数理解析研究所講究録
第 578 巻 1985 年 152-162


# 無限階作用素の可逆性と可解性

近畿大理工　青木貴史（AOKI Takashi）

微分方程式論において可解性すなわち解が存在するかどうかはもっとも基本的な問題である．以下では正則函数を係数とする無限階の微分方程式についてこの問題を考察する．有限階の作用素の場合正則函数における局所可解性は作用素が非退化の場合 Cauchy－Kowalevsky の定理により保証される．しかし同じ論法は無限階の場合に拡張できない．そもそも無限階方程式に対する Cauchy－Kowalevsky の定理が，少くとも有限階の形式的な拡張という形では存在し得ない．実際，無限個の初期条件は方程式とは無関係にそれを満たす函数を高々ひとつに限定してしまう．従って無限階方程式の局所可解性を論じるには別のアプローチを捜す必要がある．今のところこれには二つの路が考えられる．まず第一は定数係数の場合の論法を拡張することである．定数係数無限階の方程式についてはその可解性が知られている（［Iｲ］，［M］等参照）がそこで用いられる論法は値域が閉じていることと dual map

が単射であることから全射性を出すという函数解析的なものである．この論法を変数係数に拡張したものに[I2, I3]がある．第二の路は次の点に注目する．すなわち，有限階の場合Cauchy-Kowalevskyの定理は考えている作用素の擬微分作用素としての逆を構成することと密接に関係している．ところが逆の構成に関しては無限階の作用素に対しても有限階と同様の結果が得られている[A2, A3]．そこで擬微分作用素としての逆を何らかの形で用いて解を構成することにより可解性を示すことはできないかを考える――これが第二の路である．この小論では第二の路から局所可解性にアプローチし，可解性のひとつの十分条件を与えることが目標である．簡単の為すべて一変数の場合に述べるが多変数の場合も同様の結果が成り立つ．これについてはまだ結果が整理できていないので別の機会に譲ることにする．

## 1. 無限階微分作用素の形式逆．

まず記号を定めておこう．$\mathbb{C}$の原点の近傍$X$で定義された（有限階または無限階の）微分作用素

$$P(x, D) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) D^j$$

$$\left( D = \frac{d}{dx}, \quad a_j \in \mathcal{O}(X), \ j = 0, 1, 2, \cdots \right)$$

を考える．これが微分作用素であるということは$a_j$に対す

る評価 $\lim_{j\to\infty} j\sqrt[j]{|a_j(x)|}=0$ （X上局所一様）が成り立つことでありこれはまたPの全表象 $P(x,\xi)$ に対する評価：$\forall\varepsilon>0\ \exists C_\varepsilon>0\quad |P(x,\xi)|\leq Ce^{\varepsilon|\xi|}$ とも同値であることを思い出しておこう．

無限階作用素に対する可逆性定理［A2, A3, AKK］から次の定理が得られる．用語については［Ai］(∀i) 参照．

**定理 1** 原点の近傍 $U\subset X$，開錐 $\Omega\subset\mathbb{C}$，定数 $R>0$ が存在して $U\times(\Omega\cap\{|\xi|>R\})\subset T^*X=X\times\mathbb{C}$ において $P(x,\xi)\neq 0$ とする．このとき $U\times\Omega$ で定義された形式表象 $Q(t;x,\xi)$ が存在して

$$P(x,\xi)\circ Q(t;x,\xi)=1$$

が成り立つ．ただし $\circ$ は形式表象の結合

$$P(x,\xi)\circ Q(t;x,\xi)=\exp(t\partial_\xi\partial_y)P(x,\xi)Q(t;y,\eta)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}}$$

を表わす．

## 2. 楔における解の構成

Pは前節と同様とする．$f\in\mathcal{O}(X)$ を与えられた函数として微分方程式

$$(1)\qquad P(x,D)u(x)=f(x)$$

を考えよう．これが解を持つための十分条件を見出したい．

形式的には (1) から $u(x) = P(x, D)^{-1} f(x)$ として解 $u$ を得たいのであるがこれをいかに意味付けするかが問題となる。ひとつのこたえは次で与えられる。

定理 2　原点の近傍 $U \subset X$, proper な閉錐 $\Gamma \subset \mathbb{C}$ および定数 $R > 0$ が存在して $x \in U$ のとき $P(x, \xi) = 0$ ならば $\xi \in \Gamma \cup \{|\xi| \leq R\}$ であったとする。このとき閉錐 $\Gamma'$, 定数 $\delta$ が存在して (1) は各 $f \in \mathcal{O}(X)$ について解 $u \in \mathcal{O}(\Gamma' \cap \{x \mid |x| < \delta\})$ を持つ。

ひと口で言えば全表象 $P(x, \xi)$ の零点が有界な所をのぞき半空間より少し狭い所に集中していれば楔形の領域で可解ということになるが、以下の証明からわかるように $\Gamma'$ は $\Gamma$ の双対錐と思ってよい。仮定は座標に依らないことも注意しておく。

定理 2 の証明　$f$ の原点中心の Taylor 展開を

(2)
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$$

とし、簡単のため $f_k$ は評価 $|f_k| \leq B \rho^{-k}$ ($B, \rho$ は正の定数) をみたすとする。この時 $f$ の Taylor 展開の収束半径は少くとも $\rho$ である。仮定および定理 1 より $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ とおくとき $U \times \Omega$ で定義された形式表象 $Q(t; x, \xi)$ で

(3) $$P(x,\xi)\circ Q(t;x,\xi)=1$$

となるものが存在する．形式表象の定義から任意の $K \subset\subset U$，$\Omega' \subset\subset \Omega$（部分錐）に対して定数 $A \in ]0,1[$，$d>0$，および $\lim_{|\xi|\to\infty} \Lambda(\xi)/|\xi|=0$ なる函数 $\Lambda:\Omega\to\mathbb{R}^+$ が存在して各 $j=0,1,2,\cdots$ および $(x,\xi)\in K\times(\Omega'\cap\{|\xi|\geq(j+1)d\})$ に対して評価

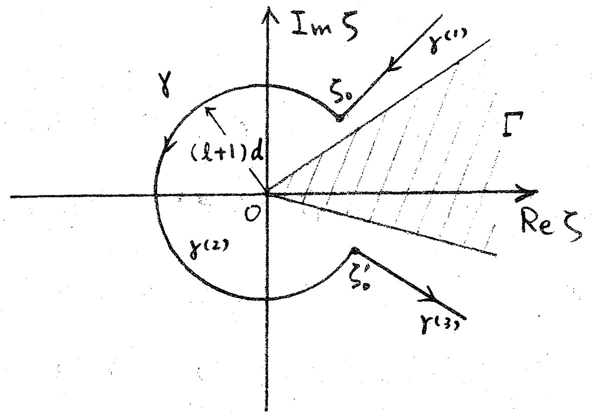
(4) $$|Q_j(x,\xi)| \leq A^j \exp(\Lambda(\xi))$$

が成り立つ．ここに $Q_j$ は $Q(t;x,\xi)$ における $t^j$ の係数を表わす．

さて $f$ に対して (1) の解 $u$ を

(5) $$u(x)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{l=0}^{\infty}\int_{\gamma}\sum_{j+k=l} Q_j(x,\zeta)\,k!\,f_k\,\zeta^{-k-1}e^{x\zeta}\,d\zeta$$

という形で求める．形式的には $f$ の Fourier 変換に $P$ の逆の表象をかけて逆 Fourier 変換したものだから意味付けができれば"解"になっていることは見易い．積分路 $\gamma$ は $l$ を固定したとき下図の如くとる．$\gamma=\gamma^{(1)}+\gamma^{(2)}+\gamma^{(3)}$ とわける．ただし $\gamma^{(1)}$，$\gamma^{(3)}$ は図の様に半直線部分，$\gamma^{(2)}$ は半径が $(l+1)d$ の円弧である．各 $\gamma^{(i)}$ 上の積分を評価してゆく．



(i) $\gamma^{(2)}$ 上の積分

まず任意の $h>0$ に対し $\lambda(\xi) \leq h|\xi| + H$ なる $H$ が存在することに注意する. (2), (4) と $\gamma^{(2)}$ 上 $|\zeta^{-1}| = (l+1)^{-1} d^{-1}$ をあわせて

$$\left| \int_{\gamma^{(2)}} \sum_{j+k=l} Q_j(x,\zeta)\, k!\, f_k\, \zeta^{-k} e^{x\cdot\zeta}\, d\zeta \right|$$

$$\leq \sum_{j+k=l} A^j \exp(h(l+1)d + H)\cdot k!\, B\rho^{-k}(l+1)^{-k} d^{-k} \times$$

$$\times \exp(|x|(l+1)d)\cdot 2\pi$$

$$\leq 2\pi e^H B \sum_{j+k=l} A^j \cdot (\rho d)^{-k} \exp((h+|x|)(l+1)d)$$

$$\leq C_h A^l \exp((h+|x|)(l+1)d)$$

ただし, $d$ は十分大としてよいから $\rho d > A$, また $C_h$ は $h, \rho, d$ に依存する定数である. この評価から $\gamma^{(2)}$ 上の積分は $l$ について和をとったとき $|x| < -\dfrac{\log A}{d}$ ( $0<A<1$, および $h>0$ は任意であることに注意) で収束する.

(ii) $\gamma^{(1)}$ 上の積分 $\zeta = (l+1)\zeta_0 r$, $|\zeta_0| = d$ と変数変換すると

$$\left| \int_{\gamma^{(1)}} \sum_{j+k=l} Q_j(x,\zeta)\, k!\, f_k\, \zeta^{-k} e^{x\zeta}\, d\zeta \right|$$

$$\leq \int_1^\infty \sum A^j \exp((h + \mathrm{Re}\, x\cdot\zeta_0)(l+1) r\cdot d + H)\, k!\, B\rho^{-k}(l+1)^{-k} d^{-k} r^{-k-1} dr$$

$$\leq e^{H} B \sum_{j+k=l} A^{j} (\rho d)^{-k} \int_{1}^{\infty} \exp((h + \mathrm{Re}\, x\cdot\zeta_0)(l+1) r \cdot d)\, dr$$

指数函数の積分は $h + \mathrm{Re}\, x\cdot\zeta_0 < 0$ なる $x$ については収束して上式は

$$\leq C'_h A^{l} \cdot (|h + \mathrm{Re}\, x\cdot\zeta_0| (l+1) d)^{-1} \exp((h + \mathrm{Re}\, x\cdot\zeta_0)(l+1) d)$$

と評価される. $h$ は任意だから結局 $\gamma^{(1)}$ 上の積分は $l$ について和をとったとき $\mathrm{Re}\, x\cdot\zeta_0 < 0$ でコンパクト一様収束する.

同様に $\gamma^{(3)}$ 上の積分は $\zeta_0'$ を $\gamma^{(3)}$ の起点としたとき $\mathrm{Re}\, x\cdot\zeta_0' < 0$ で収束し, $l$ についての和もここでコンパクト一様収束する.

(i), (ii) より $\Gamma' = \{ x \mid \mathrm{Re}\, x\cdot\zeta_0 < 0,\ \mathrm{Re}\, x\cdot\zeta_0' < 0 \}$ とおくとき (5) は $\Gamma' \cap \{ |x| < -\log A / d \}$ でコンパクト一様収束する. $u$ が実際解であることを見よう. (5) における積分路 $\gamma$ は評価を出すために $l$ に依存して選んだが実際には積分の値は被積分函数の正則域で変形可能だから一定に取れる. 従って (5) は

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j,k} \int_{\gamma} Q_j(x,\zeta)\, k!\, f_k\, \zeta^{-k-1} e^{x\cdot\zeta}\, d\zeta$$

とかいてよい. この両辺に $P(x, D)$ を作用させると

$$P(x,D) u(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j,k} \int_{\gamma} k!\, f_k\, \zeta^{-k-1} P(x,D)(Q_j(x,\zeta) e^{x\cdot\zeta})\, d\zeta.$$

$P(x,D)(Q_j(x,\zeta)e^{x\zeta})$ を作用素としての結合 $P(x,D)Q(x,\zeta)$（$\zeta$はパラメータとみて）を $e^{x\zeta}$ に作用したものとみなすと Leibniz 則から

$$P(x,D)(Q_j(x,\zeta)e^{x\zeta})$$

$$= :\sum_m \frac{1}{m!}\partial_\xi^m P(x,\xi)\partial_x^m Q_j(x,\zeta): e^{x\zeta}$$

$$= \sum_m \frac{1}{m!}\partial_\zeta^m P(x,\zeta)\cdot\partial_x^m Q_j(x,\zeta)e^{x\zeta}$$

ただし $\xi$ は形式表象の束縛変数，: : は正規積を表わす（[Ai] $\forall_i$ 参照）　また，$P$ が微分作用素であることから この和は収束している．よって

$$P(x,D)u(x)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j,k}\int_\gamma \sum_m \frac{1}{m!}\partial_\zeta^m P(x,\zeta)\cdot\partial_x^m Q_j(x,\zeta)\,k!\,f_k\zeta^{-k-1}e^{x\cdot\zeta}d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_k\sum_{j,m}\int_\gamma \frac{1}{m!}\partial_\zeta^m P(x,\zeta)\cdot\partial_x^m Q_j(x,\zeta)k!f_k\zeta^{-k-1}e^{x\zeta}d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_k\sum_l\int_\gamma\sum_{j+m=l} \frac{1}{m!}\partial_\xi^m P(x,\zeta)\partial_x^m Q_j(x,\zeta)k!\,f_k\zeta^{-k-1}e^{x\zeta}d\zeta$$

(3) より $\displaystyle\sum_{j+m=l}\frac{1}{m!}\partial_\xi^m P(x,\zeta)\partial_x^m Q_j(x,\zeta) = \begin{cases} 1 & l=0 \\ 0 & l\neq 0\end{cases}$

であるから結局

$$P(x, D)u(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_k \int_\gamma k!\, f_k \zeta^{-k-1} e^{x\cdot\zeta}\, d\zeta$$

$$= \sum_k f_k x^k$$

$$= f(x)$$

が成り立つ．よって定理2が示された．

## 3. 局所可解性

定理2およびその証明からただちに次の定理が得られる．

定理3. 定理2と同じ仮定のもとに $P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ は全射である．即ち方程式(1)は局所的に可解である．

証明 $v_0$ を $-v_0 \in \Gamma'$, $|v_0| < \varepsilon$ （$\varepsilon$ 十分小）に選ぶ．$v_0$ を原点にとり直して定理2を適用する．定理の仮定は微小な平行移動だけだから問題ない．この時 $f$ の新しい原点における Taylor 展開の収束半径は少なくとも $\rho - \varepsilon$．従って定理2を適用して構成される解は $(\Gamma' + v_0) \cap \{|x - v_0| < -\log A/d\}$ で収束．これが（もとの）原点を含んでいればよいが，それは $\varepsilon$ を十分小さく（$\varepsilon < \rho|\log A|/(1+|\log A|)$ で十分）とれば可能である．よって定理が示された．

# 参考文献


[A1] Aoki, T., Symbols and formal symbols of pseudo-differential operators, Adv. Studies in Pure Math., 4 (1984), 181 - 208

[A2] ——, Calcul exponentiel des opérateurs micro-différentiels d'ordre infini, I, II. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, I : 33-4 (1983), 227-250, II : à paraître.

[A3] ——, 無限階擬微分作用素の逆の構成について. RIMS 講究録「偏微分方程式系の局所・非局所変換理論」に収録予定.

[A·K·K] Aoki - Kashiwara - Kawai, On a class of linear differential operators of infinite order with finite index, RIMS - 499 (to appear in Adv. in Math.)

[I1] Ishimura, R. Théorèmes d'existence et d'approximation pour les équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre infini, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 16 (1980), 393 - 415

[I2] ——, Existence locale de solutions holomorphes pour les équations différentiels d'ordre infini, à paraître dans Ann. Inst. Fourier, Grenoble.

[I3] ——, 無限階微分方程式の局所可解性，当講究録
に収録
[M] Martineau, A. Equations différentiels d'ordre
infini, Bull. Soc. math. France, 95 (1967),
109-154.

（1985年8月記）