

放物型方程式  $\frac{du}{dt}(t) + \partial\phi(u(t)) \ni f(t)$  の周期解

芝浦工大 大河内祐子 (Hiroko Okochi)

### 1. 結果

$H$  を実ヒルバート空間とし、その内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  で表わす。

次の形の方程式の周期解の存在を考える。

$$(E; \phi, f) \quad \frac{du}{dt}(t) + \partial\phi(u(t)) \ni f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

ここにおいて、 $\phi$  は  $H \rightarrow (-\infty, \infty]$  なる適正下半連続な凸関数、

$\partial\phi$  は  $\phi$  の共微分を表わす。更に

$$(1) \quad f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; H) \quad \text{かつ} \quad f(t+2\pi) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

とする。

次の結果を得た。

定理 1. 次の (2) (3) を仮定する。

$$(2) \quad \phi: \text{even} \quad (\text{すなわち} \quad \phi(-x) = \phi(x), \quad x \in H).$$

$$(3) \quad f(t+\pi) = -f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

このとき (E) は  $2\pi$ -周期解  $\omega \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}; H)$  をもつ。

注1. 周期解の一意性に関して、以下が知られている。

$\Phi$  が狭義凸  $\Rightarrow (E; \Phi, f)$  の解  $u, v \in W_{loc}^{1,2}((0, \infty); \mathbb{R})$  について、 $\|u(t+\varepsilon) - v(t+\varepsilon)\| < \|u(t) - v(t)\|$  が成立。

$\Rightarrow (E; \Phi, f)$  の周期解は、存在すれば一意。

$(E; \Phi, f)$  (又は  $(E; \Phi^t, f)$ ) が (1) のもとで  $2\pi$ -周期解をもつための十分条件として、得られているものは以下のタイプと思われる。

(A) ([4; Corollary 11 in Lecture 20])

i)  $\partial\Phi$  が線型 (従って  $\partial\Phi$  は自己共役作用素)

ii)  $(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(t) dt \in \mathcal{R}(\partial\Phi)$ .

(B) (Haraux [3] 又は [4; Theorem 1 in Lecture 21])

$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(t) dt \in \text{Int}[\mathcal{R}(\partial\Phi)]$

(この条件は次の不等式と同値である:

$$(4) \quad \liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x) - \langle F, x \rangle}{\|x\|} > 0$$

こゝにおいて、 $F = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(t) dt$ .)

(C) (Benilan & Brezis [2], Yamada [6])

$\{\Phi^t\}$  は以下を満たす。

$$i) \quad \Phi^{t+2\pi} = \Phi^t, \quad t \in \mathbb{R}$$

ii) 各  $u_0 \in \overline{D(\varphi^0)}$  に対し、初期値  $u(0) = u_0$  を満たす  $(E; \varphi^t, f)$  の解  $u \in C([0, \infty); H) \cap W_{loc}^{1,2}((0, \infty); H)$  が存在する。

iii)  $\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\varphi^t(x) - \varphi^t(0)}{\|x\|} = +\infty$ , unif. in  $t \in [0, 2\pi)$ .

(A) は Fourier 変換を用いて証明される。定理 1 や (B)(C) は、(E) が周期解を持つことと同値な次の (5) を示すことにより証明される。(Browder-Petryshyn の不動点定理)

(5)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{各 } u_0 \in \overline{D(\varphi)} \text{ [又は } \overline{D(\varphi^0)}] \text{ に対し、初期値 } u(0) = u_0 \text{ を} \\ \text{満たす } (E; \varphi, f) \text{ [又は } (E; \varphi^t, f)] \text{ の解 } u \in C([0, \infty); H) \\ \cap W_{loc}^{1,2}((0, \infty); H) \text{ が存在して、} \{u(t); t \geq 0\} \text{ が有界。} \end{array} \right.$

条件 (B) [又は (C)] にあたる (4) [又は iii)] は、遠方での  $\varphi$  [又は  $\varphi^t$ ] の傾きを規定しているのので、 $\{u(t); t \geq 0\}$  が有界になるための十分条件になっている。一方、定理 1 の条件 (2) は次の事実由来する ([5]):

" $\varphi$  が even であれば"

$$(E; \varphi, 0) \quad \frac{dw}{dt}(t) + \partial\varphi(w(t)) \geq 0$$

の解  $w \in W_{loc}^{1,2}((0, \infty); H)$  は  $t \rightarrow \infty$  のとき強収束し

$$(6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \in (\partial\varphi)^{-1}(0)$$

が成立する。"

(従って(2)は「外力項が無いとき、解の軌跡が $\gamma \rightarrow \gamma$ と共に $H$ の適当な元のまわりに縮まっていく」性質を与えている。)

ところで収束(6)は次の(2)'のもとでも成立する([5]).

$$(2)' \quad \exists \varepsilon > 0: \varphi(-\varepsilon x) \leq \varphi(x), \quad x \in H$$

従って、性質(5)を、(2)より弱い(2)'のもとでも得られそうな印象を受ける。しかし、以下を得た。

命題1. (1)(2)'(3)を満たす $\{\varphi, f\}$ で、 $(E; \varphi, f)$ が周期解をもたない例がある。

次に条件(3)について考えよう。まず、次の必要条件に注意しておく([3]):

$(E; \varphi, f)$ が $2\pi$ -周期解をもつならば

$$(7) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \in \overline{\mathcal{R}(\partial\varphi)}$$

が成立する。

(7)は、 $2\pi$ -周期解を $(E; \varphi, f)$ に代入した式を区間 $[0, 2\pi]$ で積分して、 $\mathcal{R}(\partial\varphi)$ が凸集合である事に注意すれば簡単に得られる。

(7)は仮定(2)(3)から直接に得られる。実際、因式的に書

くと、以下が成立する:

$$\left. \begin{array}{l} (2) \Rightarrow 0 \in \partial\varphi(0) \subset \mathcal{R}(\partial\varphi) \\ (3) \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \in \mathcal{R}(\partial\varphi)$$

従って、(3)より弱い条件

$$(3)' \quad \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$$

のもとで、定理1が成立する事を期待したくなる。しかし、以下を得た。

命題2. (1)(2)(3)'をみたす $\{\varphi, f\}$ で、 $(E; \varphi, f)$ が周期解をもたない例がある。

最後に、放物型ではない方程式

$$(E)' \quad \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$$

について、定理1と同様のことが成立しない事を注意しておく。実際、次の例がある。

$$H = \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{bmatrix} \cos 1 & -\sin 1 \\ \sin 1 & \cos 1 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

このとき、 $-A$ は(解析的でない)半群の生成作用素であり、 $A$ と $f$ は

$A(-x) = -Ax, x \in H, f(t+\pi) = -f(t), t \in \mathbb{R}$   
を満たす。しかし、 $(E)'$ の解  $u \in W_{loc}^{1,2}((0, \infty); H)$  の軌跡

$\{u(t) : t \geq 0\}$  は非有界になるので、(E)' は周期解をもたない。

## 2. 一般化された Lin の方程式への応用

定理 1 での仮定(2)は、位相的な仮定(B)や(C)とは全く異なるタイプの条件である。従って、Poincaré や Sobolev の不等式等を適用できないような非線型放物型方程式を考える際には、定理 1 の持ち味がある。

例えば、 $\Delta \varphi$  の代表的な例として

$$-\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \text{適当な境界条件}$$

がある。(ただし  $p \geq 2$ )。このとき、考えている領域  $\Omega$  ( $\subset \mathbb{R}^m$ ) が有界で、Dirichlet 境界条件の時のみ、 $\varphi$  は(B) (又は(C)の(ii)) を満たす。一方(2)は、 $\Omega$  が有界・非有界を問わずに成立している。

ここでは、次の方程式への定理 1 の適用を考える。

$$(L) \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) + \Delta w(x, t) = 0, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \\ \frac{\partial w}{\partial n}(x, t) + g[w(x, t) - h(x, t)] = 0, & (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

ここにおいて、 $\Omega$  は  $\mathbb{R}^m$  の(外部)領域で、その境界  $\Gamma$  は滑らかでコンパクトとする。 $\eta$  は  $\Gamma$  における外向き法線ベクトル

を表わす。

定理1を適用すると以下を得る。

命題3. 以下を仮定する。

(g1)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は非減少な可測関数

(g2)  $g(-t) = -g(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$

(k1)  $k(\cdot, t) \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}; C^2(\Gamma))$

(k2)  $k(\cdot, t+\pi) = -k(\cdot, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

このとき (L) は  $2\pi$ -周期の解  $w(\cdot, t) \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$  を一意にもつ。

注2. 方程式 (L) は、文献 [1] で  $m=1$  (従って  $\Omega=(0, \infty)$ ,  $\Gamma=\{0\}$ ) の場合が論じられている。既知関数  $k, g$  は以下の様に述べられている。

変数  $w(0, t) - k(t)$  をもつ関数  $g$  は Lim の問題では

$$C_1 [w(0, t) - C_2 \sin t]^3$$

の形であり、放射問題ではバキ関数である。ほとんどの物理的な状況では  $g$  と  $k$  は連続関数であり、しばしば  $k$  は周期性をもち、パルス状のエネルギー源を表わしている。

[1]では、(L)を積分方程式に帰着させて逐次近似で解いている。  
(先微分作用素論は使っていない。)

命題3は以下の様に証明される。

$h(\cdot, \cdot)$ を $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ に拡張して

$$h(\cdot, t) \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}; L^2(\Omega)) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}; H^2(\Omega))$$

$$h(\cdot, t+\pi) = -h(\cdot, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(\partial/\partial n)h(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}$$

とする。関数  $u, f$  を

$$u(x, t) = w(x, t) - h(x, t)$$

$$f(x, t) = (\partial/\partial t)h(x, t) - \Delta h(x, t)$$

とおくと、(L)は次の形になる:

$$(L)' \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + g[u(x, t)] = 0, & (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

$L^2(\Omega)$ 上の関数 $\varphi$ を以下で定義する:

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Gamma} G(u|_n) ds, & u \in D(\varphi) \\ +\infty, & u \in L^2(\Omega) \setminus D(\varphi). \end{cases}$$

$$D(\varphi) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_{\Gamma} G(u|_n) ds \text{ が有界} \right\}.$$

ここにおいて  $G(r) = \int_0^r g(s) ds$ ,  $r \in \mathbb{R}$  とした。仮定(31)



より  $G$  は  $\mathbb{R}$  上の凸関数となるので、 $\Phi$  は  $L^2(\Omega)$  上の適正下半連続な凸関数である。 $\Phi$  の劣微分  $\partial\Phi$  は以下で定まる。

$$\partial\Phi(u) = \{-\Delta u\} \\ D(\partial\Phi) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \cap D(\Phi) : \frac{\partial u}{\partial n}(s) + g[u(s)] = 0 \right\}$$

従って、 $(L)'$  は方程式  $(E; \Phi, f)$  に帰着され、定理 1 を適用できるの下、 $(L)'$  の (故に  $(L)$  の) 周期解が存在する。周期解の一意性は、注 1 を用いれば良い。

### 3. 定理 1 の証明

$u \in W_{loc}^{1,2}((0, \infty); H)$  を  $(E; \Phi, f)$  の任意の解とする。Browder-Petryshyn の不動点定理により、集合  $\{u(2n\pi)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  が有界である事を示せば十分である。以下、補題によって軌跡  $\{u(t) : t \geq 0\}$  の有界性を示す。

補題 1. 極大単調作用素  $A: H \rightarrow H$  が odd ( $A(-x) = -Ax$ ,  $x \in D(A)$ , かつ  $-D(A) = D(A)$ ) で、 $f$  は (1) (3) を満たすとす。このとき  $u \in W_{loc}^{1,1}((0, \infty); H)$  が  $(E)' \quad \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$  の解ならば、以下が成立する。

$$(8) \quad \|u(t+\pi) + u(t)\| \leq \|u(\pi) + u(0)\| (= C_1)$$

$$(9) \quad \|u(t+\pi)\| - \|u(t)\| \leq \int_0^{2\pi} \|f(s)\| ds (= C_2).$$

注3.  $\varphi$  が even であれば  $\partial\varphi$  は odd である。従って上の仮定は成立している。

補題1の証明. 簡単のため  $u'(t) = (d/dt)u(t)$  と書き、 $A$  が一価であるかの様にも書く。 $A$  が odd なので、

$$u'(t) - f(t) \in -A(u(t)) = A(-u(t)), \quad \text{a.e. } t > 0.$$

従って (3) より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t+\pi) + u(t)\|^2 &= 2 \langle u'(t+\pi) + u'(t), u(t+\pi) + u(t) \rangle \\ &= 2 \langle u'(t+\pi) - f(t+\pi) + u'(t) + f(t), u(t+\pi) + u(t) \rangle \\ &= 2 \langle -A(u(t+\pi)) + A(-u(t)), u(t+\pi) - (-u(t)) \rangle \\ &\leq 0, \quad \text{a.e. } t > 0. \end{aligned}$$

故に (8) を得る。次に、 $A$  の単調性と  $0 \in A_0$  に注意すれば、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t)\| &= \|u(t)\|^{-1} \langle u'(t), u(t) \rangle \\ &= \|u(t)\|^{-1} \left\{ \langle -Au(t) + A_0, u(t) - 0 \rangle + \langle f(t), u(t) \rangle \right\} \\ &\leq \|u(t)\|^{-1} \left\{ 0 + \|f(t)\| \cdot \|u(t)\| \right\} = \|f(t)\|. \end{aligned}$$

この不等式を区間  $[t, t+\pi]$  で積分すれば (9) を得る。

補題2. (1)(2)(3)の下で、 $\{u(t) : t \geq 0\}$  は有界である。

注4. 補題2は、(2)を(2)'にゆきめても同様に証明できる。

補題2の証明.  $\{u(t) : t \geq 0\}$  が有界でないとする。

$$t_n = \inf \{t > 0 : \|u(t)\| \geq m\}$$

と置くと、十分大きな $m$ に対して、 $t_n > 0$ で

$$(10) \quad \|u(s)\| < \|u(t_n)\| = m, \quad 0 \leq s < t_n.$$

が成立する。更に(9)に注意すれば、 $t_n \uparrow +\infty$  as  $m \rightarrow \infty$ .

$t_n > \pi$  なる $m$ を任意に固定する。 $v \in W_{loc}^{1,2}([t_n - \pi, \infty); H)$  を次の初期値問題の解とする。

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}(t) + \partial \varphi(v(t)) \ni 0, & t \geq t_n - \pi, \\ v(t_n - \pi) = u(t_n - \pi). \end{cases}$$

このとき以下が成立している:

$$(11) \quad \|v(t_n) - u(t_n)\| \leq \int_{t_n - \pi}^{t_n} \|f(s)\| ds \leq \int_0^{2\pi} \|f(s)\| ds (= C_2).$$

$$(12) \quad \varphi(v(t_n)) \leq \varphi(v(t)), \quad t \in [t_n - \pi, t_n).$$

劣微分の定義と(2), (12)より。

$$\begin{aligned} \langle -v'(t), -v(t_n) - v(t) \rangle &\leq \varphi(-v(t_n)) - \varphi(v(t)) \\ &= \varphi(v(t_n)) - \varphi(v(t)) \leq 0 \end{aligned}$$

又は

$$\langle v'(t), v(t_n) \rangle \leq -\langle v'(t), v(t) \rangle$$

が a.e.  $t \in [t_n - \pi, t_n)$  で成立している。従って(10)より

$$\begin{aligned}
 \langle v(t_n) - v(t_n - \pi), v(t_n) \rangle &= \int_{t_n - \pi}^{t_n} \langle v'(s), v(t_n) \rangle ds \\
 (13) \quad &\leq \int_{t_n - \pi}^{t_n} \langle -v'(s), v(s) \rangle ds = \frac{1}{2} \{ \|v(t_n - \pi)\|^2 - \|v(t_n)\|^2 \} \\
 &\leq \frac{1}{2} \|v(t_n - \pi)\|^2 = \frac{1}{2} \|u(t_n - \pi)\|^2 \leq \frac{m^2}{2}.
 \end{aligned}$$

一方、 $y = v(t_n - \pi) + u(t_n)$  ( $= u(t_n - \pi) + u(t_n)$ ),  $z = v(t_n) - u(t_n)$  とおくと、(8)(11)より、 $\|y\| \leq C_1$ ,  $\|z\| \leq C_2$ .  
従って

$$\begin{aligned}
 (14) \quad &\langle v(t_n) - v(t_n - \pi), v(t_n) \rangle \\
 &= \langle u(t_n) + z + u(t_n) + y, u(t_n) + z \rangle \\
 &\geq 2\|u(t_n)\|^2 - (C_1 + C_2)\|u(t_n)\| - C_2(C_1 + C_2) \\
 &= 2m^2 - (C_1 + C_2)m - C_2(C_1 + C_2)
 \end{aligned}$$

を得る。

(13)(14)より

$$\frac{m^2}{2} \geq 2m^2 - (C_1 + C_2)m - C_2(C_1 + C_2).$$

これは、 $m$ が任意であり、 $C_1, C_2$ が $m$ に依存しない定数であった事に矛盾する。従って  $\{u(t) : t \geq 0\}$  は有界である。

## References

- [1] W. F. Amves, Nonlinear partial differential equations in engineering, Academic Press, New York, 1965.
- [2] P. Benilan and H. Brezis, Solutions faibles d'équations d'évolution dans les espaces de Hilbert, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 22 (1972), 311-329.
- [3] A. Haraux, Equations d'evolution nonlineaires: solutions lineaires et periodiques, Ann. Inst. Furier, 28, 2 (1978), 201-220.
- [4] A. Haraux, Nonlinear evolution equations, Lecture Notes in Math., 841, Springer-Verlag, Berlin-Heiderberg-New York, 1981.
- [5] H. Okochi, A note on asymptotic strong convergence of nonlinear contraction semigroups, Proc. Japan Acad., 56 (1980), 83-84.
- [6] Y. Yamada, Periodic solutions of certain nonlinear parabolic differential equations in domains with periodically moving boundaries, Nagoya Math. J., 70 (1978), 111-123.