数理解析研究所講究録
第578巻 1985年 120-151

超・超局所解析について

愛媛大・理 戸瀬 信之 (Nobuyuki Tose)

§ Introduction (1)

第2超局所化 (second microlocalization) の理論の原初的な着想自体は今から10年も溯るようである。柏原先生は、1973年にNiceに於て、現在では 2-microfunction と呼ばれている概念を、層 $\mathcal{O}$ から層 $\mathcal{C}$ を構成するのと同様の操作で、正則パラメーター付きの microfunction の層 $\mathcal{C}\mathcal{O}$ から構成された。([1], [2])

Bony と Schapira はそのアイデアの影響のもとで正則包合的な実の特性多様体を持つ Microdifferential Equation のあるクラスに関して、特異性の伝播を研究し ([3])、Bony は microfunction 解に対する Holmgren の定理を証明した。([7])。これらの仕事で著しいのは、特性方向が超局所特性方向へと第2超局所化されたことにある。これも、今から10年以上も昔の話である。以上が第2超局所化の理論の揺籃期と言えよう。

超局所特性方向はその後、柏原－Schapira [4], [5] に於て sophisticate され, 1981年、Y. Laurent はその学位論文 [6] で非超局所特性的な点において逆元が構成出来るように、micro-differential operator を第2超局所化した。

§2 Introduction (2)

以上の大雑把な話に Bony－Schapira [3] の設定を用いて肉付けを始めよう。

<u>定理1</u>(Bony－Schapira) $M=\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V}(\subset \sqrt{-1}\,\mathring{T}^*M)$ を conic open set とする。P を $\mathcal{V}$ 上定義された microdifferential operator として、次の仮定を満たす。

(1) $\Lambda^{\mathbb{R}} = ch(P)\cap\mathcal{V}$ (実の特性多様体) は $\sqrt{-1}\,\mathring{T}^*M$ の regular involutory submanifold である。(余次元を d とする。)

(2) $p(x,\xi) := \sigma(P)(x,\xi)$ (主要表象) とおくとき,

$\forall(\mathring{x},\mathring{\xi})\in\Lambda^{\mathbb{R}}$, $\forall(\delta_x,\delta_\xi)$: $\Lambda^{\mathbb{R}}$ に横断的な方向の $(\mathring{x},\mathring{\xi})$ における vector 場の芽に対して

$$\exists a\neq 0 \quad p(\mathring{x}+\varepsilon\delta_x,\mathring{\xi}+\varepsilon\delta_\xi) = a\varepsilon^m + o(\varepsilon^m)$$

即ち, P が Λ 上 exact に m 次消えること。

以上の仮定のもと $Pu=0$ を満たす microfunction u の support は陪特性帯の合併である。$\boxed{}$

$\mathcal{V}$ 上 local に量子化接触変換を施こして,

$$\Lambda^{\mathbb{R}} = \{(x,y;\sqrt{-1}\,\xi dx+\sqrt{-1}\,\eta dy)\,;\,\xi=0\}$$

と変換すると，(2)は次の条件(2)′に置きかえられる。

(2)′
$$\left\{\begin{array}{l} \sigma(P) = p(x,y,\xi,\eta) \text{ に対して} \\ p(x,y,\xi,\eta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,y,\xi,\tau)\,\xi^\alpha \\ \text{と } \Lambda^{\mathbb{R}} \text{ に沿って，部分 Taylor 展開をするとき，} \\ \forall x^* \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \quad \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,y,0,\tau)\,x^{*\alpha} \neq 0 . \end{array}\right.$$

ここで超局所特性方向の定義を思い出す。

X：複素多様体，$\mathcal{M}$：連接的 $\mathcal{E}_X$ 加群

Λ：T^*X の正則包合的多様体とする。

X を $X \simeq X \underset{X}{\times} X \hookrightarrow X \times X$ と $X \times X$ の diagonal set と同一視して埋め込む。この map に従って

$$T^*X \rightarrow T^*_X(X \times X) \hookrightarrow T^*(X \times X)$$

T^*X を $T^*(X \times X)$ に埋め込む。すると，

$$\Lambda \hookrightarrow \Lambda \times \Lambda$$

と Λ を $\Lambda \times \Lambda$ に埋め込むことが出来る。

定義1.2 $\tilde{\Lambda}$ を $\Lambda \times \Lambda$ の陪特性帯で Λ を通るものの union とする。□

例えば，Λ として次の標準形をとる時，即ち

$$\Lambda = \{(z, w; \zeta dz + \theta dw);\ \zeta = 0\}$$

とする時，

$$\tilde{\Lambda} = \left\{(z, w, z', w'; \zeta dz + \zeta' dz' + \theta dw + \theta' dw');\ \zeta = \zeta' = 0,\ \begin{array}{l} w = w' \\ \theta + \theta' = 0 \end{array}\right\}$$

$$=\{(z,w,z',w;\theta(dw-dw'))\}$$

であり，$\tilde{\Lambda}$中Λは

$$\Lambda=\{(z,w,z',w;\theta(dw-dw'));\ z=z'\}$$

と表わされる。すると，$T^*_\Lambda\tilde{\Lambda}$ には $(z,w;\theta dw;z^*dz)$ なる座標系が入り，

$$\begin{array}{ccc} T^*_\Lambda\tilde{\Lambda} & \xrightarrow{\pi_\Lambda} & \Lambda \\ (z,w;\theta dw, z^*dz) & \longmapsto & (z,w;\theta dw) \end{array}$$

なる規範的な projection が定まる。

<u>注意3</u> $H: T^*(T^*X)\xrightarrow{\sim}T(T^*X)$

を，T^*X の基本2－形式で定まる同型としよう。この時

$$H: T^*_\Lambda\tilde{\Lambda}\xrightarrow{\sim}T_\Lambda(T^*X)$$

なる同型が引き起こされる。$\boxed{\ }$

さて，超局所特性方向の定義を復習する。

<u>定義4</u>(超局所特性方向)(柏原－Schapira[4],[5])

$\theta\in T^*_\Lambda\tilde{\Lambda}$に対して，

$\theta\in Ch^2_\Lambda(\mathcal{M})$ (Λに沿った超局所特性多様体)
((microcharacteristic variety along Λ))

$$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}\quad H(\theta)\in C_\Lambda(ch(\mathcal{M}))$$ $\boxed{\ }$

<u>注意5</u>

ここで，一般に

X: C^1多様体，N: Xの閉部分多様体とするとき，

Xの閉部分集合Sに対して，SのNに沿うNormal Corn とは
$x\in X$として

$$C_N(S)_x=\left\{\theta\in TX_x\,;\ \exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset S,\ \exists\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset N\ \exists,\ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}_+,\ \text{s.t. } x_n\to x,\ y_n\to x,\ a_n(x_n-y_n)\longrightarrow\theta\ (\text{as } n\to\infty)\right\}$$

として，$C_N(S)=\bigcup_x C_N(S)$と定める。 $\boxed{\diagup}$

今，Xを複素多様体として，Nを部分複素多様体としよう。
局所的にXの座標$(x_1,\cdots,x_n)$を

$$N=\{x_1=\cdots=x_\ell=0\}$$

となるようにとる。$\mathcal{I}$を$\{x_1,\cdots,x_\ell\}$で生成されるideal
とする。$f\in\mathcal{I}^r$とする時，

$$f(x)=\sum_{|\alpha|=r}a_\alpha(x)x'^\alpha\qquad(x'=(x_1,\cdots,x_\ell))$$

と書けるが，$f\in\mathcal{I}^r,\notin\mathcal{I}^{r+1}$なる時，Laurent [6]に従い

$$\tau_N(f)(x,v)=\sum_{|\alpha|=r}a_\alpha(x)v^\alpha$$

と定める。

補題6(Whytney [ ]) 上の注意において，SをXのanalytic subset，$\mathcal{J}$がSをsupportとする$\mathcal{O}_X$のIdealとする時，

$$C_N(S)=\left\{(x,v)\in T_NX\,;\ \tau_N(f)(x,v)=0\ (\forall f\in\mathcal{J})\right\}$$

が成立する。 $\boxed{\diagup}$

この補題を用いて，単独のmicrodifferential equation
$\mathcal{M}=\mathcal{E}_X/\mathcal{E}_XP$に対する$\Lambda$に沿うmicrocharacteristic variety

について注意を行なう。($\sigma(P)$ が Λ 上 h 次消えているとする。)

注意7　$\theta\in T^*_\Lambda\tilde{\Lambda}_p$　$(p\in\Lambda)$ に対して、

θ が P に対して Λ に沿って microcharacteristic

$\Leftrightarrow$　$\sigma(P)(p+\varepsilon H(\theta))=o(\varepsilon^h)$

$\Leftrightarrow$　$\tau_\Lambda(\sigma(P))(x^*,H(\theta))=0$　$\boxed{\diagup}$

上の注意を用いて Bony-Schapira の定理の条件(2)′を書きかえて見る。その為に $T^*_\Lambda\tilde{\Lambda}$ の pure imaginary locus を定める。

定義8. M を実解析的多様体，$\Lambda^{\mathbb{R}}$：$\sqrt{-1}\,\mathring{T}^*M$ の包合的多様体とする。X を M の複素化として，Λ を T^*X 中の $\Lambda^{\mathbb{R}}$ の複素化とする。

$\Lambda^{\mathbb{R}}$ の部分複素化 $\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}$ とは，$\Lambda^{\mathbb{R}}\hookrightarrow\Lambda$ とみて，Λ の陪特性多様体で $\Lambda^{\mathbb{R}}$ を通る物の union のことである。$\boxed{\diagup}$

注意9　$T^*X\simeq T^*_X(X\times X)\hookrightarrow T^*(X\times X)$ なる同一視を通して $\tilde{\Lambda}$ は $\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}$ の複素化となっている。例として，

$$\Lambda^{\mathbb{R}}=\{(x,y;\sqrt{-1}\xi dx+\sqrt{-1}\eta dy);\ \xi=0\}$$

とする時，$(x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^{n-d}$ とする。)

$$\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}\simeq\mathbb{C}^d\times\sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}^{n-d}$$

と同一視出来る。更に，$T^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}$ は $(x,y;\sqrt{-1}\eta dy;\sqrt{-1}x^*dx)$ なる座標を持ち，projection $T^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}\longrightarrow\Lambda^{\mathbb{R}}$ は，

$$(x,y;\sqrt{-1}\eta dy;\sqrt{-1}x^*dx)\longmapsto(x,y,\sqrt{-1}\eta dy)$$

と書ける。

$\tilde{\Lambda}$は$\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}}$の複素化となっており，$T^*_\Lambda\tilde{\Lambda}$は$T^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}}$の複素化となっている。$\boxtimes$

以上の準備のもとBony-Schapiraの定理に現われた条件(2)′を次のように書きかえるのは容易である。

(2)″ $\quad ch^2_\Lambda(\mathcal{M}) \cap \mathring{T}^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}} = \phi$

次に、この条件(2″)をY. Laurent [6]による，Λに沿う2-microdifferential operatorを用いて見直すことにする。その為、節を改めよう。

§ 3. 2-microdifferential operator

前節と同様にΛとして標準形

$$\Lambda = \{ (z, w; \zeta dz + \theta dw); \zeta = 0 \}$$

をとり，$T^*_\Lambda\tilde{\Lambda}$の座標として$(z, w; \theta dw; z^* dz)$をとる。

__定義10__ (Y. Laurent [6]) $\mathcal{V}(\subset T^*_\Lambda\tilde{\Lambda})$を開集合とする。無限階の2-microdifferential operatorの層$\mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda$の$\mathcal{V}$上のsectionは次の条件(3),(4)を満たすsymbol列

$\sum_{i,j} P_{ij}(z, w, z^*, \theta)$のことである。

(3) $\quad P_{ij}$は$\mathcal{V}$上正則，(z^*, θ)に関してj次斉次，z^*についてi次斉次.

(4) $\quad \forall K \subset\subset \mathcal{V}, \exists C_K > 0, \forall \varepsilon > 0 \ \exists C_{\varepsilon, K} > 0 \ s.t.$

$$\begin{cases} \text{(i)} & \sup_k |P_{i,i+k}| \leq C_k \dfrac{\varepsilon^{i+k}}{i!\,k!} & (i,k \geqq 0) \\ \text{(ii)} & \sup_k |P_{i,i+k}| \leq C_\varepsilon^{-k} \varepsilon^{i} \dfrac{(-k)!}{i!} & (i \geqq 0, k<0) \\ \text{(iii)} & \sup_k |P_{i,i+k}| \leq C_\varepsilon\, \varepsilon^k C_k^{-i} \dfrac{(-i)!}{k!} & (i<0, k \quad 0) \\ \text{(iv)} & \sup_k |P_{i,i+k}| \leq C_k^{-i-k} (-i)!(-k)! & (i,k<0) \end{cases}$$

$\boxtimes$

以下$\mathcal{E}_\Lambda^{2,\infty}$の性質を列挙していく。

1°(積) 次の公式(5)により，$\mathcal{E}_\Lambda^{2,\infty}$は環の層となる。

$$\left.\begin{aligned} P(z,w;D_z,D_w) &= \sum_{i,j} P_{ij}(z,w,D_z,D_w) \\ Q(z,w;D_z,D_w) &= \sum_{k,l} Q_{kl}(z,w,D_z,D_w) \end{aligned}\right\} \text{に対して}$$

$$R = \sum_{\lambda,\mu} R_{\lambda,\mu}(z,w,D_z,D_w) = P \circ Q.$$

として

$$(5)\quad R_{\lambda\mu} = \sum_{\substack{\lambda = i+k-|\alpha| \\ \mu = j+l-|\alpha|-|\beta|}} \frac{1}{\alpha!\beta!} \left(D_{z^*}^{\alpha} D_\theta^{\beta} P_{ij}\right)\left(D_z^{\alpha} D_w^{\beta} Q_{kl}\right)$$

$\boxtimes$

2°(有限階の作用素とその主要表象)

$\mathcal{E}_\Lambda^2 = \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{Z}} \mathcal{E}_\Lambda^2[i,j]$ を $\mathcal{E}_\Lambda^{2,\infty}$の部分層として以下のように定義する。

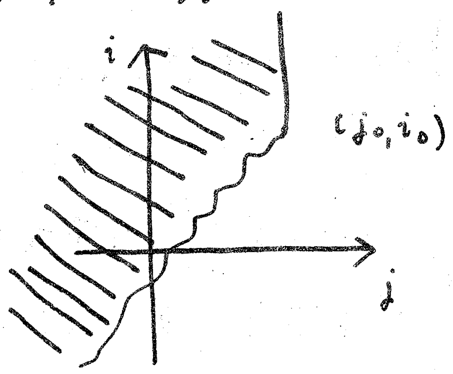
$P=\sum_{i,j} P_{ij}(z,w,D_z,D_w)\in \mathcal{E}_\Lambda^{2,\infty}$ が $\mathcal{E}_\Lambda^2[i_0,j_0]$ に属するとは，

(6) $P_{ij}\equiv 0$ ($j>j_0$ または $j=j_0$ $i<i_0$)

(7) $\forall j\in\mathbb{Z}\ \exists\lambda(j)\in\mathbb{Z}$ s.t. $P_{ij}\equiv 0$ ($i<\lambda(j)$)

を満たすことである。このとき，

$\{(j,i)\in\mathbb{Z}^2;\ P_{ij}\not\equiv 0\}$ は右下図に入っている。



$\mathcal{E}_\Lambda^2$ の section のことを有限階の 2-microdifferential operator と呼ぶ。

$P=\sum P_{ij}$ を有限階の 2-microdiff. op. として，その主要表象を

(8) $\sigma_\Lambda(P)=P_{i_1j_1}$

（但し $j_1=\sup\{j\in\mathbb{Z};\ \exists i\in\mathbb{Z}\ P_{ij}\not\equiv 0\}$
$i_1=\inf\{i\in\mathbb{Z};\ P_{ij_1}\not\equiv 0\}$
とする。）

と定める。

$\mathcal{E}_\Lambda^2$ は $\mathcal{E}_\Lambda^{2,\infty}$ の部分環の層となる。P,Q を有限階の 2-microdiff. op. として，

(9) $\sigma_\Lambda(PQ)=\sigma_\Lambda(P)\,\sigma_\Lambda(Q)$

が成立する。$\boxtimes$

3°（microdifferential op. の埋め込み）

無限階の 2-microdiff. op. に無限階の microdifferential op.

に埋め込むことが出来る。精密には

(10) $$\mathcal{E}_X^\infty|_\Lambda \longleftrightarrow \mathcal{E}_\Lambda^{2,\infty}|_\Lambda \overset{\text{def.}}{=} \mathcal{D}_\Lambda^{2,\infty}$$

なる canonical な埋め込みがある。ここで，Λ は $T_\Lambda^*\tilde{\Lambda}$ の 0-section と同一視している。

symbol を使って具体的に書くと (10) は以下のように記述出来る。

$P = \sum_j P_j(z, w, D_z, D_w)$ を Λ の点の近傍で定義されている microdifferential operator とする。$P_j(z, w, \zeta, \theta)$ を $\{\zeta = 0\}$ に沿って Taylor 展開する。

(11) $$P_j(z, w, \zeta, \theta) = \sum_\alpha P_j^{(\alpha)}(z, w, \theta)\zeta^\alpha$$

として

(12) $$P_{ij}(z, w, z^*, \theta) = \sum_{|\alpha| = i} P_j^{(\alpha)}(z, w, \theta) z^{*\alpha}$$

と定めて

(13) $$P \longmapsto \sum_{ij} P_{ij}(z, w, D_z, D_w)$$

により (10) の埋め込みが定まる。有限階の作用素の場合は、

(14) $$\mathcal{E}_X|_\Lambda \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{E}_\Lambda^2|_\Lambda \overset{\text{def.}}{=} \mathcal{D}_\Lambda^2$$

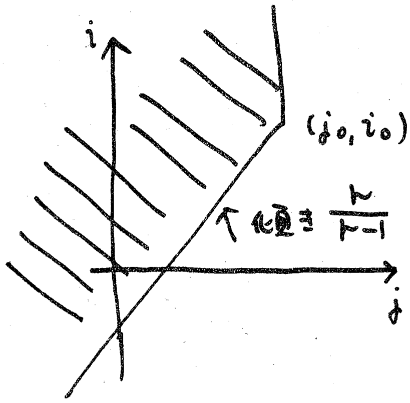
と同型となる。$\boxtimes$

4° (irregularity 付きの operator)

$(i_0, j_0) \in \mathbb{Z}^2$, $r \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ で $r > 1$ とする。$P \in \mathcal{E}_\Lambda^2$ が $\mathcal{E}_\Lambda^{2(r,1)}[i_0, j_0]$ に属するとは,

(15) $$S(P) \overset{\text{def.}}{=} \{ (i,j-i) \in \mathbb{Z}^2;\ P_{ij} \neq 0 \}$$
$$\subset \left\{ (i,j-i) \in \mathbb{Z}^2;\ \begin{array}{l} \frac{1}{r} i + (j-i) \leqq \frac{1}{r} i_0 + (j_0 - i_0) \\ i + (j-i) \leqq i_0 + (j_0 - i_0) \end{array} \right\}$$

なる条件を満たすことである。(15)の右辺を $(i,j-i)$ でなく、(j,i) で書くと右図となる。



(16) $$\mathcal{E}^{2\,(r,1)}_\Lambda = \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \mathcal{E}^{2\,(r,1)}_\Lambda [i,j]$$

と定めると $\mathcal{E}^{2\,(r,1)}_\Lambda$ は $\mathcal{E}^2_\Lambda$ の部分環の層となる。

5°（$\mathcal{E}^2_\Lambda$ の代数的性質）

(17) $\mathcal{E}^2_\Lambda$ は coherent, noetherian sheaf, flat over $\pi^{-1}(\mathcal{E}_X|_\Lambda)$

（但し $T^*_\Lambda \tilde{\Lambda} \xrightarrow[\pi]{} \Lambda$ ）

(18) $\mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda$ は $\mathcal{E}^2_\Lambda$ 上 faithful flat である。□

6°（超局所特性多様体）

coherent $\mathcal{E}^2_\Lambda$ module に対して、超局所特性多様体を supp $\mathcal{M}$ として定義する。

coherent $\mathcal{E}_X$ module $\mathcal{M}$ が Λ の点の近傍で定義されているとする。$\check{\mathcal{M}} = \mathcal{E}^2_\Lambda \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{E}_X|_\Lambda)} \pi^{-1}(\mathcal{M}|_\Lambda)$

と定めると

(19) $$\operatorname{supp} \mathcal{M} = ch^2_\Lambda(\mathcal{M})$$

であることが分る。

証明は(13)における埋め込みにおいて

(20) $\sigma_\Lambda(P) = \tau_\Lambda(\sigma(P))$

なる事実と、次の基本定理により容易に分る。

定理11. $\mathcal{U}\ (\subset T^*_\Lambda\tilde{\Lambda})$ open set, $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E}^2_\Lambda) \ni P$ とする。この時,

(21) P が $\mathcal{U}$ 上 可逆 in $\mathcal{E}^2_\Lambda \Leftrightarrow \sigma_\Lambda(P) \neq 0$ on $\mathcal{U}$

が成立する。

irregularity 付きの op. の層 $\mathcal{E}^{2(r,1)}_\Lambda$ を用いて, irregularity 付きの超局所特性多様体が定義出来る。即ち

定義12. $\mathcal{M}$ を Λ の点の近傍で定義された coherent $\mathcal{E}_X$ module とする。この時, irregularity 付きの micro characteristic を

(22) $$Ch^{2(r,1)}_\Lambda(\mathcal{M}) = \mathrm{supp}\left(\mathcal{E}^{2(r,1)}_\Lambda \underset{\pi^{-1}(\mathcal{E}_X|_\Lambda)}{\otimes} \pi^{-1}(\mathcal{M}|_\Lambda)\right)$$

で定義する。

注意13 Y. Laurent [6] に

(23) "$\mathcal{M}$ が R.S. を Λ に沿って持つ(柏原―大島の意味で)"

$$\Leftrightarrow \quad Ch^{2(\infty,1)}_\Lambda(\mathcal{M}) = Ch_\Lambda(\mathcal{M})$$

が証明されている。☑

---<o>---<o>---

ここらでBony-Schapiraの定理を証明してしまおう。

$\widetilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}$ には正則パラメーター付きのmicrofunctionの層 $\mathcal{C}\mathcal{O}$ がある。$\left(\widetilde{\Lambda}^{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{C}^d_z \times \sqrt{-1}\,\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n-d}\right.$ と同一視した時、z を正則パラメーターとして持つ。$\left.\right)$

$\mathcal{C}\mathcal{O}$ を以下 $\mathcal{C}_{\widetilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}}$ と記す。これをもとに、

定義 14

(24) $\mathcal{C}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} := \mathcal{H}^d_{T^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}}\left(\pi^{-1}_{\Lambda^{\mathbb{R}}|\widetilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}}\mathcal{C}_{\widetilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}}\right)^a$

$$\left(\begin{array}{llll} \text{但し} & \pi_{\Lambda^{\mathbb{R}}|\widetilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}} : \widetilde{\Lambda}^{\mathbb{R}*}_{\widetilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}} \longrightarrow \widetilde{\Lambda}^{\mathbb{R}} & \text{なる comonoidal 変換} \\ & a : T^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda}^{\mathbb{R}} \circlearrowleft & \text{なる antipodal map} \end{array}\right)$$

を上で用いた。

(25) $\mathcal{B}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} := \mathcal{C}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\Big|_{\Lambda^{\mathbb{R}}} = \mathcal{H}^d_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\left(\mathcal{C}_{\widetilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}}\right)$

(26) $\mathcal{O}\mathcal{C}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} := \mathcal{C}_{\widetilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}}\Big|_{\widetilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}}$

と定める。$\mathcal{C}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}$ のsectionを2-microfunction, $\mathcal{B}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}$ のsectionのことを2-hyperfunctionと呼ぶ☑

注意 15 (24), (25)に現われたcohomology群は純余次元的である☑

層 $\mathcal{C}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}$ の性質を列挙する。

1°

(27) $$0 \longrightarrow \mathcal{A}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} \longrightarrow \mathcal{B}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} \longrightarrow \pi_*\left(\mathcal{C}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\Big|_{\mathring{T}^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}}\right) \longrightarrow 0$$

(28) $$0 \longrightarrow \mathcal{C}_M|_{\Lambda^{\mathbb{R}}} \longrightarrow \mathcal{B}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}$$

なる exact sequence がある。

2° $\mathcal{C}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}$ には $\mathcal{E}^{2,\infty}_{\Lambda}$ が作用する。

——————<o>——————————<o>——————

$\mathcal{C}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}$ については柏原-Laurent [2] を参照されたい。

さて，Bony-Schapira の定理に現われた microdifferential operator P を考える。($\mathcal{M} = \mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P$ とする。)

(29) $$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X|_\Lambda}(\mathcal{M}, \mathcal{A}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X|_\Lambda}(\mathcal{M}, \mathcal{B}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}})$$
$$\longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X|_\Lambda}\left(\mathcal{M}, \pi_*\left(\mathcal{C}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\Big|_{\mathring{T}^*_\Lambda\tilde{\Lambda}}\right)\right)$$

なる exact sequence を得る。条件 (2)'' より

$$\mathrm{supp}\,\check{\mathcal{M}} \cap \mathring{T}^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}} = \phi \quad (\check{\mathcal{M}} = \mathcal{E}^2_\Lambda \otimes \pi^{-1}\mathcal{M})$$

であるので，

(30) $$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X|_{\Lambda^{\mathbb{R}}}}(\mathcal{M}, \pi_*(\mathcal{C}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}})) = 0$$

が言る。従って，

$$(31)\quad \begin{tikzcd}[column sep=small] \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X|_\Lambda}(\mathcal{M}, \mathcal{C}^2_\Lambda) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X|_\Lambda}(\mathcal{M}|_\Lambda, \mathcal{B}^2_\Lambda) \\ & \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X|_\Lambda}(\mathcal{M}|_\Lambda, \mathcal{C}_M|_\Lambda) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

より，任意のmicrofunction解が必ず正則パラメーターを持ち，正則パラメーターに関する接続の一意性を通して，特異性の伝播が起こることが分る。

§4. 2-microfunction について——消滅定理の紹介.

前節に現われた2-microfunctionを定義する為には，$\mathcal{C}_\Theta$ に対する"Edge of the wedge"が必要である。以下に紹介する，柏原-Laurent[2]による，抽象的な"Edge of the wedge"は，これから超函数論を勉強し始める人にも有用と思われる。その原型は柏原[15]に見られることも注意する。

——<◦>——<◦>——

今，T：位相空間として，functorialに

複素多様体 $X \rightsquigarrow$ $X \times T$ 上の $\mathbb{C}$ 線型空間の層 $\mathcal{F}_X$

なる対応が定まり，複素多様体の間の正則写像

$$\varphi : X \longrightarrow X'$$

に対して（$\psi = \varphi \times id_T$ とおいて）代入操作

$$\varphi^* : \psi^{-1}\mathcal{F}_{X'} \longrightarrow \mathcal{F}_X$$

が定まり，次の条件を満たすとする。

(H 1)（解析接続の一意性）

$\phi \neq V \subset U \subset X$ なる2つの開集合と，$W(\subset T)$ なる開集合に対して，U が連結とする時

$$\Gamma_{(U \setminus V) \times W}(U \times W, \mathcal{F}_X) = 0$$

(H 2) $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$（正則）に対して $Y = f^{-1}(0)$ とおく。

$f \not\equiv 0$，$df \not\equiv 0$ on Y と仮定する。

$$i : Y \hookrightarrow X$$

なる埋め込みに対して

$$0 \to \mathcal{F}_X \longrightarrow \mathcal{F}_X \xrightarrow{i^*} \mathcal{F}_Y \to 0 \quad \text{(exact)}$$

なる完全系列がある。

(H 3) X, Y : 2つの複素多様体，Y : compact

$$f : X \times Y \times T \longrightarrow X \times T \text{（自然な射影）}$$

と定めるとき，

$$R^q f_* \mathcal{F}_{X \times Y} = \mathcal{F}_X \underset{\mathbb{C}}{\otimes} H^q(Y, \mathcal{O}_Y) \qquad (\forall q \geq 0)$$

なる同型が定まる。

以上の仮定のもと，

<u>定理16</u>（柏原[15]，柏原－Laurent[2]）

(1) G を $\mathbb{C}^n$ の closed convex set で次の条件を満たすとする。即ち，$\mathbb{C}^n$ の $(n-q+1)$ 次元の $\mathbb{C}$ 線型部分多様体 L で $L \subset G$ なるものは存在しない。このとき，

W : Tの open set に対して,

$$H^k_{G\times W}(\mathbb{C}^n\times W, \mathcal{F}_{\mathbb{C}^n}) = 0 \quad (\forall k<g)$$

が成立する。

(2) K_1, K_2 : $\mathbb{C}^n$の compact 集合で

K_1 : 有理凸(後述), K_2 : 正則凸 なるものをとる。

このとき, W : Tの open set に対して

$$H^k_{(K_1\setminus K_2)\times W}((\mathbb{C}^n\setminus K_2)\times W, \mathcal{F}_{\mathbb{C}^n}) = 0 \quad (\forall k<n)$$

(3) G : closed convex set in $\mathbb{C}^n$, $x\in\mathbb{C}^n$ に対して, 次の①,②を満たす $(n-g+1)$次元の $\mathbb{C}^n$の $\mathbb{C}$線型多様体が存在しないと仮定する。即ち

① xを通る ② $L\cap G$ は xの Lにおける近傍。

このとき, $t\in T$ として

$$\mathcal{H}^k_{G\times T}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n})_{(x,t)} = 0 \quad (\forall k<g) \quad \square$$

ここで, 用いた有理凸の概念を定義する。

Proposition-definition 17.

$K\ (\subset\mathbb{C}^n)$ を compact set として, 次の K_1, K_2, K_3, K_4 は等しい。($\widetilde{K}$とおく。)

$$K_1 = \{x\in\mathbb{C}^n;\ \forall f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)\ |f(x)| \geqq \min_{y\in K} |f(y)|\ \}$$

$$K_2 = \{ x \in \mathbb{C}^n ;\ \forall f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \quad f(x) \in f(K) \}$$

$$K_3 = \left\{ x \in \mathbb{C}^n ;\ \forall f : \mathbb{C}^n \text{上の有理函数で } K \cup \{x\} \text{ 上正則に対して} \quad f(x) \leq \max_{y \in K} |f(y)| \right\}$$

$$K_4 = \left\{ x \in \mathbb{C}^n ;\ \forall f : \mathbb{C}^n \text{上の有理函数で } K \cup \{x\} \text{ 上正則に対して} \quad f(x) \in f(K) \right\}$$

$\widetilde{K}$をKの有理凸と呼び，$K=\widetilde{K}$なる時Kを有理凸と呼ぶ。$\boxed{\diagup}$

<○> ―――――― <○>

証明の雰囲気をつかんで頂く為に，(2)の証明の粗筋を紹介します。

定義18　X：複素多様体とする。G($\subset$ X)開集合が q-propre とは，任意の複素多様体 Y と の任意の開集合 W に対して

$$H^i_{G \times Y \times W}(X \times Y \times W ;\ \mathcal{F}_{X \times Y}) = 0 \quad (\forall i < q)$$

が成立することである。$\boxed{\diagup}$

次の命題は，Mittag-Leffler の論法より分る。

命題19　X を複素多様体とする。

(i) Z($\subset$ X)開集合，$\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$：X の開集合の増大列で $X = \bigcup_n U_n$ を満たすものとする。このとき，

"任意の n に対して $Z \cap U_n$ が q-propre"

$\Longrightarrow$ Z：q-propre.

(ii) $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: Xの閉集合の減少列とする。このとき,
"任意のnに対してZ_nがq-propre"
$\Rightarrow$ $Z=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ はq-propre ◪

さて(ii)の証明の粗筋を述べ始めよう。

命題20 Y: compactな複素多様体, G: Xの閉集合
K: Yの閉集合で$K\neq Y$とする。このとき,
Gがq-propre in X $\Rightarrow$ $G\times K$は$(q+1)$ propre in $X\times Y$

∵ まず次の長完全列を考える。

$$\to H^{i-1}_{G\times(Y\setminus K)\times W}(X\times Y\times W, \mathcal{F}_{X\times Y}) \to H^i_{G\times K\times W}(X\times Y\times W;\mathcal{F}_{X\times Y}) \to H^i_{G\times Y\times W}(X\times Y\times W;\mathcal{F}_{X\times Y}) \to$$

ここでGがq-propreであるので,

$$H^i_{G\times K\times W}(X\times Y\times W, \mathcal{F}_{X\times Y})=0 \quad (i<q)$$

が分る。よって, $i=q$においても消滅するためには

$$0\to H^q_{G\times K\times W}(X\times Y\times W;\mathcal{F}) \to H^q_{G\times Y\times W}(X\times Y\times W;\mathcal{F}) \xrightarrow{\lambda} H^q_{G\times(Y\setminus K)\times W}(X\times Y\times W;\mathcal{F})$$

においてλが単射であることを述べるとよい。

① Gがq-propre故に $H^i_{G\times W}(X\times W;\mathcal{F}_X)=0 \ (i<q)$

② (H_3)より $R^jf_*\mathcal{F}_{X\times Y}\simeq \mathcal{F}_X\underset{\mathbb{C}}{\otimes} H^j(Y,\mathcal{O}_Y)$

なる事実を用いて, spectral sequence

$$E^2_{ij}:=H^i_{G\times W}(X\times W;R^jf_*\mathcal{F}_{X\times Y}) \Rightarrow H^{i+j}_{G\times Y\times W}(X\times Y\times W;\mathcal{F}_{X\times Y})$$

を考えると

$$H^q_{G\times W}(X\times W, \mathcal{F}_X) \xrightarrow{\sim} H^q_{G\times Y\times W}(X\times Y\times W; \mathcal{F}_{X\times Y})$$

が分る。ここで，$y_0\in Y\setminus K$ をとり，代入操作

$$\mathcal{F}_{X\times(Y-K)} \longrightarrow \mathcal{F}_{X\times\{y_0\}}$$

により，次の diagram が可換となる。

$$\begin{tikzcd}
H^q_{G\times Y\times W}(X\times Y\times W; \mathcal{F}_{X\times Y}) \arrow[r, "\lambda"] & H^q(X\times(Y\setminus K)\times W; \mathcal{F}_{X\times Y}) \arrow[dl] \\
H^q_{G\times W}(X\times W, \mathcal{F}_X) \arrow[u, "\wr"] &
\end{tikzcd}$$

すると，λ が単調的なのはすぐ分り，命題 20を証明した。$\boxed{}$

命題20の容易な系として，

系21 $K_1, \cdots, K_n$: $\mathbb{C}$ の compact 集合，X : 連結な複素多様体 $G\ (\subsetneq X)$ 開集合．とする。この時，
$G\times K_1\times\cdots\times K_n$ は $X\times\mathbb{C}^n$ 中 $(n+1)$ propre である。

命題20ともう一つ key となる命題を用意する。

命題22. $Z : (\subset X)$ 閉集合，
$f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ (正則)，$df \neq 0$ on $Y := f^{-1}(0)$ とする。
この時，
Z が q-propre $\Rightarrow$ $Z\cap Y$ は $(q-1)$ propre $\boxed{}$

証明は，$0 \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x \xrightarrow{i^*} \mathcal{F}_Y \to 0$　なる短完全列による長完全列を用いるとよい。

まず，命題19，20，22を用いて次の命題を証明する。以下の証明は大変美しい。

命題23　$K\ (\subset \mathbb{C}^n)$：有理凸な compact set

$\Omega\ (\subset \mathbb{C})$：連結な開集合，$Z\ (\subsetneqq \Omega)$：閉集合

とする時，

$$\begin{cases} 1^\circ & K \text{ は } n\text{-propre in } \mathbb{C}^n \\ 2^\circ & K \times Z \text{ は } (n+1) \text{ propre in } \mathbb{C}^{n+1} \end{cases}$$

∵ 初めから

$$K \subset \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z_j| \leqq 1 \quad (j=1,\cdots,n)\}$$

と仮定してよい。$j=1,\cdots,n$ に対して $f_j(z)=z_j$，$a_j=0$ とおく。

K は有理凸であるから，$\exists \{f_j(z)\}_{j \geqq n} \subset \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ があり

$$K = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C}^n;\ a_k \leqq |f_k(z)| \leqq 1\}$$

と書ける。$N \geqq n$ なる N に対して

$$K_N = \bigcap_{1 \leqq k \leqq N} \{z \in \mathbb{C}^n;\ a_k \leqq |f_k(z)| \leqq 1\}$$

と定める。

命題20の系によると

$T_N = \{z \in \mathbb{C}^N;\ a_k \leqq |z_k| \leqq 1 \quad (j=1,\cdots,N)\}$ とおくと，

$T_N \times Z$ は $(N+1)$ propre in $\mathbb{C}^N \times \Omega$ である。

$$Y_N = \{ z \in \mathbb{C}^N ;\ z_j = f_j(z_1, \cdots z_n) \quad (n+1 \leq j \leq N) \}$$

と定めると，命題22により

$(Y_N \cap T_N) \times Z$ は $(N+1)-(N-n) (= n+1)$ propre in $Y_N \times \Omega$.

$$\pi : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^n \qquad (z_1, \cdots z_N) \longrightarrow (z_1, \cdots z_n)$$

を通じて

$$\begin{array}{ccc} Y^N & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}^n \\ \cup & & \cup \\ T_N \cap Y_N & \xrightarrow{\sim} & K_N \end{array}$$

が分るので，$K_N \times Z$ は $(n+1)$ propre in $\mathbb{C}^n \times Z$ である。

$N \longrightarrow \infty$ とする時，命題19を用いると

$K \times Z$ は $(n+1)$ propre in $\mathbb{C}^n \times Z$ である。

再び命題22を用いると K は n-propre in $\mathbb{C}^n$ であることが分る。$\boxtimes$

注意.24　同様の証明で，命題23において

K を正則凸，または L_1：有理凸，L_2：正則凸として

$K = L_1 \cap L_2$

とする場合でも主張は正しい。$\boxtimes$

((ii)の証明)次の長完全列 ($W \subset T$ 開集合とする。)

$$\to H^i_{(K_1 \cap K_2) \times W}(\mathbb{C}^n \times W ; \mathcal{F}_{\mathbb{C}^n}) \longrightarrow H^i_{K_1 \times W}(\mathbb{C}^n \times W ; \mathcal{F}_{\mathbb{C}^n}) \longrightarrow H^i_{K_1 \setminus K_2 \times W}((\mathbb{C}^n \setminus K_2) \times W ; \mathcal{F}_{\mathbb{C}^n}) \to$$

と

$$H^i_{K_1 \times W}(\mathbb{C}^n \times W ; \mathcal{F}_{\mathbb{C}^n}) = H^i_{K_1 \cap K_2 \times W}(\mathbb{C}^n \times W ; \mathcal{F}_{\mathbb{C}^n}) = 0 \quad (i < n)$$

を用いると,

$$H^{i}_{(K_1\setminus K_2)\times W}(\mathbb{C}^n\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n})=0 \quad (\text{for } i<n-1)$$

であることが分る。あとは,

$$H^{n}_{(K_2\cap K_1)\times W}(\mathbb{C}^n\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n}) \longrightarrow H^{n}_{K_1\times W}(\mathbb{C}^n\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n})$$

が単射であることを示せばよい。初めから,

$$K_2\subset\{|z_j|\leqq 1 \ (j=1,\cdots,n)\}$$

と仮定してよい。$f_j(z)=z_j \ (j=1,\cdots,n)$ とおく。$\{f_k\}_{k\geqq n}\subset\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ があり,

$$K_2=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\{z\in\mathbb{C}^n;\ |f_k(z)|\leqq 1\}$$

とかける。$N\geqq n$ なる N に対して

$$K_N=K_1\cap\bigcap_{1\leqq k\leqq N}\{z\in\mathbb{C}^n;\ |f_k(z)|\leqq 1\}$$

と定める。

$$\begin{aligned}K_{N-1}\setminus K_N&=\{z\in K_{N-1};\ |f_N(z)|>1\}\\&=\{z\in K_{N-1};\ 1<|f_N(z)|\leqq a\}\ (a\text{を十分大に選ぶ})\end{aligned}$$

とおける。

K_{N-1} は正則凸と有理凸な2つの compact 集合の共通部分であるから,

$$K_{N-1}\times\{t\in\mathbb{C};\ 1<|t|\leqq a\}$$

は $(n+1)$ propre in $\mathbb{C}^n\times\{1<|t|\leqq a\}$ であることが分る。

$\mathbb{C}^n\times\{1<|t|\leqq a\}$ 中 $\{f_N(z)=t\}$ なる非特異な超曲面に制限して考えると，$K_{N-1}\setminus K_N$ は n-propre であることが分る。よって，

$$H^n_{K_N\times W}(\mathbb{C}^n\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n})\longrightarrow H^n_{K_{N-1}\times W}(\mathbb{C}^n\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n})$$

は単射的である。$K_N=K_1$ だから，任意の $n\leq N$ なる N に対して

$$H^n_{K_N\times W}(\mathbb{C}^n\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n})\longrightarrow H^n_{K_1\times W}(\mathbb{C}^n\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n})$$

は単射的である。故に，

$$\varprojlim_N H^n_{K_N\times W}(\mathbb{C}^n\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n})\longrightarrow H^n_{K_1\times W}(\mathbb{C}^n\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n})$$

は単射的である。

一方 K_N は n propre であるので

$$\varprojlim_N H^n_{K_N\times W}(\mathbb{C}^n\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n})\xrightarrow{\sim} H^n_{K_1\cap K_2}(\mathbb{C}^n\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n})$$

であるので，問題となっている単射性が示された。 $\boxtimes$

（定理16の(ii)の証明の粗筋了）

この節で述べた消滅定理により，前節で定義した 2-micro 函数の層 $\mathcal{C}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}$，2-hyperfunction の層 $\mathcal{B}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}$ が純余次元的に定義できることが分る。これらの層の性質を紹介しよう。

1° $\mathring{T}^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi'} \Lambda^{\mathbb{R}}$ として,

(31) $0 \to \mathcal{O}\ell^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} \to \mathcal{B}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} \to \pi'_*\left(\mathcal{C}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\big|_{\mathring{T}^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}}\right) \to 0$ (exact)

(32) $0 \to \mathcal{C}_M|_{\Lambda^{\mathbb{R}}} \to \mathcal{B}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}$ (exact)

なる完全系列がある。

2° $T^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi} \Lambda^{\mathbb{R}}$ として

$$\pi^{-1}\mathcal{B}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} \xrightarrow{sp} \mathcal{C}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}$$

なる規範的な射がある。

$$SS^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}(u) = \operatorname{supp}(sp(u)) \quad (\text{for } u \in \mathcal{B}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}})$$

と定める時,

$$\begin{cases} ① \quad SS^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}(u) = \phi \Rightarrow u = 0 \\ ② \quad SS^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}(u) \cap \Lambda^{\mathbb{R}} = \operatorname{supp} u \\ ③ \quad SS^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}(u) \subset \Lambda^{\mathbb{R}} \Rightarrow u \in \mathcal{O}\ell^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} \end{cases}$$

が成立する。

次に, $\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}}$ の境界値表示について述べる。前節の状況で,話を進める。

$\Lambda^{\mathbb{R}} = \{(x, y; \sqrt{-1}(\xi dx + \eta dy) \in \sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^n;\ \xi = 0\}$

$T^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}$ の座標として $(x, y; \sqrt{-1}\eta dy; \sqrt{-1}x^* dx)$ なるものをとる。

$$j: \tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}} \setminus \Lambda^{\mathbb{R}} \hookrightarrow \widetilde{{}^{\Lambda^{\mathbb{R}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}} = (\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}} \setminus \Lambda^{\mathbb{R}}) \sqcup S_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}$$

$$i: \tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}} \setminus \Lambda^{\mathbb{R}} \hookrightarrow (\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}} \setminus \Lambda^{\mathbb{R}}) \sqcup T_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{R}}$$

とモノイダル変換を定める。

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{C}}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} := \left(j_*\left(\mathcal{C}_{\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}}}\big|_{\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}}\setminus\Lambda^{\mathbb{R}}}\right)\right)\Big|_{S_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}}} \\ \widetilde{\widetilde{\mathcal{C}}}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} := \left(i_*\left(\mathcal{C}_{\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}}}\big|_{\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}}\setminus\Lambda^{\mathbb{R}}}\right)\right)\Big|_{T_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}}} \end{cases}$$

と定める。

$$D_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}} := \left\{ \begin{array}{l} (x,y;\sqrt{-1}\eta dy;\sqrt{-1}x^* dx\infty;\sqrt{-1}\widetilde{x^*}\tfrac{\partial}{\partial x}0) \in S^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}} \times_{\Lambda^{\mathbb{R}}} S_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}}; \\ \qquad \langle x^*, \widetilde{x^*} \rangle \leqq 0 \end{array} \right\}$$

と定義する。

$$\begin{tikzcd} & D_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ S_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}} \arrow[dr, "\tau"'] & & S^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}} \arrow[dl, "\pi"] \\ & \Lambda^{\mathbb{R}} & \end{tikzcd}$$

以上の準備のもと、

1° $\alpha : \widetilde{\widetilde{\mathcal{C}}}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} \longrightarrow \tau^{-1}\mathcal{B}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}$

(但し $T_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}} \xrightarrow{\tau} \Lambda^{\mathbb{R}}$)

なる規範的な morphism がある。(境界値写像)

2° $\widetilde{\mathcal{C}}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} := \gamma_*\left(\mathcal{C}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\big|_{T^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}}\setminus\Lambda^{\mathbb{R}}}\right)$ (但し $\gamma : \mathring{T}^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}} \to S^*_{\Lambda^{\mathbb{R}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{R}}}$)

とする時、

$$0 \to \widetilde{\mathcal{C}}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} \to \tau^{-1}\mathcal{B}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} \to \pi_*\tau^{-1}\widetilde{\mathcal{C}}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}} \to 0$$

なる完全系列がある。更に、

3° V : open convex cone in $T_\Lambda\widetilde{\Lambda}$ とする。

① $\varphi \in \Gamma(V; \widetilde{\widetilde{\mathcal{C}}}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}) \Rightarrow SS^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}(\alpha(\varphi)) \subset V^\circ$

② $u \in \Gamma(\tau V, \mathcal{B}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}})$, $SS^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}(u) \subset V^\circ$

$$\Rightarrow \quad \exists ! \quad \varphi \in \Gamma(V, \widetilde{\mathcal{C}}^2_{\Lambda^R}) \quad \text{s.t} \quad u = \alpha(\varphi).$$

注意.25

柏原－Y. Laurent [2] における α の構成において，cohomology 消滅定理で少しおかしいと思われる所（少なくとも筆者にとって）があったが，野呂正行君によりその点は補なわれた。即ち，野呂君は次の global な消滅定理を証明した。

定理26（野呂 [9]）

$\widetilde{\Lambda^R} \simeq \mathbb{C}^d \times \sqrt{-1}\,\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n-d}$ と同一視する。

$D \subset \mathbb{C}^d$: Stein open set，$V \subset \sqrt{-1}\,\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n-d}$: open, propre convex

$\Rightarrow H^j(V \times D, \mathcal{C}\mathcal{O}) = 0 \quad (j \geq 1)$ ☐

野呂君は更に $\mathcal{C}^2_{\Lambda^R}$ 及び $\mathcal{B}^2_{\Lambda^R}$ の Radon 変換を考えた。[9] 及び近刊となる [10] を見られたい。

2－microfunction については柏原－Laurent [2] を見られたい。

§5. これから

1° 応用として，筆者は Microlocal に

(33) $P_0 u = (D_1 \; D_2 + (\text{低階}))\, u = 0$

なる，標準形を持つ Microdifferential equation で $(0, dz_3) \in T^*\mathbb{C}^n$ で定義されているものの，2－microlocalization における標準形を考えた。

(34) $\quad \Lambda = \{(z, \zeta dz) \in T^*\mathbb{C}^n;\ \zeta_1 = \zeta_2 = 0\}$

にそって 2-microlocalizationを考える。すると

定理27 (戸瀬[12], [13])

$(0; dz_3; dz_2) \in T^*_\Lambda \tilde{\Lambda}$ の近傍において，可逆な $\mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda$ の section Q が存在して，

(35) $$Q\,P_0 Q^{-1} = D_1$$

が成立する。

$(0; dz_3; dz_1)$ においても同様のことが成立する。$\boxtimes$

更に，(33) の multiplicity を上げた

(35) $P_1 u = \left(D_1^{m_1} D_2^{m_2} + (\text{低階})\right) u = 0$

なる方程式に対して，

(36) "P_1 が Λ に沿って柏原－大島の意味で R.S. を持つ"

と仮定すると，次の定理が成立する。

定理28 (戸瀬[12], [14])

$(0; dz_3; dz_2) \in T^*_\Lambda \tilde{\Lambda}$ の近傍において，

(37) $$\mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda / \mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda P_1 \;\overset{\sim}{\longrightarrow}\; \left(\mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda / \mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda D_1\right)^{m_1}$$

なる同型がある。

$(0; dz_3; dz_1) \in T^*_\Lambda \tilde{\Lambda}$ の近傍においては，

(38) $$\mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda / \mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda P_1 \;\overset{\sim}{\longrightarrow}\; \left(\mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda / \mathcal{E}^{2,\infty}_\Lambda D_2\right)^{m_2}$$

なる同型がある。☐

上の定理27, 28を用いて、(34), (35)が $(0;\sqrt{-1}dx_3)\in\sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^n$ の近傍で定義されているとした時、micro函数解の伝播に関する結果を、2-microlocal singularity の伝播を用いて、精密化出来る。

2° Bony は[7]において、microlocal な Holmgren の定理を証明した。野呂正行は[9]（[10]も参照されたい。）において、ラドン変換を用いる証明を与えた。

戸瀬[11]において、Holmgren の定理は次のように拡張されている。

(39) $\Lambda^{\mathbb{R}}=\{(x;y;\sqrt{-1}(\xi dx+\eta dy));\xi=0\}\subset\sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^n$ $\left(\begin{array}{l}x\in\mathbb{R}^d\\ y\in\mathbb{R}^{n-d}\text{ とする。}\end{array}\right)$

を定める。$\mathring{q}=(0;\mathring{y};\sqrt{-1}\mathring{\eta}\,dy)\in\Lambda^{\mathbb{R}}$ とする。$(\eta\neq 0)$

定理29（戸瀬[11]）　$u\in\mathcal{B}^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}$ で

(40) $\operatorname{supp}u\subset\{(x,y,\sqrt{-1}\eta dy)\in\Lambda^{\mathbb{R}};\ x_1\geqq 0\}$

をみたすものをとる。この時、

$$(0,\mathring{y};\sqrt{-1}\mathring{\eta}\,dy;\sqrt{-1}(\mathring{x}_1^*dx_1+\mathring{x}'^*dx'))\in SS^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}(u)$$

$$\Rightarrow\quad(0,\mathring{y};\sqrt{-1}\mathring{\eta}\,dy;\sqrt{-1}(x_1^*dx_1+\mathring{x}'^*dx'))\in SS^2_{\Lambda^{\mathbb{R}}}(u)$$

$$(\forall\, x_1^*\in\mathbb{R})$$

但し、$x'^*=(x_2^*,\cdots,x_d^*)$ とする。

野呂正行は[10]において別証明を与えた。

§6. 最後に

僕が 2-microlocalization に手を染めたのは，僕が修士に入る前の春休みの頃でした。田島，青木，大阿久の三先輩と Laurent の学位論文を勉強し始めたのでした。それをきっかけとして，2-microlocalization について修士論文を仕上げることが出来たのでした。この場を借りて，三先輩に感謝します。*)

さて，このノートは1984年の6月に東大の代数解析セミナーで，2-microlocalization の紹介を行なった時のノートをもとにしました。余り，originality のない，紹介ばかりのノートですが，修士を卒業した記念に青木さんの研究集会の講究録にのせて頂くことにしました。このノートを機に，2-microlocalization の応用が展開されるのならば，このよない幸です。

(1985年11月　T.N.)

*) 編集者注：その時 Laurent の論文をいちばんよく理解したのは戸瀬君本人で，以後自分の仕事に積極的に役立てたのも勉強会に参加した4人の中では戸瀬君だけです。

[1] 柏原 : Nice での講演 (1973)

[2] 柏原 -Y.Laurent : Theoemes d'annulation et Deuxieme Microlocalisation, Prepublication d'Orsay (1983)

[3] J.M.Bony-P.Schapira : Propagation des singularites analytique pour les solutions des equations aux derives partielles, Ann. Inst. Fourier, 26 (1976), p.81-140

[4] 柏原-P.Schapira : Probleme de Cauchy pour les systemes microdifferentielles dans le domaine complexe, Invent. Math., 46 (1978), p.17-38.

[5] 柏原-P.Schapira : Microhyperbolic systems, Acta Math., 142(1979), p.1-55.

[6] Y.Laurent : Theorie de la deuxieme microlocalisation dans le domaine complexe; operateurs 2-micro- fferentiel differentielles, These presentee a Universite Paris-Sud, (published as Progress in Math. vol.53, Birkhauser,1985)

See also,

-: Deuxiemes microlocalisation: Operateurs 2-micro-differentielles, C.R.Acad.Sci.t.290,I,79-82(1980)

-: Deuxiemes microlocalisation: Systemes d'equations 2-microdifferentielles, C.R.Acad.Sci.t.290,I,147-150 (1980)

-: Deuxiemes Microlocalisation, Proc. of Les Houches 1979, Lecture Note in Physics n° 126, p.77-89, Springer.

-: Deuxieme Microlocalisation : Condition de Levi pour un systeme, Seminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1980-81, expose XV.

[7] J.M.Bony: Extensions du theoreme de Holmgren, Seminaire Goulaouic-Schwartz 1975-76, expose 17.

[8] Whytney: Tangent to an analytic variety, Ann. of Math. 81(1964),p.496-549.

[9] 野呂：2超函数のラドン変換とその応用，東京大学修士論文（1985年3月）

[10] 野呂：1985年京大数理研における「代数解析学の現況」の講究録 (to appear)

[11] 戸瀬：Partially elliptic system に対するマイクロ境界値問題とその応用 東大修士論文(1985年3月)

[12] 戸瀬：Double Characteristic を持つ Microdifferential eq. のあるクラスに関する考察 東大修士論文(1985年3月)

[13] 戸瀬：On a class of microdifferential equations with involutory double characteristics, Preprint.

[14] 戸瀬：2-microlocal Canonical Form for a class of Microdifferential Equations and Propagation of Singularities, Preprint.

[15] 柏原：超函数論の代数的基礎付け，数理研講究録108, p. 58-71