 $a_\alpha(x)$ が $=x^\alpha\tilde a_\alpha(x)$ の形の

時，確定特異型であるという．この場合，

$$C^{\gamma}_{\mu} = \begin{cases} 0 & (\gamma \neq \mu) \\ \gamma! \sum_{\alpha\leq\mu} \frac{a^{\gamma-\alpha}_{\mu-\alpha}}{\alpha!} & (\gamma \geq \mu) \end{cases}$$

と C_P は《下三角行列》．従って対角成分 $C^{\mu}_{\mu} \neq 0$ ($\forall\mu$) とすれば，$\psi\in E$ に対し，$C_P(\varphi_\mu) = \psi$ は一意な形式解 $\varphi = (\varphi_\mu)$ を持つ．

特に，$P = \sum a_\alpha x^\alpha D_x^\alpha$ の形の時，P は Euler 型であるという．この時

$$C_P = \begin{bmatrix} a_0 & & & & \\ & 1!\left(\frac{a_0}{1!}+a_1\right) & & 0 & \\ & & 2!\left(\frac{a_0}{2!}+\frac{a_1}{1!}+a_2\right) & & \\ & 0 & & 3!\left(\frac{a_0}{3!}+\frac{a_1}{2!}+\frac{a_2}{1!}+a_3\right) & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

例えば定数係数 $P = \sum a_\alpha D_x^\alpha$ の場合を振返ってみよう (cf. 河合 [8]，Martineau [12])．$\chi = (\chi_\mu) \in E'$，$\psi = (\psi_\mu) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ として，${}^tC_P\,\psi = \chi$ が形式的に成立つとすると，$\chi_\mu = \sum_{\gamma\leq\mu} a_{\mu-\gamma}\psi_\gamma$ ($\forall\mu$) となるが，これは，$X(\zeta) := \sum_\mu \chi_\mu \zeta^\mu$，$\Psi(\zeta) := \sum_\mu \psi_\mu \zeta^\mu \in \mathbb{C}[[\zeta]]$ とおいて (但し，$X(\zeta)$ は指数型 0 の整函数)，$X(\zeta) = P(\zeta)\Psi(\zeta)$ ということ．従って，$P\neq 0$ なら ${}^tC_P$ は単射である．さて，$P(\zeta)$ は指数型 0 としよう．次の Harnack 型の補題は基本的である：

補題 3．(Hörmander [4])．$A, B, R > 0$ とし，$F(z), G(z)$，$F(z)/G(z)$ を $B_R := \{z\in\mathbb{C} \mid |z| < R\}$ 上の (一変数) 正則函数で，$|G(0)| \neq 0$ かつ $|F(z)|$ と $|G(z)|$ は B_R 上で夫々 A, B で上からおさえ

られるとする: $\sup_{B_R} |F(z)| \le A$, $\sup_{B_R} |G(z)| \le B$.
この時, B_R 上で

$$\left|\frac{F(z)}{G(z)}\right| \le A \cdot B^{\frac{2|z|}{R-|z|}} |G(0)|^{-\frac{R+|z|}{R-|z|}}.$$

そこで, E'の列 (φ^k) と (χ^k) で E' で $\chi_k \to \chi$ $(k\to\infty)$ なるものに対し, ${}^tC_P \varphi^k = \chi^k$ であるとすると, この補題から, $(\Phi^k(z))$は $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ での正規列となり, ある部分列$(\Phi^{k_j}(z))$があって ある $\Phi(z)$ に $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ 内で収束する. そこでもう一度この補題を使って $\Phi(z) \in E'$ がいえる. i.e. 対応する $\varphi = (\varphi_\mu) \in E'$ で 結局 (5)' がいえる.

4. Коровейник 型作用素の全射性.

$P = \sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha = \sum_\alpha \sum_{\beta\le\alpha} a_\alpha^\beta x^\beta D_x^\alpha$ を Коровейник 型 とすれば, 例I より C_P は 上三角行列である. そこで 次の定理を証明する:

定理 2. 次の条件 (7), (8) の下 $P: \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ は全射である:

(7) $A_0 > 0$ 及び $r_0 \in]0,1[$ が存在して, 各 μ に対し,

$$|C_\mu^\mu| \ge A_0 r_0^{|\mu|}.$$

(8) $r \in]0, r_0[$ が存在し, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $A > 0$ があって,

$$|C_\mu^\lambda| \le A \frac{\lambda!}{\mu!} \varepsilon^{|\mu-\lambda|} r^{|\lambda|} \qquad (\text{for } \lambda < \mu).$$

また

定理 3. 次の条件 (9), (10) の下 $P: \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ は全射である:

(9) 任意の $A_0 > 0$ に対し, $m_0 > 0$ があって, $|\mu| \ge m_0$ ならば

$$|C_\mu^\mu| \ge A_0.$$

(10) 任意の $\varepsilon>0$ に対し，$A_\varepsilon>0$ があって，

$$|C_\mu^\lambda| \leq A_\varepsilon \frac{\lambda!}{\mu!} \varepsilon^{|\mu-\lambda|} \qquad (\text{for } \lambda<\mu).$$

（定理２の証明）．(7) より 各 $C_\mu^\mu \neq 0$ であるから (i) は O.K. 次に，

(ψ^k), $(\chi^k) \subset E'$, $\chi^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \chi$ in E' かつ

(11) $\qquad {}^tC_p \psi^k = \chi^k \qquad (\text{for every } k)$

とする．ここで簡単の為 $\psi^{kk'} := \psi^k - \psi^{k'}$, $\chi^{kk'} := \chi^k - \chi^{k'}$ とおくと，(11) は，

$$(12) \qquad \begin{cases} \psi_0^{kk'} = \dfrac{\chi_0^{kk'}}{C_0^0} \\ \psi_\mu^{kk'} = \dfrac{1}{C_\mu^\mu}\left(\chi_\mu^{kk'} - \sum\limits_{\lambda<\mu} C_\mu^\lambda \psi_\lambda^{kk'}\right) \qquad (\mu>0) \end{cases}$$

となる．帰納法で任意の $R>0$ に対し，$B^{kk'}(R)>0$ で $k, k'\to\infty$ の時 0 に収束するものがあって，$\sup_\mu |\psi_\mu^{kk'}| R^{|\mu|} \mu! < B^{kk'}(R)$ となるものがあることを示そう：(12) と条件 (7)，(8) より，$|\mu|$ 十分大として

$$|\psi_\mu^{kk'}| R^{|\mu|} \mu!$$

$$\leq (|\chi_\mu^{kk'}| R^{|\mu|} \mu! + A \sum_{\lambda<\mu} \lambda!\, r_0^{-|\mu|} \varepsilon^{|\mu-\lambda|} r^{|\lambda|} R^{|\mu|} (\psi_\lambda^{kk'}|) A_0^{-1}$$

ここで $X^{kk'}(R) := A_0^{-1} \sup_\lambda |\chi_\mu^{kk'}| R^{|\lambda|} \lambda!$ とおけば $X^{kk'}(R) \to 0$ $(k, k'\to\infty)$.

$B^{kk'}(R) > 2X^{kk'}(R)$ ととっておけば，更に，$\varepsilon < rR^{-1}$ ととっておいて，

$$\leq X^{kk'}(R) + \frac{A}{A_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|\mu|} \sum_{\lambda<\mu} \left(\frac{\varepsilon R}{r}\right)^{|\mu-\lambda|} |\psi_\lambda^{kk'}| R^{|\lambda|} \lambda!$$

$$\leq X^{kk'}(R) + \frac{A}{A_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|\mu|} \frac{\frac{\varepsilon R}{r}}{(1-\frac{\varepsilon R}{r})^n} B^{kk'}(R)$$

$|\mu|$ 十分大とすれば

$$\leq X^{kk'}(R) + \frac{1}{2} B^{kk'}(R) < B^{kk'}(R).$$

かくして (ψ^k) は E' の Cauchy 列となり結局ある $\psi \in E'$ に収束する．

よって (ii) が証明された．（証終）．

（定理3の証明）．定理2の証明と同様にして，まず $\varepsilon < R^{-1}$ に対し，$A_0 > A\varepsilon \dfrac{2\varepsilon R}{(1-\varepsilon R)^n}$ ととって，対応する m に対し $|\mu| \geq m$ とすれば，

$$|\varphi_\mu^{RR'}| R^{|\mu|} \mu! \leq X^{RR'}(R) + \frac{A}{A_0} \sum_{\lambda < \mu} \lambda! \, \varepsilon^{|\mu - \lambda|} R^{|\mu|} |\varphi_\lambda^{RR'}|$$

$$= X^{RR'}(R) + \frac{A}{A_0} \sum_{\lambda < \mu} (\varepsilon R)^{|\mu - \lambda|} |\varphi_\lambda^{RR'}| R^{|\lambda|} \lambda!$$

$$\leq X^{RR'}(R) + \frac{A}{A_0} \frac{\varepsilon R}{(1-\varepsilon R)^n} B^{RR'}(R)$$

$$\leq X^{RR'}(R) + \frac{1}{2} B^{RR'}(R) < B^{RR'}(R)$$

となり，定理2と同様にして証明が終わる．（証終）．

5. 確定特異型作用素の全射性．

確定特異型の微分作用素 $P = \sum a_\alpha(x) D_x^\alpha = \sum x^\alpha \hat{a}_\alpha(x) D_x^\alpha$ に対しては，

定理 4．次の条件 (13)，(14) の下 $P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ は全（単）射：

(13) $r \in]0,1[$ 及び $C > 0$ があって，任意の μ に対し，

$$|C_\mu^\mu| \geq C r^{|\mu|}$$

(14) $\varepsilon_0 > 0$ が存在し，任意の $\delta > 0$ に対し $N > 0$ があって

$$|C_\mu^\gamma| \leq N \delta^{|\mu|} \varepsilon_0^{-|\gamma|} \frac{\gamma!}{\mu!} \qquad (\gamma > \mu).$$

（証明）．ここでは，任意の $f = \sum_\gamma f_\gamma x^\gamma \in \mathcal{O}_0$ に対し，$g = \sum_\gamma g_\gamma x^\gamma \in \mathcal{O}_0$ で $Pg = f$ なるものを見付けよう．即ち $\sum_{\mu \leq \gamma} C_\mu^\gamma \frac{\mu!}{\gamma!} g_\mu = f_\gamma$ i.e.

$$(15) \quad \begin{cases} g_0 = \dfrac{f_0}{C_0^0} \\[2ex] g_\gamma = \dfrac{1}{C_\gamma^\gamma} \left(f_\gamma - \displaystyle\sum_{\mu < \gamma} C_\mu^\gamma \frac{\mu!}{\gamma!} g_\mu \right) \qquad (\gamma > 0) \end{cases}$$

でなければならない．ここである $R > 0$ があって $|g_\gamma| \leq R^{|\gamma|}$ (for every γ) となることを帰納法で示そう：$M_\varepsilon := \sup_{\Omega_\varepsilon} |f(x)|$ とおくと，

$|f_\gamma| \le M_\varepsilon \varepsilon^{-|\gamma|}$. そこで (15) より.

$$|g_\gamma| \le r^{-|\gamma|}\left[M_\varepsilon \varepsilon^{-|\gamma|} + N \sum_{\mu<\gamma} \delta^{|\mu|} \varepsilon_0^{-|\gamma|} R^{|\mu|}\right]$$

$$= \left[M_\varepsilon (r\varepsilon R)^{-|\gamma|} + N \sum_{\mu<\gamma} (r\varepsilon_0 R)^{-|\gamma-\mu|} \left(\frac{\delta}{r\varepsilon_0}\right)^{|\mu|}\right] R^{|\gamma|}$$

$\delta < r\varepsilon_0$ (<1) かつ $R > \max[\delta^{-1}, 2\varepsilon^{-1} M_\varepsilon, (r\varepsilon_0)^{-1}]$ ととれば,

$\frac{\delta}{r\varepsilon_0} < 1$, $r\varepsilon_0 R < 1$ だから結局.

$$\le \left[\frac{1}{2} + N \sum_{\mu<\gamma} (r\varepsilon_0 R)^{-|\gamma-\mu|}\right] R^{|\gamma|}$$

$$\le \left(\frac{1}{2} + N (r\varepsilon R)^{-1} \left(\frac{1}{1-(r\varepsilon R)^{-1}}\right)^{n}\right) R^{|\gamma|}$$

が十分大きい $|\gamma|$ に対して成立つ. R 十分大 >0 なら結局

$$\le \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) R^{|\gamma|} = R^{|\gamma|}$$ となる. (証終)

6. Euler 型の方程式

Euler 型の微分作用素 $P = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha D_x^\alpha$ を考えよう. 先ず.

<u>命題</u> 1. $P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ が全射である為には, 次の条件が成立つことが必要十分である:

(16) $r \in]0,1[$ と $C > 0$ が存在して,

$$|C_m^m| \geqq C\, r^{|m|} \qquad (\text{for every } m).$$

(証明). $g = \sum_\gamma g_\gamma x^\gamma$, $f = \sum_\gamma f_\gamma x^\gamma \in \mathcal{O}_0$ に対し, $Pg = f$ とは

(17) $C_m^m g_m = f_m$ (for every m)

ということであるから何れにしても $C_m^m \neq 0$ である. 先ず (16) を仮定すれば, 任意の $\rho \gg 0$ と $f \in \mathcal{O}(\Delta_\rho)$ に対し, $g_m := f_m / C_m^m$ とおけば $g = \sum_m g_m x^m \in \mathcal{O}(\Delta_{r\rho})$ となりかつ $Pg = f$ である. 逆に, $P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ が

全射なる。例えば $f=\sum x^\mu \in \mathcal{O}(\Delta_{\vec{r}})$ に対し、$\exists g=\sum g_\mu x^\mu \in \mathcal{O}_0$ s.t. $Pg=f$ であるから、(17) より $g_\mu = {C_\mu^\mu}^{-1}$. そこで $g\in\mathcal{O}(\Delta_{\vec{r}_1})$ (但し、$\vec{r}_1:=(r_1,r_1,\dots,r_1)$ $(r_1>0)$) とすれば任意の $r\in]0,r_1[$ に対し、$C_r>0$ があって、$|C_\mu^\mu|^{-1}=|g_\mu|\le C_r^{-1} r^{-|\mu|}$. 従って $|C_\mu^\mu|\ge C_r r^{|\mu|}$. (証終)

注意 この時、$P:\mathcal{O}_0\to\mathcal{O}_0$ は全単射である。

系. $a_0\neq 0$ かつ 各 $a_\alpha \geq 0$ とする時、Euler の微分作用素 $P=\sum a_\alpha x^\alpha D_x^\alpha$ は (16) を満たす。従って $P:\mathcal{O}_0\to\mathcal{O}_0$ は全単射である。

(証明) 実際 $C_\mu^\mu = \mu! \sum_{\alpha\le\mu} \frac{a_\alpha}{(\mu-\alpha)!} \geq a_0 >0$ である。

以下では $P=\sum a_\alpha x^\alpha D_x^\alpha : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ は Euler 型の連続層準同型とする。上のことより $x=0$ においては $P:\mathcal{O}_0\to\mathcal{O}_0$ の全射性はわかった。また $x^0\in\mathbb{C}_x^n$ (但し $\mathbb{C}_x:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$) なる点においては変数変換

(18) $\qquad x_1=e^{t_1},\ x_2=e^{t_2},\ \dots,\ x_n=e^{t_n}$

を行えば

(19) $\qquad x^\alpha D_x^\alpha = \prod_{j=1}^n D_{t_j}(D_{t_j}-1)\cdots(D_{t_j}-(\alpha_j-1))$

であるから定数係数の場合の結果 (Martineau [12] cf. Kawai [8]) より、$P:\mathcal{O}_{x^0}\to\mathcal{O}_{x^0}$ は全射である。また、更に次の定理がわかる：

定理 5. $P=\sum a_\alpha x^\alpha D_x^\alpha$ を Euler 型の局所作用素とすれば、$P:\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ は全射な線型写像である。

(証明) 実際 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$, $\varepsilon_j=\pm1$ として、

$$U_\varepsilon := \{x \in \mathbb{C}^n \mid \varepsilon_j \mathrm{Im}\, x_j > 0 \quad (j=1,2,\cdots,n)\}$$

とおくと，$P : \mathcal{O}(U_\varepsilon) \to \mathcal{O}(U_\varepsilon)$ は全射である．それは実際，U_ε において $t_j = \log x_j$ $(1 \le j \le n)$ と変数変換して，P は定数係数の微分作用素に変換されるが，この時 U_ε は開凸領域

$$\prod_{j=1}^{n} \{t_j \in \mathbb{C} \mid \tfrac{\pi}{2}(\varepsilon_j - 1) < \mathrm{Im}\, t_j < \tfrac{\pi}{2}(\varepsilon_j + 1)\}$$

に写ることからわかる．そこで任意の $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対し，u は $f_\varepsilon \in \mathcal{O}(U_\varepsilon)$ でもって $u = \sum_\varepsilon b_{U_\varepsilon}(f_\varepsilon)$ と書かれるが，$g_\varepsilon \in \mathcal{O}(U_\varepsilon)$ があって $Pg_\varepsilon = f_\varepsilon$ となるのだから，$v := \sum_\varepsilon b_{U_\varepsilon}(g_\varepsilon)$ とおけば $Pv = u$ となる．（証終）

従って特に，$P : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ は全射な層準同型を与える．

さて，次に $x^0 \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{C}^n_x \setminus \{0\}$ における状態を調べよう．即ち，例えば，$x_1^0, \cdots, x_m^0 = 0$，$x_{m+1}^0, \cdots, x_n^0 \neq 0$ なる点で考えたい．そこで簡単の為記号を変えて，

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$$

とし (x, y) 変数の Euler 型の局所微分作用素

$$P = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, x^\alpha y^\beta D_x^\alpha D_y^\beta : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m}$$

を考えよう．以下，条件 (16) を仮定し，点 $(x, y) = (0, \eta)$，$\eta_1, \cdots, \eta_m \neq 0$ で考える．変数変換

(18)′ $\quad (x, y) \mapsto (x, t)$; $y_1 = \eta_1 e^{t_1}, y_2 = \eta_2 e^{t_2}, \cdots, y_m = \eta_m e^{t_m}$

によって，$\tilde{P} = \sum_{\alpha\beta} \tilde{a}_{\alpha\beta}\, x^\alpha D_x^\alpha D_t^\beta : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+m}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+m}}$ を $(x, t) = (0, 0)$ で考えることになる：任意の $u(x, t) \in \mathcal{B}_{\{0\}|\mathbb{C}^{n+m}}$ に対し，

$$\mathcal{F}_1({}^t\tilde{P}u)(\xi, \tau) = P(D_\xi, \xi, \tau)(\mathcal{F}_1 u)(\xi, \tau)$$

$$:= \sum_{\alpha,\beta} \tilde{a}_{\alpha\beta} \xi^\alpha \tau^\beta D_\xi^\alpha (\mathcal{F}u)(\xi,\tau)$$

となる．そこで $\tilde{b}_{\mu\beta} := \sum_{\alpha\leq\mu} \frac{\tilde{a}_{\alpha\beta}}{(\mu-\alpha)!}$ $(\forall\mu,\beta)$ (c.f. (4)") とおけば，

$(\mathcal{F}u)(\xi,\tau) = \sum_{\mu,\lambda} u_{\mu\lambda} \xi^\mu \tau^\lambda \in E'$ に対し，

$$\mathcal{F}({}^tPu)(\xi,\tau) = \sum_{\mu,\lambda,\beta} \mu!\, \tilde{b}_{\mu\beta} u_{\mu\lambda} \xi^\mu \tau^{\lambda+\beta}$$
$$= \sum_\mu \Big(\sum_\beta \mu!\, \tilde{b}_{\mu\beta} \tau^\beta\Big)\Big(\sum_\lambda u_{\mu\lambda} \tau^\lambda\Big) \xi^\mu$$

そこでこれを $= v \equiv \sum_{\mu,\nu} v_{\mu\nu} \xi^\mu \tau^\nu$ $(\in E')$ とおくと，これは，

(20) $$\Big(\sum_\beta \mu!\, \tilde{b}_{\mu\beta} \tau^\beta\Big)\Big(\sum_\lambda u_{\mu\lambda} \tau^\lambda\Big) = \sum_\nu v_{\mu\nu} \tau^\nu \quad (\text{for } \forall\mu)$$

を意味する．かつ，$\tilde{a}_{\alpha 0} = a_{\alpha 0}$ $(\forall\alpha)$ ということに注意すれば，

$$\tilde{b}_{\mu 0} = \sum_{\alpha\leq\mu} \frac{\tilde{a}_{\alpha 0}}{(\mu-\alpha)!} = \sum_{\alpha\leq\mu} \frac{a_{\alpha 0}}{(\mu-\alpha)!}$$

であるから，条件 (16) より，$|\tilde{b}_{\mu 0}| \geq C r^{|\mu|}/\mu!$ となるので，まず (20) より ${}^tP : B_{\{0\}}|\mathbb{C}^{n+m} \to B_{\{0\}}|\mathbb{C}^{n+m}$ は単射になる．次に，列 $v^k = {}^tP u^k$ $(u^k, v^k \in E')$ が $B_{\{0\}}|\mathbb{C}^{n+m}$ 内で v に収束するとすれば，(20) より補題 3 を用いて，各 μ に対し，

$$\Big|\sum_\lambda (u^k_{\mu\lambda} - u^{k'}_{\mu\lambda}) \tau^\lambda\Big|$$
$$\leq \sum_\nu |v^k_{\mu\nu} - v^{k'}_{\mu\nu}| R^{|\nu|} \Big[\sum_\beta |\tilde{b}_{\mu\beta}|\mu!\, R^{|\beta|}\Big]^{\frac{2|\tau|}{R-|\tau|}} |\tilde{b}_{\mu 0}\mu!|^{-\frac{R+|\tau|}{R-|\tau|}}.$$

従って，$C_1 > 1$ として，

$$|u^k(\xi,\tau) - u^{k'}(\xi,\tau)| = \Big|\sum_{\mu,\lambda} (u^k_{\mu\lambda} - u^{k'}_{\mu\lambda}) \tau^\lambda \xi^\mu\Big|$$
$$\leq \sum_{\mu,\nu} |v^k_{\mu\nu} - v^{k'}_{\mu\nu}| R^{|\nu|} |C_1\xi|^{|\mu|} \sup_\mu \Big[\Big(\sum_\beta |\tilde{b}_{\mu\beta}|\mu!\, R^{|\beta|}\Big)^{\frac{2|\tau|}{R-|\tau|}} |\tilde{b}_{\mu 0}|\mu!\, C_1^{-|\mu|}\Big].$$

$\sum_{\mu,\nu} |v^k_{\mu\nu} - v^{k'}_{\mu\nu}| R^{|\nu|} |C_1\xi|^{|\mu|}$ は $|\xi| < R/2$ 内で一様に 0 に収束するが，$\sup_\mu [\;\;]$ は $C_1 > 1$ を r と R に依存して十分大きく取れば有界．従って $|u^k(\xi,\tau) - u^{k'}(\xi,\tau)|$ は $|\xi|, |\tau| < R/2$ に対して一様に

0に収束．$R>0$ は任意だから結局 $u^{\alpha}(\zeta,\tau)$ は $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m)$ 内である $u(\zeta,\tau)$ に収束する．勿論形式的には $\Phi u = v$ である．以上のことを $u^{\alpha}-u^{\alpha'}$ の代わりに u に対して行って $u\in E'$ がわかる．従って，$v=\Phi u\in \mathrm{Im}\,\Phi$ となり，$\mathrm{Im}\,\Phi$ は閉である．よって，

定理 6．条件 (16) の下，Euler 型の局所微分作用素 $P=\sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} D_x^{\alpha} : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ は全射である．

文 献

[1] Aoki T., 無限階擬微分作用素の表象理論，数理研講究録 468.

[2] Aoki T., Calcul exponentiel des opérateurs micro-différentiels II, (à paraître).

[3] Aoki T., Kashiwara M. & Kawai T., On a class of linear differential operators of infinite order with finite index (to appear).

[4] Hörmander L., On the range of convolution operators, Ann. Math. 76 (1962), 148–170.

[5] Ishimura R., Homomorphisme du faisceau des germes de fonction holomorphe dans lui-même et opérateurs différentiels, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 32 (1978), 301–312.

[6] Ishimura R., Existence locale de solutions holomorphes pour les équations différentielles d'ordre infini, à paraître dans Ann. Inst. Fourier Grenoble 35 (1985).

[7] Kashiwara M. & Kawai T., On holonomic systems of microdifferential equations III, Publ RIMS Kyoto Univ. 17(1981), 831-979.

[8] Kawai T., On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 17 (1970), 467-517.

[9] Komatsu H. 佐藤の超函数と定数係数線形偏微分方程式, 東大セミナリー・ノート 22, 1968.

[10] Коробейник Ю.Ф. Исследование дифференциальных уравнений бесконечного порядка с полиномиальными коэффициентами с помощью операторных уравнений интегрального типа, Мат. Сб 49 (1959), 191-206

[11] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций, Госуд. Изд. Москва, 1956.

[12] Martineau A. Equations différentielles d'ordre infini, Bull. Soc. Math. France 95 (1967), 109-154.

[13] Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных, Наука Москва, 1971.

[14] Sato M. Kawai T. & Kashiwara M., Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math., No. 287, Springer (1973), 265-529.