数理解析研究所講究録
第578巻 1985年 102-119

BRONSTEIN作用素と双曲型初期問題

防衛大　打越敬祐
KEISUKE UCHIKOSHI

佐藤超函数論における双曲型初期値問題については，Bony-Schapira [1] の古典的な結果が有名である。すなわち，任意の(線型)双曲型初期値問題は佐藤超函数解をもつ。後にTrepreau [5] はこの研究を精密化し，解の特異性の伝播を考察した。このような結果は論理的には決定的であるが，解の存在は整型函数の解析接続の定理に基いて抽象的に証明されており，構成的ではない。

ここでは，双曲型初期値問題の解を具体的に構成する。われわれの方法はBronstein [2] のアイデアに基いている。Bronstein [2] は，双曲型初期値問題のGevrey族函数解が，きわめて単純な方法で得られることを示した。ところで，Bronsteinの方法は本質的に複素領域におけるものなので，佐藤超函数の枠組で考える方が自然である。以下，本文の中でBronstein作用素を定義し，これが佐藤超函数にどのように作

用するかを示す。これは初等的な積分計算で示される。更に，Bronstein 作用素を用いて，超函数解を構成する。

§1. Formal calculus

最初に，双曲型作用素について，形式的な symbol calculus を行なう。

$x=(x_1, x')\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$ (or $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{n-1}$) とする。$D=\partial/\partial x$ として，

$$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha$$

とおく。ここで係数 $a_\alpha(x)$ は原点で解析的，$a_{(m,0,\cdots,0)}=1$ とする。更に $P(x,\xi)$ は双曲型であるとする：

$$\left.\begin{array}{l} P_m(x,\xi)=\displaystyle\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \\ (x,\xi')\in\mathbb{R}^n\times\sqrt{-1}\mathbb{R}^{n-1}\end{array}\right\}\Rightarrow \xi_1\in\sqrt{-1}\mathbb{R}.$$

また，

$$P_m(x,\xi)=\prod_{j=1}^m(\xi_1-\lambda_j(x,\xi'))$$

とするとき，特性根 $\xi_1=\lambda_j(x,\xi')$，$1\le j\le m$ の重複度は高々 r であるとする。$r=1$ のときは簡単だから，以下 $r\geqq 2$ とする。

Ivrii [3], Trepreau [5], Bronstein [2] などに述べられているように，十分大きな C に対して，

$$\mathrm{Re}\,\xi_1 > C|\mathrm{Im}\,x|\cdot|\mathrm{Im}\,\xi'| + C|\mathrm{Re}\,\xi'|$$

のとき，

(1) $$\left|\frac{\partial}{\partial x_j} P_m(x,\xi)/P_m(x,\xi)\right| \leq C + C\frac{|\mathrm{Im}\,\xi'|}{|\mathrm{Re}\,\xi_1|}$$

(2) $$\left|\frac{\partial}{\partial \xi_j} P_m(x,\xi)/P_m(x,\xi)\right| \leq C\frac{1}{|\mathrm{Re}\,\xi_1|}$$

が成立する．

補題 1．$C>0$ が十分大きく，$1<s\leq r/(r-1)$ とする．もし

(3) $$\begin{cases} \mathrm{Re}\,\xi_1 > C(|\mathrm{Im}\,x|\cdot|\mathrm{Im}\,\xi'| + |\mathrm{Re}\,\xi'| + C|\mathrm{Im}\,\xi'|^{1/s} + C) \\ a|\mathrm{Re}\,x_j|<1, \quad a|\mathrm{Im}\,x_j|<1, \qquad 1\leq j\leq n \end{cases}$$

なら，

(4) $$|P(x,\xi)|^{-1} \leq C|\mathrm{Re}\,\xi_1|^{-r}(|\mathrm{Re}\,\xi_1| + |\xi'|)^{-m+r}$$

(5) $$\left|\frac{\partial}{\partial \xi_j} P(x,\xi)/P(x,\xi)\right| \leq C|\mathrm{Re}\,\xi_1|^{-1}, \quad 1\leq j\leq n$$

証明．$|\mathrm{Im}\,\xi_1| \geqq C^{1/2m}|\mathrm{Im}\,\xi'|$ なら P は楕円型だからよい。そこで $|\mathrm{Im}\,\xi_1| < C^{1/2m}|\mathrm{Im}\,\xi'|$ とする．双曲型不等式 (c.f. Bony-Schapira [1]) により，

$$|\mathrm{Re}\,\lambda_j(x,\xi')| \leq \frac{C}{2}(|\mathrm{Im}\,x|\cdot|\mathrm{Im}\,\xi'| + |\mathrm{Re}\,\xi'|).$$

従って，$1\leq j\leq m$ に対して

$$|\xi_1 - \lambda_j(x,\xi')| \geqq \mathrm{Re}(\xi_1 - \lambda_j(x,\xi')) \geqq \frac{1}{2}|\mathrm{Re}\,\xi_1|$$

一方，特性根の重複度が高々 r なので，$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ のうち，

少なくとも $m-r$ 個は

$$|\xi_1 - \lambda_j(x,\xi')| \geqq \frac{1}{2C^{1/m}}(|\mathrm{Re}\,\xi_1| + |\xi'|)$$

をみたす。従って,

$$|P_m(x,\xi)| = \prod_{j=1}^{m} |\xi_1 - \lambda_j(x,\xi')|$$
$$\geqq 2C^{-1}|\mathrm{Re}\,\xi_1|^r(|\mathrm{Re}\,\xi_1| + |\xi'|)^{m-r}.$$

一方, $P'(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqq m-1} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ とすれば, 初等計算で,

$$|P'(x,\xi)| \leqq C^{-1}|\mathrm{Re}\,\xi_1|^r(|\mathrm{Re}\,\xi_1| + |\xi'|)^{m-r}$$
$$\leqq \frac{1}{2}|P_m(x,\xi)|.$$

従って,

$$|P(x,\xi)| \geqq |P_m(x,\xi)| - |P'(x,\xi)|$$
$$\geqq C^{-1}|\mathrm{Re}\,\xi_1|^r(|\mathrm{Re}\,\xi_1| + |\xi'|)^{m-r}.$$

次に(5)を示す: 上の計算から, $|P(x,\xi)| \leqq 2|P_m(x,\xi)|$ がすぐわかる. 従って,

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi_j}P/P\right| \leqq \left|\frac{\partial}{\partial\xi_j}P/P_m\right|$$
$$\leqq \left|\frac{\partial}{\partial\xi_j}P_m/P_m\right| + \left|\frac{\partial}{\partial\xi_j}P'/P_m\right|$$

あと, (2)を用いて(5)がすぐ出る. Q.E.D.

また，単純計算で次の補題がわかる：

<u>補題 2</u>． $(x,\xi)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$ が，

(3)′ $\quad \mathrm{Re}\,\xi_1 > 2C\left(|\mathrm{Im}\,x|\cdot|\mathrm{Im}\,\xi'| + |\mathrm{Re}\,\xi'| + 2C|\mathrm{Im}\,\xi'|^{1/s} + 2C\right)$

をみたし，(y,η) が

$$|y|\leq C^{-1}(1+|\xi'|)^{(1-s)/s},\quad |\eta|\leq(1+\mathrm{Re}\,\xi_1)/10^sC^{2s}$$

をみたせば，$(x+y,\xi+\eta)$ は(3)をみたす．

系．$C>0$ が十分大きければ，(3)が成立するとき

$$\left|\partial_x^\alpha\left(\frac{1}{P(x,\xi)}\right)\right|\leq C^{|\alpha|+1}|\mathrm{Re}\,\xi_1|^{-m}(1+|\xi'|)^{(s-1)|\alpha|/s}\alpha!$$

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\left(\frac{\partial_{\xi_j}P(x,\xi)}{P(x,\xi)}\right)\right|$$

$$\leq C^{|\alpha+\beta|+1}|\mathrm{Re}\,\xi_1|^{-|\beta|-1}(1+|\xi'|)^{(s-1)|\alpha|/s}\alpha!\,\beta!$$

が成立する．

この系から，次の補題を得る：

<u>補題 3</u>．$C>0$ が十分大きければ，条件(3)のもとで，

(6) $$\left|\partial_x^\alpha\left(\frac{\partial_\xi^\beta P(x,\xi)}{P(x,\xi)}\right)\right|$$

$$\leq C^{|\alpha+\beta|+1}|\mathrm{Re}\,\xi_1|^{-|\beta|}(1+|\xi'|)^{(s-1)|\alpha|/s}\alpha!\,\beta!$$

が成立する．

さて，いよいよ formal calculus を行なう．(3)の領域で正則な函数 $E_j(x,\xi)$，$j=0,1,2,\cdots$，を次式で帰納的に定める：

$$\sum_{k+|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha P(x,\xi)\, \partial_x^\alpha E_k(x,\xi) = \delta_{j0}\ ,$$

すなわち，

$$E_0(x,\xi) = 1/P(x,\xi)$$

$$E_j(x,\xi) = -\frac{1}{P(x,\xi)} \sum_{\substack{k+|\alpha|=j \\ k\neq j}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha P(x,\xi)\, \partial_x^\alpha E_k(x,\xi)$$

$$(j=1,2,3,\cdots)$$

とおく．すると，(6)を用いて，次の命題を得る：

<u>命題 1</u>．　条件(3)のもとで，

(7)　$$|\partial_x^\beta E_j(x,\xi)| \leqq C^{j+|\beta|+1}(j+|\beta|)!(1+|\xi|)^{-\frac{m}{s}-\frac{2-s}{s}j+\frac{s-1}{s}|\beta|}$$

<u>注意</u>　$r \geqq 2$，$1<s\leqq r/(r-1)$ としているので，

$$1 < s \leqq \frac{r}{r-1} = 1 + \frac{1}{r-1} \leqq 2.$$

従って，

$$0 \leqq \frac{2-s}{s} < 1 ,$$

そして，

$$|E_j(x,\xi)| \leqq C^{j+1} j!\,(1+|\xi|)^{-\frac{m}{s}-\frac{2-s}{s}j}$$

なのだから，$\sum_{j=0}^{\infty} E_j(x,\xi)$ という漸近展開は擬微分作用素

等の symbol を定義しない。この symbol の意味を以下で説明する。

§2 超函数論における Bernstein 作用素

まず，

$$V = \{(x, \xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n;$$

$$a|\mathrm{Re}\, x_j| < 2, \quad a|\mathrm{Im}\, x_j| < 2, \quad 1 \le j \le n$$

$$\mathrm{Re}\, \xi_1 > a_1 \sum_{j=2}^{n} |\mathrm{Re}\, \xi_j| + a_1 \left(\max_{1\le j\le n} |\mathrm{Im}\, x_j|\right) \sum_{j=2}^{n} |\mathrm{Im}\, \xi_j|$$

$$+ b_1^2 \left(\sum_{j=2}^{n} |\mathrm{Im}\, \xi_j|\right)^{1/s} + a_1^2 \}.$$

とする。$a, a_1, b_1 > 0$ が十分大きければ，$E_j(x, \xi)$ は V で正則である。そこで，V 上の正則函数がどのような作用素を与えているのかを考える。

さて，函数空間をいくつか定義する。まず，

$$J_1, J_2, J_3, J_4 \subset \{2, 3, \cdots, n\}$$

が，次の条件をみたすとする：

$$J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 = \{2, 3, \cdots, n\}$$

$$J_i \cap J_j = \phi \qquad \text{できる.}$$

このような J_i の組 $J = (J_1, J_2, J_3, J_4)$ を考える。

このとき，各々の J に対して，$\tilde{\Omega}_J^{\pm}$ (resp. $\partial_k \tilde{\Omega}_J^{\pm}$, $2 \le k \le n$,)

を次のように決める：

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\Omega}^{\pm}_{J}\ (\text{resp. } \partial_k \tilde{\Omega}^{\pm}_{J})\\
&= \{x \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1};\\
&\qquad 2a^2|\mathrm{Re}\, x_1| < 1,\\
&\qquad a|\mathrm{Re}\, x_j|,\ a|\mathrm{Im}\, x_j| < 1,\ 2 \leq j \leq n,\\
&\qquad \mathrm{Im}\, x_j > 0,\quad j \in J_1 \quad (\text{resp. } j \in J_1 \setminus \{k\})\\
&\qquad \mathrm{Im}\, x_j < 0,\quad j \in J_2 \quad (\text{resp. } j \in J_2 \setminus \{k\}).\\
&\qquad \mathrm{Re}\, x_j > \pm a\, \mathrm{Re}\, x_1,\quad j \in J_3 \quad (\text{resp. } j \in J_3 \setminus \{k\})\\
&\qquad \mathrm{Re}\, x_j < \mp a\, \mathrm{Re}\, x_1,\quad j \in J_4 \quad (\text{resp. } j \in J_4 \setminus \{k\})\\
&\qquad |\mathrm{Im}\, x_i| < 2|\mathrm{Im}\, x_j|,\quad 2 \leq i \leq n,\\
&\qquad\qquad j \in J_1 \cup J_2 \quad (\text{resp. } j \in J_1 \cup J_2 \setminus \{k\})\}.
\end{aligned}
$$

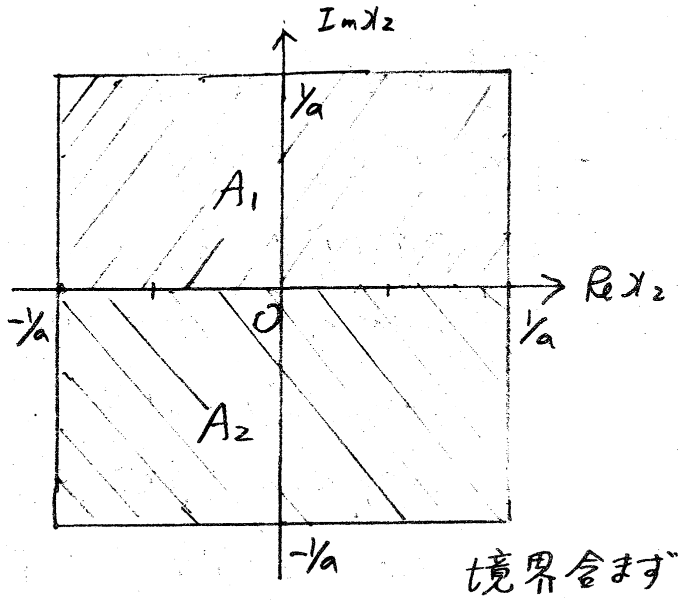
また，

$$
\tilde{\Omega}^{\pm} = \bigcup_J \tilde{\Omega}^{\pm}_J,\quad \partial_k \tilde{\Omega}^{\pm} = \bigcup_J \partial_k \tilde{\Omega}^{\pm}_J
$$

とする．

少し説明を付け加える．$\tilde{\Omega}^{\pm}$ 上定義され，x' について正則な函数 $f(x)$ があったとする．x_1 は実数のパラメータで，x' について境界値をとって，x' に関する超函数 $[f(x)]$ を考えるのである．ところで，$\tilde{\Omega}^{\pm}_J$ の定義式で，最後の条件 $(|\mathrm{Im}\, x_i| < 2|\mathrm{Im}\, x_j|)$ を忘れよう。さて $\pm \mathrm{Re}\, x_1 \geqq 0$ の場合には，たとえば，$2 \in J_1$ のとき，x_2 平面の領域 A_1 は $\tilde{\Omega}^{\pm}_J$ の x_2 平面の断面になる。同様に，$2 \in J_j\ (1 \leq j \leq 4)$ なら，A_j が，

x_2 平面の断面を与える.



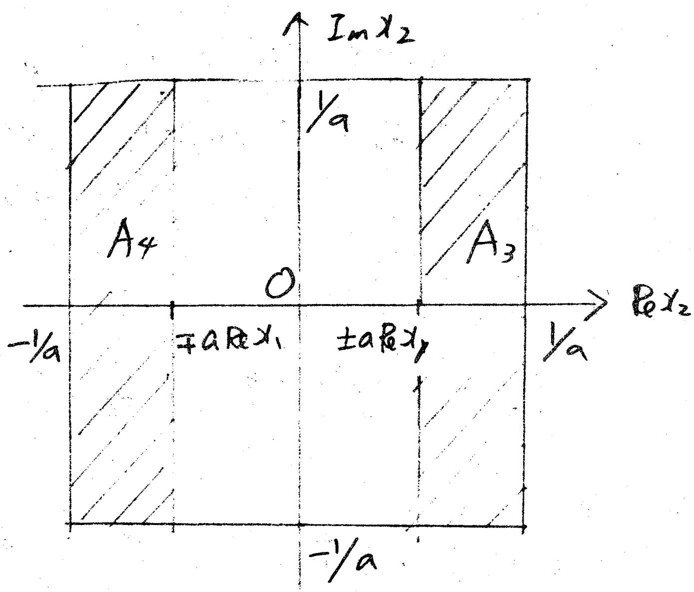
境界含まず

従って，$\tilde{\Omega}^\pm = \bigcup_j \tilde{\Omega}^\pm_j$ の x_2 平面での断面は，(最後の条件を無視すれば)正方形

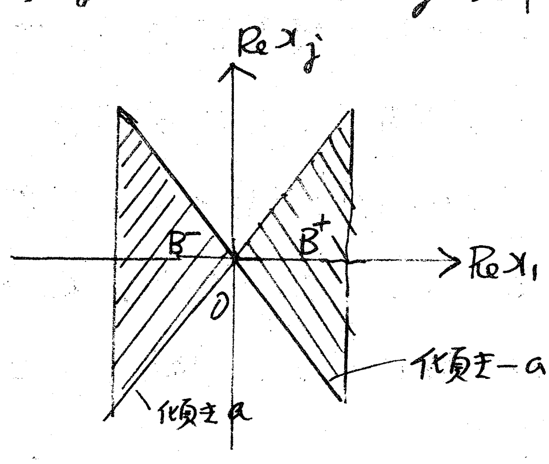
$\{a|\mathrm{Re}\,x_2|<1,\ a|\mathrm{Im}\,x_2|<1\}$ から，実軸上の区間

$[\mp a\,\mathrm{Re}\,x_1,\ \pm a\,\mathrm{Re}\,x_1]$

を除いたものとなる、他の変数 $x_3,\dots,x_n$ についても同様である。また $\pm\mathrm{Re}\,x_1<0$ なら，断面は正方形全体になる。



次に，$\partial_k\tilde{\Omega}^\pm$ $(2\le k\le n)$ の方は，$2\le j\le n$，$j\ne k$ のとき，x_j の断面は全く同じで，$j=k$ のとき，x_j の断面は正方形全体になる、



そこで $\tilde{\Omega}^\pm$ 上で定義され，x' について正則な函数 $f(x)$ は，x' について境界値をとれば，右図の $B^\pm$ に台をもつ

超函数 $[f(x)]$ を定義する。また，$\partial_k \hat{\Omega}^\pm$ 上定義され，x' について正則なものは超函数としては 0 になる。

さて，$1 < s \in \mathbb{R}$，$0 \leq q \in \mathbb{Z}$，$0 < b \in \mathbb{R}$ として，

$\mathcal{O}^{s,q}(\hat{\Omega}^\pm) = \{ f(x)$；$f(x)$ は $\hat{\Omega}^\pm$ 上で定義され，

① x_1 について C^q class;

② $D_1^i f(x)$，$0 \leq i \leq q$ は $x \in \hat{\Omega}^\pm$ のとき x' について正則；

③ ある $C > 0$ が存在して，$0 \leq i \leq q$ に対して，

$$|D_1^i f(x)| \leq C \exp\{ b (\pm \mathrm{Re}\, x_1)_+^{\frac{s}{s-1}} \max_{j \in J_1 \cup J_2} (|\mathrm{Im}\, x_j|^{\frac{-1}{s-1}}) \}$$

が $\hat{\Omega}^\pm$ 上成立し，$\mathrm{Re}\, x_1 < 0$ のとき $f(x) = 0 \}$，

とする。ただし，

$$(\pm \mathrm{Re}\, x_1)_+ = \begin{cases} 0 & \text{if } \pm \mathrm{Re}\, x_1 \leq 0 \\ \pm \mathrm{Re}\, x_1 & \text{if } \pm \mathrm{Re}\, x_1 \geq 0 \end{cases}$$

とし，また $J_1 \cup J_2 = \phi$ のときは，$\max_{j \in J_1 \cup J_2} (|\mathrm{Im}\, x_j|^{\frac{-1}{s-1}}) = 0$ と約束する。これは③の評価の C をノルムとして Banach 空間となり，$f(x) \in \mathcal{O}^{s,q}(\hat{\Omega}^\pm)$ のとき，

$$[f(x)] \in C^q(\mathbb{R}; \mathcal{D}^{(s)'}(\mathbb{R}^{n-1}))$$

$$\mathrm{supp}\, [f(x)] \subset B^\pm$$

となる。もしも $\partial_k \hat{\Omega}^\pm$，$2 \leq k \leq n$，において定義され，$x'$ に

ついて正則な函数 $g_k(x)$, $2\le k\le n$, が存在して,

$$f(x)=\sum_{k=2}^{n} g_k(x)$$

と書ければ, $f(x)$ を $\mathcal{O}$-class の函数と呼ぶ.

次に, $\mathcal{O}^{s,\varepsilon}(\hat{\Omega}^+)$ の元の Fourier 変換と, Bronstein 作用素の定義について述べる. ($\mathcal{O}^{s,\varepsilon}(\hat{\Omega}^-)$ についても同様である).

$\varphi(x_1)\in C_0^\infty(R)$ は, $0\le\varphi(x_1)\le 1$ および

$$\varphi(x_1)=\begin{cases}1 & \text{if } |x_1|<1/8a^2\\ 0 & \text{if } |x_1|>1/4a^2\end{cases}$$

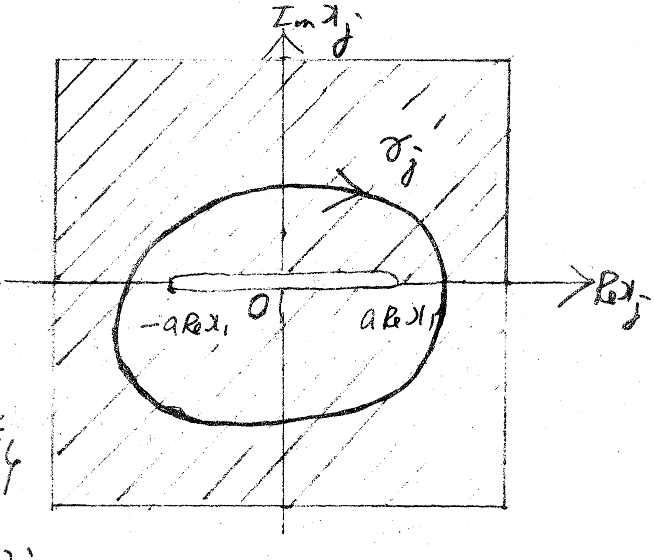
をみたすとする. $f(x)\in\mathcal{O}^{s,\varepsilon}(\hat{\Omega}^+)$ の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ を,

$$\hat{f}(\xi)=\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^n\int_\Gamma e^{-x\xi}\varphi(x_1)f(x)\,dx$$

で定義する. ただし,

$$\Gamma=\{x\in R\times\mathbb{C}^{n-1};\ |x_1|<1/2a^2,\ x_j\in\gamma_j,\ 2\le j\le n\}$$

とする. $\hat{f}(\xi)$ は整函数になる. ところで,



$$U=\Big\{\xi\in\mathbb{C}^n;\ \mathrm{Re}\,\xi_1>a\sum_{j=2}^{n}|\mathrm{Re}\,\xi_j| + \left(\frac{k}{s-1}\right)^{(s-1)/s} s\Big(\sum_{j=2}^{n}|\mathrm{Im}\,\xi_j|\Big)^{1/s}\Big\}$$

とおけば, 次の命題が成立する.

<u>命題 2.</u> $f(x)\in\mathcal{O}^{s,q}(\Omega^+)$ のとき、U 上次の評価が成立する：

(i) $|\hat{f}(\xi)| \leq a^{2q} e^{b} \|f(x)\|_{\mathcal{O}^{s,q}(\Omega^+)} |\xi_1|^{-q}$

さて、$Q(x,\xi)$ が V 上の正則函数で、ある $\tau\in\mathbb{Z}$, $\tau\geq 0$ に対して、

$$|Q(x,\xi)| \leq C|\xi_1|^{-\tau}$$

をみたしていたとする。このとき、$\Delta\subset U\cap V$ のような積分路 Δ をえらんで、

$$Q(x,D)=\int_{\Delta} Q(x,\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

とおく。正確には、

$$\Delta=\Big\{\xi\in\mathbb{C}^n;\ \operatorname{Re}\xi_j=0,\ \operatorname{Im}\xi_j>0,\ 2\leq j\leq n,\ -\infty<\operatorname{Im}\xi_1<+\infty,\ \operatorname{Re}\xi_1=a\sum_{j=2}^{n}|\operatorname{Re}\xi_j|+a+\psi(\operatorname{Im}\xi)\Big\}$$

とする。ただし、

$$\psi(\operatorname{Im}\xi)=\max\Big(a_1\varepsilon\sum_{j=2}^{n}|\operatorname{Im}\xi_j|+b_1^{2}\Big(\sum_{j=2}^{n}|\operatorname{Im}\xi_j|\Big)^{1/s},\ \Big(\frac{b}{s-1}\Big)^{(s-1)/s} s\Big(\sum_{j=2}^{n}|\operatorname{Im}\xi_j|\Big)^{1/s}\Big)$$

である。このとき、次の命題を得る。

<u>命題3</u>、 i) $1<s\in R$, $0\leq g\in \mathbb{Z}$, $i\in\mathbb{Z}$ のとき

$$Q(x,D)f(x)\in \mathcal{O}^{s,g+i+[-sn-1]}(\hat{\Omega}^+)$$

ii) $i\geqq sn+1$ のとき,

$$\|Qf(x)\|_{\mathcal{O}^{s,g}(\hat{\Omega}^+)}\leq 2R^{-g}e^{g+1}(g+1)C\,\|f(x)\|_{\mathcal{O}^{s,g}(\hat{\Omega}^+)}$$

<u>注意</u>. $l<0$ のとき, $\mathcal{O}^{s,l}(\hat{\Omega}^+)$ を

$$\mathcal{O}^{s,l}(\hat{\Omega}^+)=\{f(x);\ f(x)=D_1^{|l|}g(x),$$
$$g(x)\in\mathcal{O}^{s,0}(\hat{\Omega}^+)\}$$

と定義する、また ii)において, Cが十分小さければ,
$\|Qf\|$ は $\|f\|$ と比べていくらでも小さくできることに注意する.

<u>定義</u>. 上の$Q(x,D)$を Bronstein 作用素と呼ぶ.

$Q(x,\xi)=1$ のときは, 次のことがわかる.

<u>命題 4</u>.

$$1(x,D)f(x)\equiv\varphi(x,)f(x)\qquad(\text{modulo } 0\text{-class}).$$

§3 初期値問題の解の構成.

以上に説明した Bronstein 作用素を用いて, 双曲型初期値問題の解の構成を行なう. §1で形式的に定義した symbol $E_j(x,\xi)$, $j=0,1,2,\cdots$ は Bronstein 作用素の symbol にな

っている、さて，$N>0$が十分大きいとして，

$$E(x,\xi)=\sum_{j=0}^{N}E_j(x,\xi)$$

とする、このとき，

$$P(x,D)E(x,D)=I(x,D)+S(x,D)$$

となる、ここで，

$$S(x,\xi)=\sum_{\substack{1\le j\le N\\ j+|\alpha|>N}}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha P(x,\xi)\,\partial_x^\alpha E(x,\xi)$$

なので、(7)から

$$|S(x,\xi)|\le C_N(1+|\xi|)^{-\frac{(2s-4)m-(s-2)N}{s}}$$

となる ただし，C_Nはa，a_1，RやR_0によらない、$s<2$ならa，a_1，Nを大きくとると，$|S(x,\xi)|\ll 1$となり，

$$\|S(x,D)\|_{\mathcal{O}^{s,q}\to\mathcal{O}^{s,q}}\le 1/2$$

とできる、従って，$f(x)\in\mathcal{O}^{s,q}(\hat{\Omega}^{\pm})$に対して，

$$u(x)=E(x,D)\sum_{j=0}^{\infty}(-S(x,D))^j\in\mathcal{O}^{s,q}(\hat{\Omega}^{\pm})$$

とすれば，

(9) $P(x,D)u(x)\equiv\varphi(x)f(x)$ (modulo $\mathcal{O}$-class)

となる．以上のことをまとめて，次の定理を得る：

定理 1. $1<s\leq\frac{r}{r-1}$, $s<2$, $q\geq 0$ とする．このとき任意の $f(x)\in\mathcal{O}^{s,q}(\hat{\Omega}^{\pm})$ に対して，ある $u(x)\in\mathcal{O}^{s,q}(\hat{\Omega}^{\pm})$ が存在して，(9) が成立する．

ところで，$\mathcal{O}^{s,q}(\hat{\Omega}^{\pm})$ の元 $f(x)$ は $C^{q}(\mathbb{R};\mathcal{D}^{(s)\prime}(\mathbb{R}^{n-1}))$ の元 $[f(x)]$ を定義し，$\mathrm{supp}\,[f(x)]\subset B^{\pm}$ をみたす．そこで，上の定理 1 は，

$$P(x,D)[u(x)]=[f(x)] \qquad \text{if } |x_1|\leq 1/8a^2$$

が成立することを意味する．実は，§2 において函数空間 $\mathcal{O}^{s,q}(\hat{\Omega}^{\pm})$ の定義を少し特殊にしておいたのだが，この空間の定義をもう少し修正しても上の定理 1 が成立する．このことに基いて，次の結果が得られる：

定理 2. $\rho\geq 0$ として，$D_\rho^{\pm}$ を，

$$D_\rho^{\pm}=\{x\in\mathbb{R}^n;\ 2a^2|x_1|\leq 1,\ \pm x_1\geq 0,\ |x_j|\leq \pm a x_1+\rho,\ 2\leq j\leq n\}$$

とする（$a>0$ は十分大とする）．このとき，$s>1$, $q\geq 0$ として

$$\mathcal{F}^{s,q}(D_\rho^{\pm})=\{u(x)\in C^{q}(\mathbb{R};\mathcal{D}^{(s)\prime}(\mathbb{R}^{n-1}));\ \mathrm{supp}\,u(x)\subset D_\rho^{\pm}\}$$

とおく．$1<s\leq\frac{r}{r-1}$, $s<2$, $q\geq 0$ のとき，任意の $f(x)$

$\in \mathcal{F}^{s,q}(D_\rho{}^{\pm})$ に対して，$u(x) \in \mathcal{F}^{s,q}(D_\rho{}^{\pm})$ が存在して，

$$P(x, D)u(x) = f(x) \qquad \forall \quad |x_1| < 1/8a^2,$$

が成立する．$u(x)$ は $|x_1| < 1/8a^2$ で一意的である．

最後に，

$$(CP) \begin{cases} P(x, D)u(x) = f(x) & \\ D_1{}^i u(0, x') = u_i(x') & 0 \leq i \leq m-1 \end{cases}$$

の解を構成する．ここで，

$$\begin{cases} f(x) \in C^q(\mathbb{R}; \mathcal{D}^{(s)\prime}(\mathbb{R}^{n-1})) \\ \operatorname{supp} f(x) \subset \{x \in \mathbb{R}^n; |x_j| \leq \rho, 2 \leq j \leq n\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_i(x') \in \mathcal{D}^{(s)\prime}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ \operatorname{supp} u_i(x') \subset \{x' \in \mathbb{R}^{n-1}; |x_j| \leq \rho, 2 \leq j \leq n\} \end{cases}$$

とする．このとき，$u(x)$ の代わりに，

$$u(x) - \sum_{j=0}^{2m-1} x_1{}^j v_j(x')$$

という形の函数を考え，$v_j(x') \in \mathcal{D}^{(s)\prime}(\mathbb{R}^{n-1})$ を適当にえらべば，(CP) において，

$$D_1{}^i f(0, x') = u_i(x') = 0 \qquad 0 \leq i \leq m-1$$

としてよい．そこで，

$$f^{\pm}(x)=\begin{cases}0 & \pm x_1\leqq 0\\ f(x) & \pm x_1\geqq 0\end{cases}$$

とすると，定理2から，

$$P(x,D)u^{\pm}(x)=f^{\pm}(x)$$

の解 $u^{\pm}(x)$ を得る．ここで，

$$u^{\pm}(x)\in C^{q}(\mathbb{R};\mathcal{D}^{(s)\prime}(\mathbb{R}^{n-1}))$$

$$\mathrm{supp}\,u^{\pm}(x)\subset\{x\in\mathbb{R}^n;\pm x_1\geqq 0,$$
$$|x_j|\leqq \rho+a|x_1|\}.$$

従って，$u(x)=u_+(x)+u_-(x)$ とすればよい．こうして，(CP)の解が構成された．解の一意性は自明である．

文献

[1] J.M. Bony and P. Schapira, Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy, Lect. Notes in Math. 287, Springer, 82–98

[2] M.D. Bronstein, The Cauchy problem for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity, Trudy Moskov. Math. Obšč. 41(1980), 83–99; English transl. in Trans. Moscow Math. Soc.

1982, no. 1, (41).
[3] V. Ja. Ivrii, Correctness of the Cauchy problem in Gevrey classes for nonstrictly hyperbolic operators, Math. Sb. 96 (138), (1975), 390-413; English transl. in Math. USSR Sb. 25 (1975).
[4] H. Komatsu, Ultradistributions I, Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 20 (1973), 25-105.
[5] J. M. Trepreau, Le problème de Cauchy hyperbolique dans les classes d'ultrafonctions et d'ultradistributions, Comm. in Part. Diff. Eq., 4 (1979), 339-387.

なお，この論説文全般の詳細は，
K. Uchikoshi, On hyperbolic Cauchy problems (to appear).